เอกสารประกอบการเรียนรู้

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100 - 0301

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2557

สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

เรียบเรียงโดย

นายสุรศักดิ์ ราษี

ตำแหน่ง ครูวิทยฐานะ ครูชำนาญการพิเศษ

แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

เอกสารประกอบการเรียนรู้

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100 - 0301

ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา ตามมาตรฐานวิชาและคำอธิบายรายวิชา

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2557

ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา

เรียบเรียงโดย

นายสุรศักดิ์ ราษี

ศศ.ม. สังคมศาสตร์เพื่อการพัฒนา

คอม.วิศวกรรมโยธา

ปรด. ยุทธศาสตร์การพัฒนาภูมิภาค

แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100 - 0301 เรียบเรียงขึ้นตรงตามจุดประสงค์รายวิชา มาตรฐานรายวิชาและคำอธิบายรายวิชา หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557 ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างก่อสร้าง สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

ผู้เรียบเรียงเอกสารประกอบการเรียนรู้เล่มนี้ ได้แบ่งเนื้อหาสาระการเรียนรู้ตามลำดับขั้นตอนการเรียน ออกเป็น 7 หน่วย ดังนี้ หน่วยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง หน่วยที่ 2 แรงปฏิกิริยา หน่วยที่ 3 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด หน่วยที่ 4 เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน หน่วยที่ 5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน หน่วยที่ 6 การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์และการโก่งตัวของงานเสมือนหน่วยที่ 7 คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ เป็นต้น นี้เป็นหัวใจสำคัญของผู้สำเร็จการศึกษาในสาขาวิชาช่างก่อสร้าง และสาขาวิชาโยธา ผู้ศึกษาวิชานี้จะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับวิชาชีพสาขาวิชาช่างก่อสร้างและวิชาช่างโยธาและเป็นอย่างดี ดังนั้นเอกสารประกอบการเรียนรู้เล่มนี้ผู้เรียบเรียง จึงเน้นให้ผู้เรียนรู้ ได้ศึกษาเฉพาะหลักการและลำดับขั้นตอนเกี่ยวกับกลศาสตร์โครงสร้าง ตามขอบเขตของหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพกำหนดโดยคำนึงถึงการศึกษาพื้นฐานของทฤษฎีโครงสร้างให้ลึกซึ้ง เพื่อให้ผู้เรียนรู้ได้เข้าใจขั้นตอนและหลักการในวิชาทฤษฎีโครงสร้าง สามารถนำไปเป็นคู่มือในการเรียนการสอนเป็นพื้นฐานในการปฏิบัติงานในระดับช่างเทคนิค ผู้ควบคุมงาน ผู้ช่วยวิศวกร หรือประกอบอาชีพส่วนตัว มีความรู้ความสามารถ มีเจตคติที่ดี มีประสบการณ์ และศึกษาต่อในระดับสูงขึ้นของผู้สำเร็จการศึกษา

ผู้จัดทำได้เรียบเรียงเอกสารประกอบการเรียนรู้โดยได้พัฒนา ปรับปรุง แก้ไข มาเป็นลำดับเพื่อให้เอกสารมีความสมบูรณ์ ถูกต้อง และเหมาะสม เกิดประโยชน์ในการจัดการเรียนการสอนแก่นักเรียน นักศึกษา ครูผู้สอน และผู้สนใจทั่วไป

สุรศักดิ์ รายี
วิทยาลัยเทคนิคเลย

คำนิยม

สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา มีนโยบายและมอบหมายให้สถานศึกษาทุกแห่งที่สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา เพื่อดำเนินการจัดการเรียนการสอนให้เกิดคุณภาพและมีมาตรฐานด้านวิชาชีพ โดยเน้นการปรับวิธีเรียน เปลี่ยนวิธีสอน จัดกระบวนการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน นักศึกษาให้เป็นไปอย่างกว้างขวาง ทันยุค ทันสมัย มีการเรียนรู้ได้ทุกโอกาสและทุกเวลา ในขณะเดียวกัน ตำรา เอกสาร สื่อต่างๆที่ใช้ประกอบการเรียน การสอนก็จะต้องมีการ บูรณาการ ปรับปรุงเปลี่ยนแปลงทันต่อความก้าวหน้าทางเทคโนโลยี

เอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301 หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557 ประเภทวิชาอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างก่อสร้าง เล่มนี้ซึ่ง นายสุรศักดิ์ ราษี ได้เขียนและเรียบเรียงขึ้นมาด้วยตนเอง จึงเป็นเอกสารประกอบการเรียนรู้ที่มีคุณค่าและมีเนื้อหาทางทฤษฎีภายในรูปเล่มประกอบด้วย วัตถุประสงค์ เนื้อหารายวิชา ขั้นตอนการเรียนถูกต้อง ครอบคลุมฐานสมรรถนะวิชาชีพ และมีการเสริมทักษะการเรียนรู้ด้วยแบบทดสอบก่อนเรียน หลังเรียน แบบฝึกหัดและมีเฉลยแบบฝึกหัดทุกหน่วยการเรียน

ทั้งนี้ เพื่อให้ครูผู้สอนได้นำไปประกอบการจัดการเรียนการสอนและผู้เรียนสามารถนำไปค้นคว้าด้วยตนเองได้ นับว่าเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนและผู้ที่สนใจที่จะค้นคว้าในรายวิชาดังกล่าว ต่อไป

(นายบรรจง สุรพุทธ)
รองผู้อำนวยการ รักษาการในตำแหน่ง
ผู้อำนวยการวิทยาลัยเทคนิคเลย

คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการเรียนรู้

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557

ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

เอกสารประกอบการเรียนรู้วิชาทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301 สำหรับครูชุดนี้ใช้สำหรับประกอบการเรียนรู้กับผู้เรียนทั้งห้อง การกิจกรรมการเรียนและสื่อการเรียนการสอน ในการเรียนรู้ผู้เรียนจะต้องประกอบกิจกรรมและกรณีศึกษาไปพร้อม ๆ กัน โดยเนื้อหาวิชาจะประกอบด้วยเอกสารประกอบการเรียนรู้ 7 หน่วยการเรียน มีรายละเอียด ดังนี้

เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	1	เรื่อง	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง
เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	2	เรื่อง	แรงปฏิกิริยา
เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	3	เรื่อง	แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด
เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	4	เรื่อง	เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน
เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	5	เรื่อง	แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน
เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	6	เรื่อง	การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์ และการโก่งตัวของคานเสมือน
เอกสารประกอบการเรียนรู้หน่วยที่	7	เรื่อง	คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ

เอกสารประกอบการเรียนรู้ชุดนี้ประกอบด้วยรายละเอียด ดังนี้

1. คำชี้แจงสำหรับการจัดเรียนการสอน
2. จุดประสงค์รายวิชา / มาตรฐานรายวิชา / คำอธิบายรายวิชา
3. หน่วยการจัดการเรียนรู้
4. ตารางวิเคราะห์หน่วยการเรียนรู้
5. ตารางวิเคราะห์คำอธิบายรายวิชา
6. ตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้
7. จุดประสงค์หน่วยการเรียน
8. เนื้อหา
9. แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน
10. แบบฝึกหัด

คำชี้แจงสำหรับการเรียน การสอน

1. คำชี้แจงสำหรับผู้สอน

ผู้สอนศึกษาเนื้อหาวิชาและแผนการจัดการเรียนรู้ให้เข้าใจก่อนทำการสอน และต้องเตรียมสื่อและอุปกรณ์ต่าง ๆ เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนตามที่ระบุไว้ในแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละหน่วยการเรียน

ผู้สอนต้องดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ให้ครบทุกหน่วยการเรียน การจัดกิจกรรมการเรียนการสอน แบ่งออกเป็นขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 นำเข้าสู่บทเรียน

ขั้นที่ 2 ให้เนื้อหา

ขั้นที่ 3 ประกอบกิจกรรมการเรียน

ขั้นที่ 4 สรุปผล

โดยการจัดกิจกรรมการเรียน การสอน ผู้สอนจะต้องมีทักษะและความชำนาญในการอภิปรายให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างมีประสิทธิผล

การสรุปหน่วยเรียน เป็นกิจกรรมร่วมระหว่างผู้สอนกับผู้เรียนหรือจะเป็นกิจกรรมผู้เรียนทั้งหมดก็ได้

ก่อนเรียนในแต่ละหน่วยการเรียนจะให้ผู้เรียนทดสอบความรู้ด้วยแบบทดสอบก่อนเรียน

หลังจากเรียนครบหัวข้อเรื่องในแต่ละหน่วยการเรียนแล้วให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน

หลังจากผู้เรียน เรียนจนครบทุกหน่วยเรียนแล้ว ผู้สอนจะต้องเก็บข้อมูลผลการเรียนจัดทำประวัติการเรียนของผู้เรียน เพื่อดูการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมและความก้าวหน้าของผู้เรียน

2. บทบาทผู้เรียน

เนื่องจากแผนการจัดการเรียนรู้วิชานี้ เป็นแผนการจัดการเรียนรู้สำหรับครูผู้สอนเป็นผู้ดำเนินการ โดยให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมตามบทบาทผู้เรียน ดังนี้

ผู้เรียนต้องปฏิบัติกิจกรรมตามคำแนะนำของผู้สอนอย่างเคร่งครัด

ผู้เรียนต้องพยายามทำแบบฝึกหัดอย่างเต็มความสามารถ (คำถามที่ใช้เป็นเพียงส่วนหนึ่งของการเรียนเท่านั้น)

3. การจัดชั้นเรียน

ใช้การจัดชั้นเรียนตามปกติ สำหรับการสอนภาคทฤษฎี โดยจัดการเรียนการสอนแบบบรรยายหรือถามตอบและทำแบบฝึกหัด สภาพการจัดชั้นเรียนต้องจัดให้เหมาะสม สามารถจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแก่นักเรียนอย่างทั่วถึง

4. การจัดการเรียนรู้และแผนการจัดการเรียนรู้

การจัดการเรียนรู้ในเอกสารชุดนี้ โดยจัดแบ่งเป็นการจัดการเรียนรู้รายวิชา ซึ่งจะมีแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละหน่วยเรียนประกอบอยู่ด้วยทุกหน่วยการจัดการเรียนรู้

5. การประเมินผล

ประเมินผลจากการทำแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ตามที่มอบหมาย และการทำแบบฝึกหัดท้ายหน่วย

6. เกณฑ์การวัดและประเมินผลวิชาทฤษฎีโครงสร้าง

การวัดและประเมินผล ได้กำหนดให้ใช้สัดส่วนของคะแนน ระหว่างภาคต่อคะแนนสอบปลายภาคเท่ากับ 70 : 30 ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

6.1 คะแนนระหว่างภาค	**70**	**คะแนน**
6.1.1 คะแนนความตั้งใจและกิจนิสัยการเรียนแต่ละครั้ง	10	คะแนน
6.1.2 คะแนนทำแบบฝึกหัดท้ายหน่วยเรียน	20	คะแนน
6.1.3 คะแนนงานที่มอบหมายให้ค้นคว้า	10	คะแนน
6.1.4 คะแนนทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน	30	คะแนน
6.2 คะแนนสอบปลายภาค	**30**	**คะแนน**

6.3 เกณฑ์การประเมินผล

ใช้เกณฑ์การประเมินแบบอิงเกณฑ์ มีระดับดังนี้

80 - 100	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	4
75 - 79	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	3.5
70 - 74	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	3
65 - 69	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	2.5
60 - 64	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	2
55 - 59	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	1.5
50 - 54	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	1
0 - 49	คะแนน	ได้ระดับคะแนน	0

จุดประสงค์รายวิชา / มาตรฐานรายวิชา / คำอธิบายรายวิชา

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง 3 (3)

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอน 54 ชั่วโมง

จุดประสงค์รายวิชา

1.เข้าใจวิธีหาแรงในโครงสร้าง

2.สามารถคำนวณหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด เส้นอิทธิพล การโก่งตัวของคาน แรงในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน และคานต่อเนื่อง

3. มีกิจนิสัยในการทำงานที่ดี สนใจใฝ่รู้ ทำงานด้วนความรอบคอบ และมีความรับผิดชอบ

มาตรฐานรายวิชา

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับหลักการวิเคราะห์แรงภายในโครงสร้าง
2. คำนวณแรงปฏิกิริยาและแรงภายในโครงสร้าง
3. เขียนเส้นอิทธิพลในคานแลโครงข้อหมุน
4. คำนวณค่าการโก่งตัวของคาน

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับความรู้เบื้องต้นที่เกี่ยวกับโครงสร้าง แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด แรงภายในชิ้นส่วนโครงข้อหมุน เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์และงานเสมือน การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการโมเมนต์

หมายเหตุ จุดประสงค์รายวิชา มาตรฐานรายวิชา และคำอธิบายรายวิชาจากหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557 ประเภทวิชาอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างก่อสร้าง สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

หน่วยการจัดการเรียนรู้

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301

จำนวน 3 หน่วยกิต จำนวนชั่วโมงเรียน 3 ชั่วโมง / สัปดาห์

ลำดับที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	จำนวนคาบ (ชม.)
1	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง	3
2	แรงปฏิกิริยา	6
3	แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด	9
4	เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน	9
5	แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน	9
6	การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์และการโก่งตัวของคานเสมือน	9
7	การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ	9
	การวัดผลและประเมินผล (สอบกลางภาคเรียนและสอบปลายภาคเรียน)	
รวม		**54**

ตารางวิเคราะห์หน่วยการเรียนรู้

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301

จำนวน 3 หน่วยกิต จำนวนชั่วโมงเรียน 3 ชั่วโมง / สัปดาห์

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	พฤติกรรมที่พึงประสงค์			จำนวนคาบ (ชม.)
		พุทธิพิสัย	ทักษะพิสัย	จิตพิสัย	
1	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง	1	1	1	3
2	แรงปฏิกิริยา	2	2	2	6
3	แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด	3	3	3	9
4	เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน	3	3	3	9
5	แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน	3	3	3	9
6	การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์และการโก่งตัวของคานเสมือน	3	3	3	9
7	การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ	3	3	3	9
	การวัดผลและประเมินผล (สอบกลางภาคเรียนและสอบปลายภาคเรียน)				
รวม		**18**	**18**	**18**	**54**

ตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301

จำนวน 3 หน่วยกิต จำนวนชั่วโมงเรียน 3 ชั่วโมง / สัปดาห์

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ระดับพฤติกรรมที่ต้องการ								จำนวนคาบ (ชม.)
		พุทธิพิสัย				จิตพิสัย		ทักษะพิสัย		
		1	2	3	4	1	2	1	2	
1	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง									
	- บทนำ	/	/	/		/	/		/	
	- คำจำกัดความของแรง	/	/	/	/	/	/		/	
	- สมการของการสมดุล	/	/	/	/	/	/		/	
	- น้ำหนักบรรทุก	/	/	/	/	/	/		/	
	- การเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการ	/	/	/	/	/	/		/	3
	วิเคราะห์	/	/	/	/	/	/		/	
	- ชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับ	/	/	/	/	/	/		/	
	- ประเภทของคาน	/	/	/	/	/	/		/	
	- แบบของโครงสร้าง	/	/	/	/	/	/		/	
	- การวิเคราะห์หาตัวเกิน	/	/	/	/	/	/		/	
	- สมมุติฐานในการวิเคราะห์	/	/	/	/	/	/		/	
	- บทสรุป	/	/	/	/	/	/		/	
2	แรงปฏิกิริยา									6
	- บทนำ	/	/	/		/	/		/	
	- สมการสมดุล 2 มิติ	/	/	/	/	/	/		/	
	- ชนิดของที่รองรับ	/	/	/	/	/	/		/	
	- การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา	/	/	/	/	/	/		/	
	- ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา	/	/	/	/	/	/		/	
	- บทสรุป	/	/	/	/	/	/		/	

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ระดับพฤติกรรมที่ต้องการ								จำนวนคาบ (ชม.)
		พุทธิพิสัย				จิตพิสัย		ทักษะพิสัย		
		1	2	3	4	1	2	1	2	
3	แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด - บทนำ - แรงปฏิกิริยาและฐานรองรับ - ประเภทของคาน (Beam) - คำจำกัดความของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด - ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (W) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ (M) ในคานตรง - ขั้นตอนการสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคาน - บทสรุป	/ / / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / / /	 / / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / / /	 	/ / / / / / /	9
4	เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน - บทนำ - การเขียนภาพอิทธิพล - ประโยชน์ของเส้นอิทธิพล - แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ - การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงปฏิกิริยา - แรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ - การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับการเฉือนของคาน - การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือน	/ / / / / / / /	/ / / / / / / /	/ / / / / / / /	 / / / / / / /	/ / / / / / / /	/ / / / / / / /	 	/ / / / / / / /	9

ฎ

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ระดับพฤติกรรมที่ต้องการ								จำนวนคาบ (ชม.)
		พุทธิพิสัย				จิตพิสัย		ทักษะพิสัย		
		1	2	3	4	1	2	1	2	
4	เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน - การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์ - การเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัด - การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับตงพื้น - การเขียนเส้นอิทธิพลบนโครงสร้างข้อหมุน - บทสรุป	/ / / / /	/ / / / /	/ / / / /	/ / / / /	/ / / / /	/ / / / /		/ / / / /	9
5	แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน - บทนำ - ประเภทของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก - สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหรือโครงถัก - พฤติกรรมของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก - แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนหรือโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง - การหาแรงภายในโครงข้อหมุนหรือโครงถัก - บทสรุป	/ / / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / /	/ / / / / / /	/ / / / / / /		/ / / / / / /	9
6	การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์และการโก่งตัวของคานเสมือน - บทนำ - พื้นที่โมเมนต์ (Moment Area Method) - คานเสมือน (Conjugate Beam Method) - บทสรุป	/ / / /	/ / / /	/ / / /	/ / / /	/ / / /	/ / / /		/ / / /	9

หน่วยที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	ระดับพฤติกรรมที่ต้องการ								จำนวนคาบ (ชม.)
		พุทธิพิสัย				จิตพิสัย		ทักษะพิสัย		
		1	2	3	4	1	2	1	2	
7	การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ									9
	- บทนำ	/	/	/		/	/		/	
	- วิธีสามโมเมนต์	/	/	/	/	/	/		/	
	(Three Moment Equation)	/	/	/	/	/	/		/	
	- น้ำหนักที่กระทำแบบแผ่กระจาย	/	/	/	/	/	/		/	
	(Uniform Load)									
	- น้ำหนักที่มากระทำแบบลงเป็นจุด	/	/	/	/	/	/		/	
	(Concentrate Load)									
	- โมเมนต์ลบ (Negative Moment)	/	/	/	/	/	/		/	
	- โมเมนต์บวก (Positive Moment)	/	/	/	/	/	/		/	

หมายเหตุ

พุทธิพิสัย 1 = ความจำ 2 = ความเข้าใจ 3 = การนำไปใช้ 4 = การวิเคราะห์ สังเคราะห์

จิตพิสัย 1 = การประเมินคุณค่า 2 = การจัดระบบ

ทักษะพิสัย 1 = การทำตามแบบ 2 = การทำอย่างถูกต้องแม่นยำ

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	**ก**
คำชี้แจงการใช้เอกสารประกอบการเรียนรู้	**ข**
แผนบริหารการสอนประจำวิชา	**ฉ**
ชื่อวิชา	ฉ
รหัสวิชา	ฉ
หน่วยกิต / ชั่วโมง	ฉ
จุดประสงค์รายวิชา	ฉ
มาตรฐานรายวิชา	ฉ
คำอธิบายรายวิชา	ฉ
หน่วยการจัดการเรียนรู้	ช
ตารางวิเคราะห์หน่วยการเรียนรู้	ซ
ตารางวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้	ฌ
สารบัญ	**ฑ**
สารบัญตาราง	**ท**
สารบัญภาพประกอบ	น
หน่วยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง	**1**
ผังความคิดรวบยอด	3
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1	4
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2	5
1.1 บทนำ	7
1.2 คำจำกัดความของแรง	7
1.3 สมการของการสมดุล	8
1.4 น้ำหนักบรรทุก	10
1.5 การเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์	11

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

	1.6 ชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับ	12
	1.7 ประเภทของคาน	13
	1.6 ชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับ	12
	1.7 แบบของโครงสร้าง	13
	1.6 การวิเคราะห์หาตัวเกิน	12
	1.7 สมมุติฐานในการวิเคราะห์	13
	บทสรุป	19
	แบบฝึกหัด	21
	แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3	30
	แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4	31
	บรรณานุกรมท้ายหน่วย	33
หน่วยที่ 2	**แรงปฏิกิริยา**	**34**
	ผังความคิดรวบยอด	36
	แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1	37
	แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2	38
	2.1 บทนำ	41
	2.2 สมการสมดุล 2 มิติ	41
	2.3 ชนิดของที่รองรับ	43
	2.4 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา	44
	2.5 ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา	47
	บทสรุป	55
	แบบฝึกหัด	57
	แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3	66
	แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4	67
	บรรณานุกรมท้ายหน่วย	70

หน่วยที่ 3 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด **115**

ผังความคิดรวบยอด 117

แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1 118

แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2 119

3.1 บทนำ 121

3.2 แรงปฏิกิริยาและฐานรองรับ 123

3.3 ประเภทของคาน (Beam) 125

3.4 คำจำกัดความของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด 127

3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (W) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ (M) ในคานตรง 130

3.6 ขั้นตอนการสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคาน 132

บทสรุป 182

แบบฝึกหัด 186

แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3 197

แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4 198

บรรณานุกรมท้ายหน่วย 200

หน่วยที่ 4 เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน **203**

ผังความคิดรวบยอด 205

แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1 206

แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2 207

4.1 บทนำเกี่ยวกับเส้นอิทธิพล 211

4.2 การเขียนภาพอิทธิพล 215

4.3 ประโยชน์ของเส้นอิทธิพล 216

4.4 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ 216

4.5 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงปฏิกิริยา 218

4.6 แรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ 228

4.7 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับการเฉือนของคาน 240

4.8 การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือน 249

4.9 การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์ 260

4.10 การเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัด 262
4.11 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับตงพื้น 296
4.12 การเขียนเส้นอิทธิพลบนโครงสร้างข้อหมุน 300
บทสรุป 304
แบบฝึกหัด 307
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3 323
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4 324
บรรณานุกรมท้ายหน่วย 327

หน่วยที่ 5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุน 329
ผังความคิดรวบยอด 331
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1 332
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2 333
5.1 บทนำ 335
5.2 ประเภทของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก 336
5.3 สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหรือโครงถัก 339
5.4 พฤติกรรมของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก 340
5.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนหรือโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง 341
5.6 การหาแรงภายในโครงข้อหมุนหรือโครงถัก 341
บทสรุป 400
แบบฝึกหัด 402
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3 417
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4 418
บรรณานุกรมท้ายหน่วย 420

หน่วยที่ 6 การโก่งตัวของคานโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์การโก่งตัวของคานเสมือน 423
ผังความคิดรวบยอด 425
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1 426
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2 427

6.1 บทนำ 193
6.2 พื้นที่โมเมนต์ (Moment Area Method) 193
6.3 คานเสมือน (Conjugate Beam Method)
บทสรุป 200
แบบฝึกหัด 201
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3 213
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4 214
บรรณานุกรมท้ายหน่วย 217

หน่วยที่ 7 การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ 219
ผังความคิดรวบยอด 221
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 1 222
แบบทดสอบก่อนเรียนตอนที่ 2 223
7.1 บทนำ 225
7.2 วิธีสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) 225
7.3 น้ำหนักที่กระทำแบบแผ่กระจาย (Uniform Load) 227
7.4 น้ำหนักที่มากระทำแบบลงเป็นจุด (Concentrate Load) 229
7.5 โมเมนต์ลบ (Negative Moment) 231
7.6 โมเมนต์บวก (Positive Moment)
บทสรุป 234
แบบฝึกหัด 236
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 3 246
แบบทดสอบหลังเรียนตอนที่ 4 247
บรรณานุกรมท้ายหน่วย 249

ภาคผนวก 363
ภาคผนวก ก ข้อสอบกลางภาคเรียนและข้อสอบปลายภาคเรียน 364
ภาคผนวก ข ประวัติส่วนตัว 378

สารบัญตาราง

หน่วย ตารางที่ หน้า

หน่วยที่ 1	1.1	น้ำหนักวัสดุและน้ำหนักบรรทุกคงที่หรือตายตัว	18
	1.2	ประเภทการใช้อาคารและน้ำหนักบรรทุกจร	20
หน่วยที่ 5	5.1	แสดงสัญลักษณ์และเครื่องหมายที่ใช้แทนแรง	334

สารบัญภาพประกอบ

หน่วย ภาพประกอบที่ หน้า

หน่วยที่ 1 1.1 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
1.2 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
1.3 ทฤษฎีของลามี
1.4 การสมดุลของแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
1.5 แรงตามแนวแกน
1.6 แรงเฉือนเป็นบวก
1.7 แรงเฉือนเป็นลบ
1.8 โมเมนต์ดัด (Bending moment)
1.9 โมเมนต์เป็นบวก
1.10 โมเมนต์เป็นลบ
1.11 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
1.12 คานรับแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
1.13 รถบรรทุกแบบ H
1.14 รถบรรทุกแบบ H-S
1.15 รถบรรทุกแบบ H-S
1.16 ภาพที่ 1.16 (ก) , (ข) ภาพของโครงสร้างจริง (ค), (ง) และภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์
1.17 ฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hing)
1.18 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว
1.19 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)
1.20 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
1.21 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายที่มา
1.22 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย
1.23 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายสองข้าง
1.24 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 1	1.25	คานยื่น (Cantilever Beam)	49
	1.26	คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam)	49

	1.27	โครงแบบดีเทอมิเนท	50
	1.28	โครงแบบดีเทอมิเนท	51
	1.29	โครงแบบอินดีเทอมิเนท	52
	1.30	ลักษณะโครงสร้างที่เป็นเงื่อนไขพิเศษ	53
	1.31	คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)	53
	1.32	คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)	54
	1.33	คานธรรมดายึดแน่นและปลายยื่น	54
	1.34	คานยึดแน่นลักษณะโครงสร้างพิเศษ	58
	1.35	คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)	59
	1.36	โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลม	60
	1.37	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)	61
	1.38	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)	62
	1.39	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)	
	1.40	โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)	63
	1.41	โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)	64
	1.42	คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)	65
	1.43	คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Beam)	68
	1.44	คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)	69
	1.45	คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Simple Beam)	76
	1.46	คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)	76
	1.47	คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)	77
	1.48	โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลม	78
	1.49	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)	79
	1.50	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)	79
	1.51	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)	79

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 2	2.1	แสดงสมดุลของแรงขนานกัน	80
	2.2	ฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hing)	80

2.3	ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว	81
2.4	ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)	82
2.5	ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)	83
2.6	ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Pinned Joint)	83
2.7	ฐานรองรับแบบยึดรั้ง (Rigid Joint)	84
2.8	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	84
2.9	การเขียน Free Body Diagram	84
2.10	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	85
2.11	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	87
2.12	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	88
2.13	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	88
2.14	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	90
2.15	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	91
2.16	การเขียน Free Body Diagram	91
2.17	คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล	92
2.18	คานยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล	93
2.19	คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล	96
2.20	คานต่อเนื่องอยู่ในสภาวะสมดุล	97
2.21	เขียนแผนภาพอิสระของคานต่อเนื่อง	98
2.22	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	99
2.23	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	100
2.24	โครงสร้างโดมโค้งอยู่ในสภาวะสมดุล	101
2.25	โครงสร้างโดมโค้งอยู่ในสภาวะสมดุล	102
2.26	โครงสร้างข้อแข็ง	103

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	**ภาพประกอบที่**		**หน้า**
หน่วยที่ 3	3.1	ฐานรองรับแบบยึดหมุน	104

3.2	ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว	105
3.3	ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)	106
3.4	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	109
3.5	คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายที่มา	109
3.6	คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย	110
3.7	คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายสองข้าง	117
3.8	คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)	117
3.9	คานยื่น (Cantilever Beam)	118
3.10	คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam)	121
3.11	แรงเฉือน (Shearing Force)	122
3.12	ภาพตัด c-c แรงเฉือน (Shearing Force)	122
3.13	ภาพตัด c-c แรงเฉือน (Shearing Force)	123
3.14	แรงเฉือนเป็นบวก	123
3.15	แรงเฉือนเป็นลบ	123
3.16	โมเมนต์ดัด (Bending moment)	124
3.17	โมเมนต์เป็นบวก	124
3.18	โมเมนต์เป็นลบ	124
3.19	โมเมนต์เป็นลบ	125
3.20	ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก	125
3.21	ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก	126
3.22	คานมีแรงแบบจุดกระทำตรงกลาง	127
3.23	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด	128
3.24	คานมีแรงแบบจุดกระทำแต่ไม่อยู่ตรงกลาง	129
3.25	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด	

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 3	3.26	คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน	130
	3.27	คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน	134

	3.28	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	134
	3.29	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	135
	3.30	คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับ	136
	3.31	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด	137
	3.32	คานมีแรงคู่ควบกระทำ	138
	3.33	คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับและน้ำหนักลงสม่ำเสมอ	139
	3.24	คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับและน้ำหนักลงสม่ำเสมอ	140
	3.35	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด	141
	3.36	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด	142
	3.37	คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ	144
	3.38	คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ	145
	3.39	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	146
	3.40	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด	146
หน่วยที่ 5	3.41	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	154
	3.42	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	155
	3.43	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	155
	3.44	การเขียน Free Body Diagram	157
	3.45	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	158
	3.46	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	159
	3.47	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	160
	3.48	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	161
	3.49	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	161
	3.50	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	
	3.51	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	**ภาพประกอบที่**		**หน้า**
หน่วยที่ 3	3.52	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	162
	3.53	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	162
	3.54	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	163

	3.55	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	163
	3.56	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	164
	3.57	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	165
	3.58	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	166
	3.59	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	168
	3.60	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	169
	3.61	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	172
	3.62	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	173
	3.63	แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์	174
	3.64	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	175
	3.65	คานอยู่ภายใต้แรงรูปสามเหลี่ยม	176
	3.66	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	177
	3.67	ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก	178
	3.68	ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก	179
	3.69	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	181
	3.70	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	182
	3.71	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	183
	3.72	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	184
	3.73	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	193
	3.74	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	194
	3.75	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	195
	3.76	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	195
	3.77	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	**ภาพประกอบที่**		**หน้า**
หน่วยที่ 3	3.78	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	198
	3.79	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	198

หน่วยที่ 4	4.1	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	199
	4.2	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	199
	4.3	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	211
	4.4	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	211
	4.5	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	212
	4.6	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	212
	4.7	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	226
	4.8	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	226
	4.9	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	227
	4.10	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	231
	4.11	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	234
	4.12	คานเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	243
	4.13	คานใช้สำหรับเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	244
	4.14	คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	245
	4.15	คานอย่างง่ายเพื่อการหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	211
	4.16	คานของเครนเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	212
	4.17	เส้นอิทธิพลจากน้ำหนักเคลื่อนที่ของแรงเฉือน	212
	4.18	คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	226
	4.19	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	226
	4.20	คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	227
	4.21	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	231
	4.22	คานอย่างง่ายสำหรับเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	234
	4.23	เส้นอิทธิของแรงเฉือน	243

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	**ภาพประกอบที่**		**หน้า**
หน่วยที่ 4	4.24	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	198
	4.25	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	198

	4.26	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	199
	4.27	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	199
	4.28	เส้นอิทธิพลของแรงดัดที่จุด y-y	211
	4.29	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	211
	4.30	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	212
	4.31	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	212
	4.32	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	226
	4.33	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	226
	4.34	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	227
	4.35	ชิ้นส่วนของโครงถักสะพาน	231
	4.36	โครงข้อหมุนแบบแพร์ท	234
	4.37	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	243
	4.38	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	244
	4.39	คานอย่างง่าย (Simple Beam)	245
	4.40	โครงข้อแข็ง (Rigid Farm)	211
	4.41	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	212
	4.42	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	212
	4.43	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	226
	4.44	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	226
	4.45	เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน	227
	4.46	คานช่วงเดียว (Simple Beam)	23[illegible]
	4.47	เส้นอิทธิพลของแรงดัดที่จุด y-y	23[illegible]
	4.48	คานยื่น (Cantilever Beam)	243

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 4	4.49	คานอย่างอยาก (Determinate Beam)	198
	4.50	คานสะพานเพื่อห้าส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	198

	4.51	คานสะพานเพื่อห้าส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	199
	4.52	โครงข้อหมุนแบบแพร์ท	199
หน่วยที่ 5	5.1	แสดงโครงสร้างถักแต่ละรูปทรง	211
	5.2	โครงสร้างถักแบบโฮว์	211
	5.3	แสดงโครงถักแบบโครงหลังคา	212
	5.4	แสดงโครงถักแบบสะพาน	212
	5.5	แสดงแนวแรงของชิ้นส่วน	226
	5.6	แสดงพฤติกรรมของโครงถักเมื่อรับแรง	226
	5.7	แสดงพฤติกรรมของโครงถักกรณีที่ไม่มีชิ้นส่วน CG	227
	5.8	โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม	231
	5.9	โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม	234
	5.10	โครงสร้างหลัง0898418408คาถักแบบโฮว์	243
	5.11	โครงสร้างถักแบบวอร์เรน	244
	5.12	โครงสร้างถักแบบวอร์เรน	245
	5.13	โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม	211
	5.14	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	212
	5.15	โครงสร้างป้ายโฆษณา	212
	5.16	โครงสร้างถักแบบโฮว์	226
	5.17	โครงสร้างถักแบบโฮว์	226
	5.18	โครงสร้างถักแบบแพรท	227
	5.19	โครงสร้างถักแบบวอร์เรน	231
	5.20	โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์	234
	5.21	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	243

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	**ภาพประกอบที่**		**หน้า**
หน่วยที่ 5	5.22	โครงสร้างถักแบบวอร์เรนมีค้ำยันในแนวดิ่ง	198
	5.23	โครงสร้างถักแบบโฮว์	198

	5.24	โครงสร้างถักแบบโฮว์	199
	5.25	โครงสร้างถักแบบแฟน	199
	5.26	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	211
	5.27	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	211
	5.28	โครงสร้างถักแบบวอร์เรนค้ำยันในแนวดิ่ง	212
	5.29	โครงสร้างถักแบบแพรท	212
	5.30	โครงสร้างถักแบบแพรท	226
	5.31	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	226
	5.32	โครงสร้างรูปถักสี่เหลี่ยมผืนผ้า	227
	5.33	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	231
	5.34	โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม	234
	5.35	โครงสร้างถัก	243
	5.36	โครงสร้างถัก	244
	5.37	โครงสร้างถัก	245
หน่วยที่ 6	6.1	คานยื่นและคานอย่างง่าย (Cantilever and Continuous Beam)	211
	6.2	คานยื่นและคานอย่างง่าย (Cantilever and Continuous Beam)	212
	6.3	โครงข้อแข็ง (Rigid Flame)	212
	6.4	โครงข้อแข็ง (Rigid Flame)	226
	6.5	คานช่วงเดียวธรรมดา	226
	6.6	คานยื่น (Cantilever Beam)	227
	6.7	คานยื่น (Cantilever Beam)	231
	6.8	ภาพแสดงเครื่องหมายและทิศทางของ และ	234
	6.9	พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต	243

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 6	6.10	พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต	198
	6.11	พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต	198

	6.12	คานจริงและคานเสมือน	199
	6.13	คานธรรมดาและคานยื่น	199
	6.14	คานธรรมดาและคานยื่น	211
	6.15	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	211
	6.16	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	212
	6.17	การโก่งตัวของคานยื่น	212
	6.18	การโก่งตัวของคานยื่น	226
	6.19	การโก่งตัวของคานยื่น	226
	6.20	การโก่งตัวของคานยื่น	227
	6.21	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	231
	6.22	คานอยู่ในลักษณะสมดุล	234
	6.23	คานธรรมดา (Simple Beam)	243
	6.24	คานธรรมดา (Simple Beam)	244
	6.25	พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต	245
	6.26	การโก่งตัวของคานยื่น	211
	6.27	การโก่งตัวของคานยื่น	212
	6.28	การโก่งตัวของคานยื่น	212
	6.29	การโก่งตัวของคานยื่น	226
	6.30	การโก่งตัวของคานยื่น	226
	6.31	คานอยู่ในสภาวะสมดุล	227
	6.32	คานยื่น	231
	6.33	การโก่งตัวของคานยื่น	234
	6.34	คานยื่น	243

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 6	6.35	การโก่งตัวของคานยื่น	198
	6.36	การโก่งตัวของคานยื่น	198

	6.37	คานจริง (Real Beam)	199
	6.38	คานเสมือน (Conjugate Beam)	199
	6.39	หลักการของวิธีคานเสมือน	211
	6.40	หลักการของวิธีคานเสมือน	211
	6.41	คานจริงและคานเสมือน	212
	6.42	คานจริงและคานเสมือน	212
	6.43	แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง	226
	6.44	แนวการโก่งตัวของคานเสมือน	226
	6.45	คานอย่างง่าย	227
	6.46	คานอย่างง่าย	231
	6.47	คานประกอบ	234
	6.48	คานประกอบ	243
	6.49	แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง	244
	6.50	แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง	245
	6.51	แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง	227
	6.52	แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง	231
	6.53	คานยื่น (Cantilever Beam)	234
	6.54	คานช่วงเดียวธรรมดา	243
	6.55	การโก่งตัวของคานยื่น	244
	6.56	การโก่งตัวของคานยึดแน่น	245
	6.57	คานยื่น (Cantilever Beam)	227
	6.58	คานช่วงเดียวธรรมดา	231
	6.59	การโก่งตัวของคานยื่น	234

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 6	6.60	คานช่วงเดียวธรรมดา	198
	6.61	คานช่วงเดียวธรรมดา	198

	6.62	การโก่งตัวของคานยื่น	199
	6.63	การโก่งตัวของคานยื่น	199
	6.64	แนวการโก่งตัวของธรรมดาและคานยื่น	211
หน่วยที่ 7	7.1	คานคานต่อเนื่องน้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน	211
	7.2	คานคานต่อเนื่องน้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน	212
	7.3	น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน	212
	7.4	น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคานความยาวคานเท่ากัน	226
	7.5	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	226
	7.6	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	227
	7.7	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	231
	7.8	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	234
	7.9	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	243
	7.10	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	244
	7.11	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	245
	7.12	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.13	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.14	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	199
	7.15	คานช่วงเดียวอย่างง่ายและน้ำหนักบรรทุก	199
	7.16	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	211
	7.17	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	211
	7.18	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	212
	7.19	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	212

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	**ภาพประกอบที่**		**หน้า**
หน่วยที่ 7	7.20	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.21	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	198

	7.22	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	199
	7.23	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	199
	7.24	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	211
	7.25	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	211
	7.26	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	212
	7.27	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	212
	7.28	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	226
	7.29	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	226
	7.30	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	227
	7.31	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	231
	7.32	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	234
	7.33	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	243
	7.34	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	244
	7.35	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	245
	7.36	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.37	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.38	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	199
	7.39	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	199
	7.40	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	211
	7.41	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	211
	7.42	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	212
	7.43	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	212
	7.44	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	226

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 7	7.45	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.46	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	198

7.47	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	199
7.48	คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก	199
7.49	คานช่วงเดียวปลายยื่นและน้ำหนักบรรทุก	211
7.50	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	211
7.51	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	212
7.52	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	212
7.53	คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	226
7.54	คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	226
7.55	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	227
7.56	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	231
7.57	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	234
7.58	คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	243
7.59	คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	244
7.60	คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	245
7.61	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	198
7.62	คานคานต่อเนื่องน้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน	198
7.63	คานคานต่อเนื่องน้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน	199
7.64	น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน	199
7.65	น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคาน ความยาวคานเท่ากัน	211
7.66	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	211
7.67	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	212
7.68	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	212

สารบัญภาพประกอบ (ต่อ)

หน่วย	ภาพประกอบที่		หน้า
หน่วยที่ 7	7.69	คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก	198
	7.70	คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก	198

7.71 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก 199
7.72 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก 199
7.73 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก 211

ข้อสอบกลางภาคเรียน

1 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) 198
2 คานอยู่ในลักษณะสมดุล 198

ข้อสอบปลายภาคเรียน

1 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก 198
2 คานยื่น (Cantilever Beam) 198

หน่วยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง

ภาพที่ 1.1 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
ภาพที่ 1.2 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
ภาพที่ 1.3 ทฤษฎีของลามี
ภาพที่1.4 การสมดุลของแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
ภาพที่ 1.5 แรงตามแนวแกน
ภาพที่ 1.6 แรงเฉือนเป็นบวก
ภาพที่ 1.7 แรงเฉือนเป็นลบ
ภาพที่ 1.8 โมเมนต์ดัด (Bending moment)
ภาพที่ 1.9 โมเมนต์เป็นบวก
ภาพที่ 1.10 โมเมนต์เป็นลบ
ภาพที่ 1.11 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 1.12 คานรับแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 1.13 รถบรรทุกแบบ H
ภาพที่ 1.14 รถบรรทุกแบบ H-S
ภาพที่ 1.15 รถบรรทุกแบบ H-S
ภาพที่ 1.16 (ก) , (ข) ภาพของโครงสร้างจริง (ค), (ง) และภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์
ภาพที่ 1.17 ฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hing)
ภาพที่ 1.18 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว
ภาพที่ 1.19 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)
ภาพที่ 1.20 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 1.21 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายที่มา
ภาพที่ 1.22 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย
ภาพที่ 1.23 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายสองข้าง
ภาพที่ 1.24 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)
ภาพที่ 1.25 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 1.26 คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam)

ภาพที่ 1.27 โครงแบบดีเทอมิเนท
ภาพที่ 1.28 โครงแบบดีเทอมิเนท
ภาพที่ 1.29 โครงแบบอินดีเทอมิเนท
ภาพที่ 1.30 ลักษณะโครงสร้างที่เป็นเงื่อนไขพิเศษ
ภาพที่ 1.31 คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)
ภาพที่ 1.32 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)
ภาพที่ 1.33 คานธรรมดายึดแน่นและปลายยื่น
ภาพที่ 1.34 คานยึดแน่นลักษณะโครงสร้างพิเศษ
ภาพที่ 1.35 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)
ภาพที่ 1.36 โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลม
ภาพที่ 1.37 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ภาพที่ 1.38 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ภาพที่ 1.39 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ภาพที่ 1.40 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)
ภาพที่ 1.42 คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)
ภาพที่ 1.43 คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Beam)
ภาพที่ 1.44 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)
ภาพที่ 1.45 คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Simple Beam)
ภาพที่ 1.46 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)
ภาพที่ 1.47 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)
ภาพที่ 1.48 โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลม
ภาพที่ 1.49 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ภาพที่ 1.50 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ภาพที่ 1.51 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)

หน่วยที่ 2 แรงปฏิกิริยา

ภาพที่ 2.1 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
ภาพที่ 2.2 ฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hing)
ภาพที่ 2.3 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว
ภาพที่ 2.4 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)
ภาพที่ 2.5 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)
ภาพที่ 2.6 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Pinned Joint)
ภาพที่ 2.7 ฐานรองรับแบบยึดรั้ง (Rigid Joint)
ภาพที่ 2.8 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 2.9 การเขียน Free Body Diagram
ภาพที่ 2.10 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.11 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.12 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.13 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.14 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.15 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.16 การเขียน Free Body Diagram
ภาพที่ 2.17 คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.18 คานยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.19 คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.20 คานต่อเนื่องอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.21 เขียนแผนภาพอิสระของคานต่อเนื่อง
ภาพที่ 2.22 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.23 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.24 โครงสร้างโดมโค้งอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.25 โครงสร้างโดมโค้งอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.26 โครงสร้างข้อแข็ง

ภาพที่ 2.27 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 2.28 การเขียน Free Body Diagram
ภาพที่ 2.29 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.30 โครงสร้างหลังคาถัก (Truss)
ภาพที่ 2.31 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.32 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.33 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.35 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 2.36 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 2.37 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 2.38 คานยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 2.39 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 2.40 คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล

หน่วยที่ 3 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดในคาน

ภาพที่ 3.1 ฐานรองรับแบบยึดหมุน
ภาพที่ 3.2 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว
ภาพที่ 3.3 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)
ภาพที่ 3.4 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 3.5 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายที่มา
ภาพที่ 3.6 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย
ภาพที่ 3.7 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายสองข้าง
ภาพที่ 3.8 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)
ภาพที่ 3.9 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 3.10 คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam)
ภาพที่ 3.11 แรงเฉือน (Shearing Force)
ภาพที่ 3.12 ภาพตัด c-c แรงเฉือน (Shearing Force)
ภาพที่ 3.13 ภาพตัด c-c แรงเฉือน (Shearing Force)
ภาพที่ 3.14 แรงเฉือนเป็นบวก
ภาพที่ 3.15 แรงเฉือนเป็นลบ
ภาพที่ 3.16 โมเมนต์ดัด (Bending moment)
ภาพที่ 3.17 โมเมนต์เป็นบวก
ภาพที่ 3.18 โมเมนต์เป็นลบ
ภาพที่ 3.19 โมเมนต์เป็นลบ
ภาพที่ 3.20 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก
ภาพที่ 3.21 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก
ภาพที่ 3.22 คานมีแรงแบบจุดกระทำตรงกลาง
ภาพที่ 3.23 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 3.24 คานมีแรงแบบจุดกระทำแต่ไม่อยู่ตรงกลาง
ภาพที่ 3.25 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 3.26 คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน

ภาพที่ 3.27 คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน
ภาพที่ 3.28 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.29 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.30 คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับ
ภาพที่ 3.31 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 3.32 คานมีแรงคู่ควบกระทำ
ภาพที่ 3.33 คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับและน้ำหนักลงสม่ำเสมอ
ภาพที่ 3.34 คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับและน้ำหนักลงสม่ำเสมอ
ภาพที่ 3.35 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 3.36 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 3.37 คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ
ภาพที่ 3.38 คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ
ภาพที่ 3.39 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.40 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 3.41 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.42 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.43 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.44 การเขียน Free Body Diagram
ภาพที่ 3.45 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.46 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.47 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.48 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.49 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.50 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.51 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.52 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.53 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.54 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.55 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ภาพที่ 3.56 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.57 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.58 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.59 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.60 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.61 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.62 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.63 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์
ภาพที่ 3.64 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.65 คานอยู่ภายใต้แรงรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 3.66 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.67 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก
ภาพที่ 3.68 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก
ภาพที่ 3.69 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.70 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.71 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.72 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.73 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.74 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.75 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 3.76 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.77 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.78 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 3.79 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

หน่วยที่ 4 เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน

ภาพที่ 4.1 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.3 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.4 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.5 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.6 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.7 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.8 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.9 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.10 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.10 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.11 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ภาพที่ 4.12 คานเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.13 คานใช้สำหรับเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.14 คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.15 คานอย่างง่ายเพื่อกหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.16 คานของเครนเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.17 เส้นอิทธิพลจากน้ำหนักเคลื่อนที่ของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.18 คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.19 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.20 คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.21 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.22 คานอย่างง่ายสำหรับเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.23 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.24 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.25 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.26 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ภาพที่ 4.27 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.26 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.28 เส้นอิทธิพลของแรงดัดที่จุด y-y
ภาพที่ 4.29 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.30 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.31 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.32คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.33 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.34 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.35 ชิ้นส่วนของโครงถักสะพาน
ภาพที่ 4.36โครงข้อหมุนแบบแพร์ท
ภาพที่ 4.37 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.38 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.39 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ภาพที่ 4.40 โครงข้อแข็ง (Rigid Farm)
ภาพที่ 4.41 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.42 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.43 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.44 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.45 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ภาพที่ 4.46 คานช่วงเดียว (Simple Beam)
ภาพที่ 4.47 เส้นอิทธิพลของแรงดัดที่จุด y-y
ภาพที่ 4.48 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 4.49 คานอย่างอยาก (Determinate Beam)
ภาพที่ 4.50 คานสะพานเพื่อห้าส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 4.51 คานสะพานเพื่อห้าส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
ภาพที่ 4.52โครงข้อหมุนแบบแพร์ท

หน่วยที่ 5 แรงภายในในชิ้นส่วนโครงข้อหมุน

ภาพที่ 5.1 แสดงโครงสร้างถักแต่ละรูปทรง
ภาพที่ 5.2 โครงสร้างถักแบบโฮว์
ภาพที่ 5.3 แสดงโครงถักแบบโครงหลังคา
ภาพที่ 5.4 แสดงโครงถักแบบสะพาน
ภาพที่ 5.5 แสดงแนวแรงของชิ้นส่วน
ภาพที่ 5.6 แสดงพฤติกรรมของโครงถักเมื่อรับแรง
ภาพที่ 5.7 แสดงพฤติกรรมของโครงถักกรณีที่ไม่มีชิ้นส่วน CG
ภาพที่ 5.8 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.9 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.10 โครงสร้างหลัง0898418408คาถักแบบโฮว์
ภาพที่ 5.11 โครงสร้างถักแบบวอร์เรน
ภาพที่ 5.12 โครงสร้างถักแบบวอร์เรน
ภาพที่ 5.13 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.14 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.15 โครงสร้างป้ายโฆษณา
ภาพที่ 5.16 โครงสร้างถักแบบโฮว์
ภาพที่ 5.17 โครงสร้างถักแบบโฮว์
ภาพที่ 5.18 โครงสร้างถักแบบแพรท
ภาพที่ 5.19 โครงสร้างถักแบบวอร์เรน
ภาพที่ 5.20 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์
ภาพที่ 5.21 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.22 โครงสร้างถักแบบวอร์เรนมีค้ำยันในแนวดิ่ง
ภาพที่ 5.23 โครงสร้างถักแบบโฮว์
ภาพที่ 5.24 โครงสร้างถักแบบโฮว์
ภาพที่ 5.25 โครงสร้างถักแบบแฟน
ภาพที่ 5.26 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.27 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม

ภาพที่ 5.28 โครงสร้างถักแบบวอร์เรนค้ำยันในแนวดิ่ง
ภาพที่ 5.29 โครงสร้างถักแบบแพรท
ภาพที่ 5.30 โครงสร้างถักแบบแพรท
ภาพที่ 5.31 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.32 โครงสร้างรูปถักสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ภาพที่ 5.33 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.34 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ภาพที่ 5.35 โครงสร้างถัก
ภาพที่ 5.36 โครงสร้างถัก
ภาพที่ 5.37 โครงสร้างถัก

หน่วยที่ 6 การโก่งตัวของโครงสร้าง

ภาพที่ 6.1 คานยื่นและคานอย่างง่าย (Cantilever and Continuous Beam)
ภาพที่ 6.2 คานยื่นและคานอย่างง่าย (Cantilever and Continuous Beam)
ภาพที่ 6.3 โครงข้อแข็ง (Rigid Flame)
ภาพที่ 6.4 โครงข้อแข็ง (Rigid Flame)
ภาพที่ 6.5 คานช่วงเดียวธรรมดา
ภาพที่ 6.6 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 6.7 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 6.8 ภาพแสดงเครื่องหมายและทิศทางของ θ_{BA} และ t_{BA}
ภาพที่ 6.9 พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต
ภาพที่ 6.10 พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต
ภาพที่ 6.11 พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต
ภาพที่ 6.12 คานจริงและคานเสมือน
ภาพที่ 6.13 คานธรรมดาและคานยื่น
ภาพที่ 6.14 คานธรรมดาและคานยื่น
ภาพที่ 6.15 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 6.16 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 6.17 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.18 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.19 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.20 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.21 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 6.22 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ภาพที่ 6.23 คานธรรมดา (Simple Beam)
ภาพที่ 6.24 คานธรรมดา (Simple Beam)
ภาพที่ 6.25 การโก่งตัวของคานยื่น

ภาพที่ 6.26 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.27 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.28 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.29 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.30 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.31 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ภาพที่ 6.32 คานยื่น
ภาพที่ 6.33 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.34 คานยื่น
ภาพที่ 6.35 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.36 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.37 คานจริง (Real Beam)
ภาพที่ 6.38 คานเสมือน (Conjugate Beam)
ภาพที่ 6.39 หลักการของวิธีคานเสมือน
ภาพที่ 6.40 หลักการของวิธีคานเสมือน
ภาพที่ 6.41 คานจริงและคานเสมือน
ภาพที่ 6.42 คานจริงและคานเสมือน
ภาพที่ 6.43 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง
ภาพที่ 6.44 แนวการโก่งตัวของคานเสมือน
ภาพที่ 6.45 คานอย่างง่าย
ภาพที่ 6.45 คานอย่างง่าย
ภาพที่ 6.47 คานประกอบ
ภาพที่ 6.48 คานประกอบ
ภาพที่ 6.49 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง
ภาพที่ 6.50 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง
ภาพที่ 6.51 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง
ภาพที่ 6.52 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง
ภาพที่ 6.53 คานยื่น (Cantilever Beam)

ภาพที่ 6.54 คานช่วงเดียวธรรมดา
ภาพที่ 6.57 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.58 การโก่งตัวของคานยึดแน่น
ภาพที่ 6.59 คานยื่น (Cantilever Beam)
ภาพที่ 6.60 คานช่วงเดียวธรรมดา
ภาพที่ 6.61 คานช่วงเดียวธรรมดา
ภาพที่ 6.57 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.57 การโก่งตัวของคานยื่น
ภาพที่ 6.64 แนวการโก่งตัวของธรรมดาและคานยื่น

หน่วยที่ 7 การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ

ภาพที่ 7.1 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน
ภาพที่ 7.2 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน
ภาพที่ 7.3 น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน
ภาพที่ 7.4 น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคานความยาวคานเท่ากัน
ภาพที่ 7.5 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.6 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.7 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.8 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.9 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.10 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.11 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.12 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.13 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.14 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.15 คานช่วงเดียวอย่างง่ายและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.16 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.17 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.18 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.19 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.20 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.21 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.22 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.23 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.24 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.25 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.26 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ภาพที่ 7.27 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.28 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.29 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.30 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.31 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.32 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.33 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.34 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.35 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.36 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.37 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.38 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.39 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.40 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.41 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.42 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.43 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.44 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.45 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.46 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.47 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.48 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.49 คานช่วงเดียวปลายยื่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.50 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.51 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.52 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.53 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.54 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.55 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.56 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ภาพที่ 7.57 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.58 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.59 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.60 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.61 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.62 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน
ภาพที่ 7.63 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน
ภาพที่ 7.64 น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน
ภาพที่ 7.65 น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคานความยาวคานเท่ากัน
ภาพที่ 7.66 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.67 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.68 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.69 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.70 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.71 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ภาพที่ 7.72 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

หน่วยที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับโครงสร้าง

เนื้อหาสาระ

1.1 บทนำ

1.2 คำจำกัดความของแรง

1.3 สมการของการสมดุล

1.4 น้ำหนักบรรทุก

1.5 การเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์

1.6 ชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับ

1.7 ประเภทของคาน

1.8 แบบของโครงสร้าง

1.9 การวิเคราะห์หาตัวเกิน

1.10 สมมุติฐานในการวิเคราะห์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1.1 อธิบายความหมายของลักษณะของโครงสร้างและแรงแบบต่าง ๆ ได้

1.2 อธิบายสมการของการสมดุลได้

1.3 อธิบายน้ำหนักบรรทุกได้

1.4 อธิบายการเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์ได้

1.5 สามารถเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์ได้

1.5 อธิบายสัญลักษณ์ของจุดรองรับได้

1.6 บอกความหมายของชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับได้

1.7 อธิบายประเภทของคานได้

1.8 บอกความหมายของประเภทของคานได้

1.9 อธิบายแบบของโครงสร้างได้

1.10 บอกความหมายของแบบของโครงสร้างได้

1.11 บอกความหมายและสามารถหาการวิเคราะห์หาตัวเกินได้

1.12 บอกความหมายและสามารถปฏิบัติตามขั้นตอนสมมุติฐานในการวิเคราะห์ทฤษฎีโครงสร้างได้

แนวคิดในการสอน

วิชาทฤษฎีโครงสร้างเป็นพื้นฐานที่สำคัญทางด้านวิศวกรรม ผู้เรียนจะต้องเข้าใจเนื้อหาหลักการเบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีโครงสร้างเป็นอย่างดี จะสามารถนำความรู้ที่ได้รับไปบูรณาการใช้ในการเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับนักเรียนที่กำลังศึกษาในสาขาที่เกี่ยวข้องและในรายวิชาที่สอดคล้อง เพื่อจะได้ใช้เป็นเป็นข้อมูลพื้นฐานในเรียนรู้ต่อไป สำหรับทฤษฎีโครงสร้างใช้หาข้อมูลพื้นฐานทางด้านวิศวกรรมเพื่อวางแผนทางด้านวิศวกรรม 2 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นแรกเป็นการวางแผนรูปแบบของโครงสร้าง เพื่อให้รูปโครงสร้างมีความมั่นคงแข็งแรง ทนทาน มีความปลอดภัยและมีความเหมาะสม มีความสะดวกในการใช้งาน ขั้นตอนต่อมาเป็นการเลือกขนาดและการให้รายละเอียดของโครงสร้างแต่ละส่วนตามความต้องการของขั้นแรก รวมทั้งเลือกชนิดของวัสดุที่จะนำมาก่อสร้าง ทำให้เกิดเกิดความปลอดภัย มีความประหยัด และในขณะเดียวกันผู้ที่จะออกแบบจะต้องคำนวณหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ตลอดจนหน่วยแรงที่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจากน้ำหนักบรรทุกที่โครงสร้างจะต้องรับหรือต้านทาน การวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวนับว่าเป็นสิ่งที่สำคัญและจำเป็นในการออกแบบ เพราะการวิเคราะห์ที่ได้ผลไม่ถูกต้องจะเป็นเหตุให้การออกแบบผิดพลาดซึ่งเป็นอันตรายอย่างยิ่ง ฉะนั้นผู้ออกแบบโครงสร้างจะต้องศึกษาเรียนรู้และเข้าใจถึงหลักการเกี่ยวกับทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างให้ดีเสียก่อนเสมอก่อนที่จะไปออกแบบโครงสร้าง ในการวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวนับว่าเป็นสิ่งที่สำคัญที่นักศึกษาจะได้นำไปเรียนในรายวิชาที่เกี่ยวข้องหรือในระดับที่สูงขึ้นและใช้ในการรออกแบบโครงสร้างต่อไปดังนั้นในหน่วยนี้จะเรียนรู้เกี่ยวกับคำจำกัดความของแรง สมการของการสมดุล น้ำหนักบรรทุก การเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์ ชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับ ประเภทของคาน แบบของโครงสร้างประเภทของคาน การวิเคราะห์หาตัวเกิน และสมมุติฐานในการวิเคราะห์ เป็นต้น

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

1.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

1.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

1.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

1.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

1.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

1.1 สื่อ Power Point

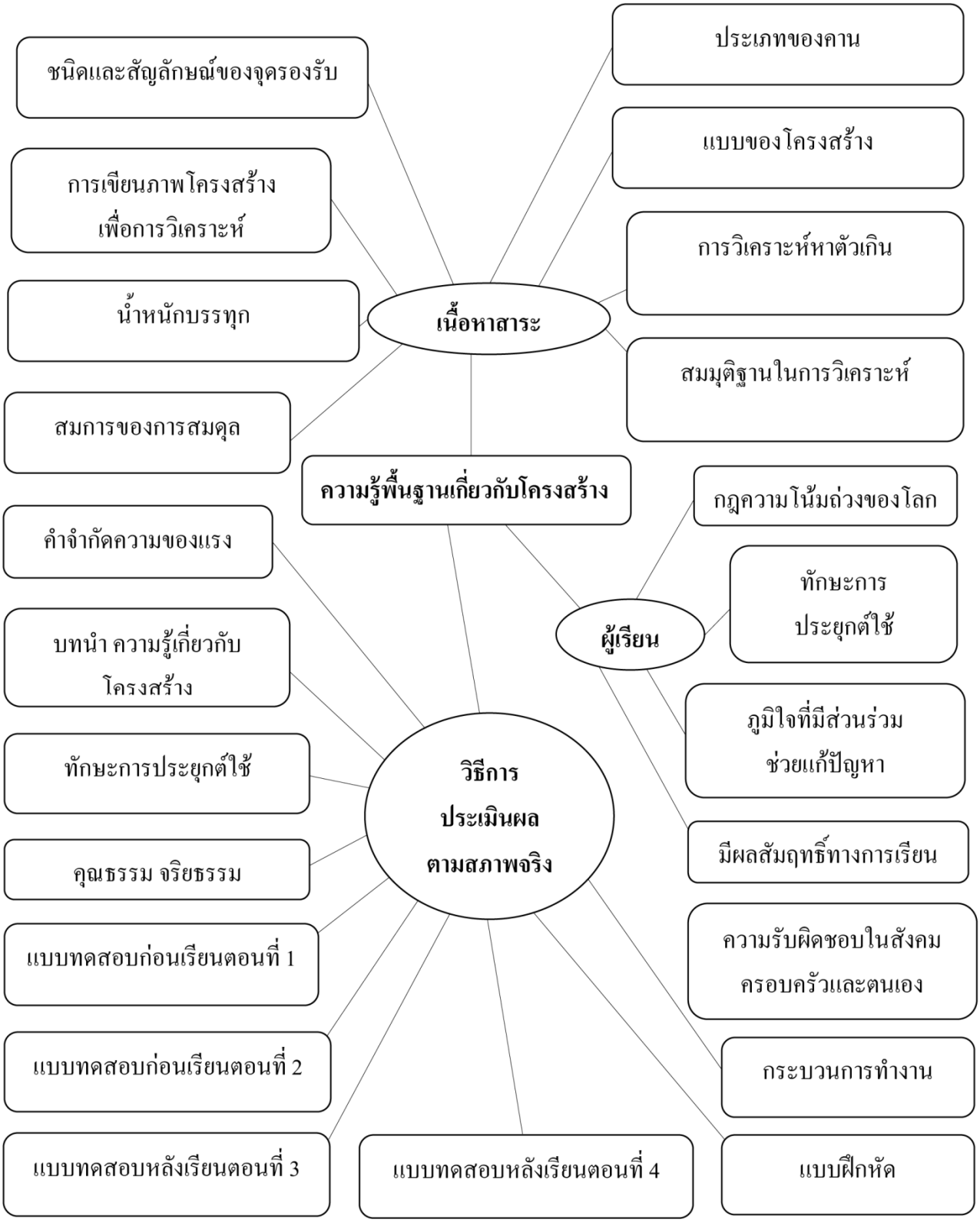
1.2 สื่อแผ่นใส

1.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

1.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 1 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. แรงลัพธ์ (Resultant Force) หมายถึงแรงที่กระทำต่อวัตถุที่ขนานกันเรียกว่า แรงคู่ควบ (Coupe)

..... 2. ส่วนประกอบของแรงหรือมากกว่าเขียนแทนแรงเรียกว่าโมเมนต์ของแรง

..... 3. แรงปฏิกิริยา (Reaction) แรงที่โต้ตอบหรือแรงที่ตรงกันข้ามกับแรงที่มากระทำต่อวัตถุ

..... 4. แรงเฉือนหมายถึงแรงต้านทานภายนอกโครงสร้างที่พยายามเฉือนให้โครงสร้างให้แยกออกจากกัน

..... 5. แรงที่พยายามทำให้วัตถุหมุนทำให้โครงสร้างโก่งตัวที่เกิดจากการกระทำของแรงภายในและแรงภายนอกคือโมเมนต์ดัด

..... 6. แรงรั้ง (Centripetal Force) แรงอัดที่เข้ามายังศูนย์กลางของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่อยู่และพยายามจะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรง

..... 7. วัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำกบวัตถุนั้นหรือวัตถุนั้นหรือวัตถุไม่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมคือพยายามการสมดุล (Equilibrium)

..... 8. เครื่องหมายและทิศทางเมื่อแรงยืดออกเรียกว่าแรงอัด (Compressive)

..... 9. น้ำหนักบรรทุกตายตัวเป็นน้ำหนักบรรทุกที่มีขนาดและไม่มีตำแหน่งที่แน่นอนไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาด เช่น น้ำหนักพื้น คานและเสา เป็นต้น

..... 10. น้ำหนักจรไม่ได้เคลื่อนที่ ได้แก่ รถไฟ รถยนต์ และแรงลม เป็นต้น

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. น้ำหนักบรรทุกคงที่ (Dele Load) คือข้อใด
   ก. น้ำหนักพื้น น้ำหนักฝ้าเพดาน น้ำหนักนักศึกษา
   ข. อาคารสำนักงานองค์การบริหารส่วนตำบล น้ำหนักรถยนต์ และน้ำหนักรถไฟ น้ำหนักโต๊ะ และเก้าอี้ น้ำหนัก
   ค. เครื่องมือทดสอบวัสดุก่อสร้าง กระเบื้องปูพื้น และน้ำหนักตู้ชั้นวางหนังสือ
   ง. น้ำหนักพื้นคอนกรีตเสริมเหล็ก น้ำหนักของโครงสร้างของอาคารโรงเรียน และน้ำหนักผนัง
2. น้ำหนักบรรทุกจร (Live Load) คือข้อใด
   ก. โครงหลังคา พื้นไม้ และวัสดุมุงหลังคา
   ข. อิฐมวลเบา ทองเหลือง และไม้เนื้อแข็ง
   ค. น้ำหนักเก้าอี้ น้ำหนักนักศึกษา และน้ำหนักหนังสือเรียน
   ง. น้ำหนักเก้าอี้ น้ำหนักวัสดุมุงและน้ำหนักอิฐมวลเบา
3. สำหรับจุดรองรับข้อใดคือความหมายจุดยึดแน่น (Fixed Support) คือข้อใด
   ก. มีจำนวน 3 แรงและ 1 โมเมนต์
   ข. มีจำนวน 2 แรงและ 1 โมเมนต์
   ค. มีจำนวน 1 แรงและ 2 โมเมนต์
   ง. มีจำนวน 2 แรงและ 2 โมเมนต์
4. ความหมายของคานอย่าง่าย (Simple Beam) คือข้อใด
   ก. คานชนิดนี้จะรองรับด้วยสลักยึดที่ตำแหน่งตรงกลางของคาน
   ข. คานชนิดนี้จะมีปลายด้านใดด้านหนึ่งหรือสองข้างยื่นออก
   ค. คานชนิดนี้จะรองรับด้วยลูกกลิ้งหรือสลักยึดที่ตำแหน่งของปลายคานทั้งสอง
   ง. ข้อ ก และ ค ถูกต้อง
5. ข้อใดคือความหมายของคานต่อเนื่อง (Continuous Beam) คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่ต่อเนื่องกันตั้งแต่ 1 ช่วงขึ้นไป
   ข. เป็นคานที่มีจุดรองรับตั้งแต่ 2 ช่วงขึ้นไป
   ค. มีจุดรองรับตั้งแต่ 12 จุดขึ้นไป
   ง. เป็นคานที่มีความต่อเนื่องกันตั้งแต่ 2 ช่วงขึ้นไปและมีจุดรองรับ 2 ช่วงขึ้นไป

6. คานยื่น (Cantilever Beam) ที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งยื่นออกและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นแบบยึดแน่น
   ข. เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือสองด้านยื่น ถูกยึดแน่นฝังในที่รองรับชั่วคราว
   ค. เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือสองด้านยื่น ถูกยึดแน่นฝังในที่รองรับอย่างถาวร
   ง. ข้อ ก และ ค ถูกต้อง
7. ความหมายของคานปลายยึดแน่น (Fixed Beam) คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่มีปลายข้างเดียวไม่สามารถหมุนได้
   ข. เป็นคานที่มีปลายข้างเดียวสามารถหมุนได้
   ค. เป็นคานที่มีปลายสองข้างไม่สามารถหมุนได้
   ง. เป็นคานที่มีปลายทั้งสองข้างสามารถหมุนได้
8. โครงสร้างที่สามารถวิเคราะห์หาค่าปฏิกิริยาต่างๆ ทั้งภายใน ภายนอกและแรงภายในโครงสร้างได้ คือข้อใด
   ก. โครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างดีเทอมินท
   ข. โครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างอินดีเทอมิเนท
   ค. โครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างอินดีเทอมิเนท
   ง. โครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างดีเทอมิเนท
9. โครงสร้างที่ไม่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยาได้ทั้งภายในและภายนอกได้หรือทั้งสองอย่าง คือข้อใด
   ก. โครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างดีเทอมินท
   ข. โครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างอินดีเทอมิเนท
   ค. โครงสร้างอย่างง่ายหรือโครงสร้างอินดีเทอมิเนท
   ง. โครงสร้างอย่างยากหรือโครงสร้างดีเทอมิเนท
10. ความหมายของโครงถักหรือโครงข้อหมุน (Truss) ที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. น้ำหนักบรรทุกจะกระทำตรงกลางโครงถักได้
   ข. น้ำหนักบรรทุกจรกระทำตรงจุดต่อเท่านั้น
   ค. น้ำหนักบรรทุกหรือแรงจะกระทำตรงฐานรองรับเท่านั้น
   ง. ถูกทุกข้อ

1.1 บทนำ

โครงสร้างเป็นสิ่งที่มนุษย์ออกแบบและก่อสร้างขึ้นมา เพื่อใช้เป็นที่อยู่อาศัย กั้น บัง หรือคลุมและให้รับแรงหรือน้ำหนักบรรทุกต่างๆ ตามต้องการ แต่ละชิ้นส่วนจะต้องมีความสามารถรับหน่วยแรงหรือน้ำหนักบรรทุกต่างๆ ได้โดยปลอดภัยตามที่ต้องการ ในการออกแบบเพื่อกำหนดขนาดหน้าตัดและวัสดุที่ใช้ในการก่อสร้าง สำหรับโครงสร้างที่เห็นกันโดยทั่วไป ได้แก่ สะพาน อาคาร หอประชุม อัฒจรรย์ ตอม่อ เขื่อน โรงมหรสพ ถนน หอสูง สนามบิน เป็นต้น ซึ่งได้จากการประกอบแต่ละส่วนของโครงสร้างเข้าด้วยกัน แต่ละส่วนของโครงสร้างดังกล่าวมีลักษณะเป็นแผ่นแบบบาง (Plate) ท่อนหรือแท่ง (Bars) หรือแผ่นโค้ง (Shells) เป็นต้น

ในการออกแบบโครงสร้างทางด้านวิศวกรรม แบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน คือ ขั้นแรกเป็นการวางแผนรูปแบบของโครงสร้าง เพื่อให้รูปโครงสร้างมีความมั่นคงแข็งแรง ทนทาน มีความปลอดภัย และมีความเหมาะสม มีความสะดวกในการใช้งาน ขั้นตอนต่อมาเป็นการเลือกขนาดและการให้รายละเอียดของโครงสร้างแต่ละส่วนตามความต้องการของขั้นแรก รวมทั้งเลือกชนิดของวัสดุที่จะนำมาก่อสร้าง ทำให้เกิดเกิดความปลอดภัย มีความประหยัด และในขณะเดียวกันผู้ที่จะออกแบบจะต้องคำนวณหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด ตลอดจนหน่วยแรงที่เกิดขึ้นอันเนื่องมาจากน้ำหนักบรรทุกที่โครงสร้างจะต้องรับหรือต้านทาน การวิเคราะห์โครงสร้างดังกล่าวนับว่าเป็นสิ่งที่สำคัญและจำเป็นในการออกแบบ เพราะการวิเคราะห์ที่ได้ผลไม่ถูกต้องจะเป็นเหตุให้การออกแบบผิดพลาดซึ่งเป็นอันตรายอย่างยิ่ง ฉะนั้นผู้ออกแบบโครงสร้างจะต้องศึกษาเรียนรู้และเข้าใจถึงหลักการเกี่ยวกับทฤษฎีการวิเคราะห์โครงสร้างให้ดีเสียก่อนเสมอก่อนที่จะไปออกแบบโครงสร้าง

สำหรับวิชาทฤษฎีโครงสร้างจะกล่าวถึงหลักและวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างแบบธรรมดาเมื่อรับน้ำหนักบรรทุกอยู่กับที่ และแบบเคลื่อนที่ได้ ส่วนโครงสร้างแบบธรรมดานี้จะรวมหมายถึงโครงสร้างดีเทอมิเนทซึ่งค่าของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด และหน่วยแรง สามารถคำนวณได้แน่นอนโดยอาศัยกฎของแสตติคส์หรือสถิตยศาสตร์ อย่างไรก็ดีโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนทซึ่งต้องอาศัยการวิเคราะห์โครงสร้างชั้นสูงก็ได้ต้องใช้กฎของแสตติคส์เช่นกัน ดังนั้นกฎของสแตติคส์หรือสถิตยศาสตร์จึงนับได้ว่าเป็นสิ่งสำคัญเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์โครงสร้างทางด้านวิศวกรรม

1.2 คำจำกัดความของแรง

ส่วนคำจำกัดความของแรงที่มากระทำต่อโครงสร้าง ดังนี้

1.2.1 แรง (Force) หมายถึง สิ่งที่พยายามทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ หรือหยุดนิ่ง แรงดังกล่าว อาจเป็นแรงดึง แรงอัด หรือแรงผลักต่อวัตถุ แรงต้องประกอบด้วยสิ่งต่างๆ ต่อไปนี้คือ 1) ตำแหน่งของแรงกระทำ 2) แนวแรงที่กระทำ และ3) ขนาดของแรง เป็นต้น รายละเอียด ดังนี้

1.2.1.1 ตำแหน่งของแรง หมายถึง ความลาดเอียงของแนวแรงที่กระทำ

1.2.1.2 แนวแรงที่กระทำ หมายถึง การกระทำของแรงเข้าหาหรือเคลื่อนที่ออกจากวัตถุ ฉะนั้นแรงจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ ทั้งนี้เพระว่าแรงมีทั้งขนาดและทิศทาง ดังนั้นแรงใดๆ ก็ตาม สามารถเขียนแทนได้ด้วย เส้น ที่เคลื่อนเข้าหาหรืออกจากจุดที่กระทำ มีความยาวของเส้น เป็นสิ่งแสดงขนาดของแรงตามมาตราส่วนของแรง (Force Scale) ความลาดเอียงของเส้น แสดงถึงแนวที่กระทำ หัวลูกศรบนเส้นนี้เป็นเครื่องแสดงทิศทางของการกระทำ รายละเอียด ดังนี้

1) ปริมาณกลศาสตร์ที่กำหนดเฉพาะขนาด (Magnitude) เช่น มวล ความยาว เวลาความหนาแน่น พลังงาน และอุณหภูมิ เป็นต้น ปริมาณเหล่านี้เราสามารถจะนำมารวมกันทางพีชคณิตได้เลย แต่การรวมนี้จะต้องรวมในกลุ่มที่เป็นประเภทเดียวกันเท่านั้น ปริมาณเหล่านี้จะเห็นได้ซึ่งเราเรียกว่าเป็นการกำหนดแต่เฉพาะขนาดเท่านั้น ก็มีความหมายชัดเจนเข้าใจได้ ปริมาณเหล่านี้จึงเรียกว่าเป็นปริมาณสเกลาร์ (Scalar Guantition) ปริมาณอีกจำนวนหนึ่งจะต้องกำหนดทั้งขนาด (Magnitude) และทิศทาง (Direction) จึงจะมีความหมายที่สมบูรณ์ เช่น ปริมาณจำนวนแรง ความเร็ว และความเร่ง เป็นต้น ปริมาณเหล่านี้ถ้ากำหนดเฉพาะขนาดจะไม่ให้ความหมายที่เพียงพอจำเป็นจะต้องมีทิศทางกำกับด้วย ปริมาณเหล่านี้เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (Vector Guantition)

2) ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์เป็นส่วนหนึ่งของวิชาฟิสิกส์ สามารถแบ่งได้เป็น 4 ประเภท ได้แก่ เวลา มวลสาร ขอบเขต และแรง เป็นต้น มีรายละเอียด ดังนี้

(1) เวลา (Time) คือ ปริมาณที่ใช้วัดช่วงเหตุการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้น หน่วยของเวลา คือ วินาที

(2) มวลสาร (Mass) คือ ปริมาณที่ใช้วัดเนื้อที่ของวัตถุ วัดการต้านทานการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับน้ำหนักหารด้วยค่าอัตราความเร่ง

(3) ขอบเขต (Boundary) คือ ปริมาณของขอบเขตที่จะขยายออกไปได้ทุกทิศทาง

(4) แรง (Force) คือ ปริมาณที่ใช้วัดในการกระทำของแรงภายนอกที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของระบบทางกายภาพโดยแรงเป็นผลมาจากการใช้พลังงาน และจะพยายามดึงหรือผลักให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวทิศทางของแรงนั้นๆ

ดังนั้นแรงต่างๆ ซึ่งมีแนวที่กระทำมาพบหรือรวมกันที่จุดเดียวกันเรียกว่า Concurrent Force ถ้าแรงต่างๆ ดังกล่าวไม่มีแนวที่กระทำมาพบกันที่จุดเดียวกันเรียกแรงนั้นว่า Non-Concurrent Force

แต่ถ้าแรงที่อยู่ในระนาบเดียวกันเรียกว่า Co-Planer Force

ในขณะเดียวกันผลคูณของขนาดของแรงกับระยะตั้งฉากกับแนวแรงจากจุดหนึ่งจุดใดเรียกว่า โมเมนต์ของแรง ณ จุดนั้น

สำหรับแรง 2 แรงที่ขนาดกัน มีขนาดของแรงเท่ากัน แต่มีทิศทางกระทำตรงกันข้าม เรียกว่า แรงคู่ควบ (Coupe) ขนาดของแรงคู่ควบหรือค่าของโมเมนต์คู่ควบนี้ ได้จากผลคูณของแรงใดแรงหนึ่งกับระยะตั้งฉากระหว่างแรงทั้งสองนั้น

1.2.2 แรงลัพธ์ (Resultant Force) หมายถึง แรงที่แทนแรงต่างๆ ที่กระทำต่อวัตถุ แรงที่ด้านกลับเพื่อให้วัตถุอยู่ในสภาวะสมดุล จะต้องมีขนาดเท่ากับแรงลัพธ์นี้แต่อยู่ในทิศทางตรงกันข้าม

และส่วนประกอบของแรง (Components of Force) แรง 2 แรงหรือมีมากกว่าที่เขียนแทนแรง เรียกว่า “**ส่วนประกอบของแรง**”

1.2.3 แรงปฏิกิริยา (Reaction) หมายถึง แรงที่โต้ตอบหรือแรงที่ตรงกันข้ามกับแรงที่มากระทำต่อวัตถุ แรงปฏิกิริยาที่กระทำต่อโครงสร้างสามารถแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือแรงกระทำ (Active Force) เนื่องมาจากน้ำหนักของโครงสร้างเองหรือน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง ชนิดที่ 2 แรงต้านทานตรงฐานรองรับ (Supporting Force) เพื่อให้เกิดการสมดุล แรงชนิดนี้เรียกว่า แรงปฏิกิริยา (Reaction Force) ทั้งนี้เพราะว่าเป็นแรงต้านทานที่มากระทำ แรงปฏิกิริยาดังกล่าวยังหมายถึง แรงและโมเมนต์ดัด ฉะนั้นแรงปฏิกิริยาชนิดนี้ จึงต้องมีทั้งขนาด ทิศทางและตำแหน่งที่กระทำ

1.2.4 แรงเฉือน (Shear Force) หมายถึง แรงต้านทานภายในโครงสร้าง ที่พยายามเฉือนส่วนของโครงสร้างให้ขาดแยกออกจากกัน ทิศทางของแรงเฉือนจะขนานกับผิวของหน้าตัดของโครงสร้างต่างๆ แรงเฉือนที่หน้าตัดใดๆ หาค่าได้จากสมการสมดุลของแรง จากน้ำหนักบรรทุก แรงปฏิกิริยา และแรงภายใน ในทิศทางตั้งฉากกับส่วนของโครงสร้างที่หน้าตัดนั้นๆ สัญลักษณ์ที่ใช้ V เป็นต้น

1.2.5 โมเมนต์ดัด (Bending Moment) หมายถึง โมเมนต์ที่พยายามดัด-หมุน ส่วนของโครงสร้างให้เกิดการโก่งตัว โมเมนต์ดัดที่หน้าตัดใดๆหาค่าได้จากผลรวมทางเลขาพีชคณิตของโมเมนต์ดัดที่เกิดจากการกระทำของแรงภายในและภายนอกทางด้านใด ด้านหนึ่งของหน้าตัดนั้นๆ รอบแกนที่ตั้งได้ฉากกับระนาบของแรงที่ผ่านจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัดนั้นๆ มีค่าเท่ากับศูนย์ ใช้สัญลักษณ์ M

1.2.6 แรงตามแนวแกน (Axial Force) หมายถึงแรงที่พยายามกดหรือดึงเพื่อทำให้โครงสร้างหดตัวหรือยืดออก แรงตามแนวแกนนี้จะกระทำในทิศทางขนานกับแนวแรงของโครงสร้างนั้น ใช้สัญลักษณ์ H หรือ X

1.2.7 แรงกระทำด้านข้าง (Lateral Force) หมายถึงแรงกระทำด้านข้างหมายถึงแรงที่มากระทำด้านข้างของโครงสร้าง แรงดังกล่าวนี้โดยทั่วๆ ไป ได้แก่ แรงลม แรงลมที่กระทำต่อโครงสร้าง ทิศทางของแรงลมกระทำในแนวนอน (Horizontal) และจะกระทำตั้งฉากกับโครงสร้างซึ่ง

อยู่ในแนวดิ่ง สำหรับแรงลมบนระนาบดิ่ง ซึ่งใช้กันโดยทั่วๆ ไปเท่ากับ 100 $\frac{kg}{m^2}$ ฉะนั้นแรงลมตามแนวตั้งฉากหลังคาสารมารถได้ ดังนี้

ดังนั้น $Pn = \frac{P\theta}{45}$ สมมุติมุมหลังคาเท่ากับ 30 องศา

$\therefore Pn = \frac{100\times 30}{45} = 66.67 \frac{kg}{m^2}$

1.2.8 แรงกระทำตามแนวยาว (Longitudinal Force)

ในขณะที่แรงกระทำตามแนวยาว หมายถึง แรงที่เกิดจากน้ำหนักที่กำลังจะออกเคลื่อนที่หรือหยุดและในเวลาเดียวกันทิศทางของแรงจะกระทำในทิศทางของการเคลื่อนที่ของน้ำหนักนั้น เช่น การเคลื่อนที่ของรถไฟ เป็นต้น

1.2.9 แรงรั้ง (Centripetal Force) แรงที่ดึงเข้ามายังศูนย์กลางของวัตถุที่กำลังหมุนหรือกำลังเคลื่อนที่อยู่และพยายามจะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามทางของวงกลม แทนที่จะเคลื่อนที่ไปทางตรงหรือเป็นเส้นพาดวง (Tangent) ของวงกลมนั้นๆ

1.2.10 แรงหนีศูนย์ (Centrifugal Forces) หรือแรงเหวี่ยง หมายถึงแรงที่เท่ากับแรงรั้ง แต่กลับทิศทางเป็นแรงที่เกิดขึ้นเนื่องมาจากน้ำหนักเคลื่อนที่ไปตามแนวโค้ง เช่นทางค้างของทางรถไฟ ทางโค้งของทางรถยนต์ เป็นต้น แรงหนีศูนย์นี้จะมีค่ามากน้อยขึ้นอยู่กับความโค้งของเส้นทางและความเร็วของน้ำหนักที่เคลื่อนที่นั้นๆ

สำหรับแรงหนีศูนย์หรือแรงเหวี่ยงหาได้จากสูตร ดังนี้

ดังนั้น $C = \frac{0.0675(WV)^2}{R}$ ……..……..(1.1)

เมื่อ :-

C = แรงหนีศูนย์ ……ปอนด์

W = น้ำหนักรถ ……..……ปอนด์

V = ความเร็ว ……..……ปอนด์

R = รัศมีความโค้งของรางรถไฟหรสะพาน……ฟุต

1.3 สมการของการสมดุล

สำหรับแนวคิดของสมการของการสมดุลไว้ว่าเมื่อวัตถุอยู่นิ่งและยังคงอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่สม่ำเสมอในขณะที่มีแรงหรือน้ำหนักบรรทุกกระทำต่อวัตถุนั้น เรียกสภาวะนั้นว่าสภาวะสมดุล ซึ่งภายใต้สภาวะนี้กฎของสแตติคส์ได้ให้ผลรวมทางพีชคณิตของแรงต่างๆ (แรงในที่นี้

หมายถึงแรงและโมเมนต์ดัด) ในทุกทิศทางต้องเท่ากับศูนย์ ฉะนั้น ฉะนั้นสมการของการสมดุล (Equation of Equilibrium) สำหรับโครงสร้าง 2 มิติโดยมีพิกัดแก X และ Y อยู่ในแนวนอนและแนวตั้งที่ต้องตั้งฉากกัน ดังนี้

การสมดุล (Equilibrium) หมายถึง วัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำกับวัตถุนั้นหรือวัตถุไม่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม และเมื่อมีแรงมากระทำถ้าเกิดสภาวะสมดุล จะมีผลทำให้แรงลัพธ์ของแรงเหล่านั้นมีค่าเท่ากับศูนย์

เมื่อวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำ หมายถึง สภาวะการของวัตถุไม่หมุนและไม่มีการเคลื่อนที่และสภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นได้ ก็เนื่องมาจากมีแรงต้านทาน หรือโมเมนต์ที่มากระทำต่อวัตถุนั้นมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นสมการสเกลาร์ได้ ดังนี้

$$\Sigma F_x = 0\,,\ \Sigma F_y = 0\,,\ \Sigma M_0 = 0 \qquad \text{.....(1.2)}$$

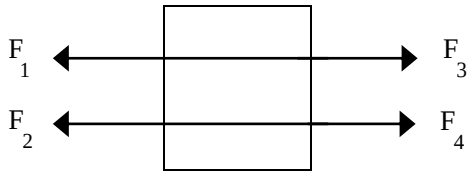
$\Sigma F_x = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน x เท่ากับ 0

$\Sigma F_y = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน y เท่ากับ 0

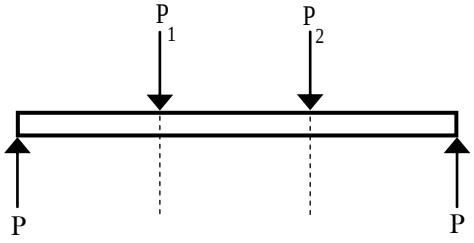
$\Sigma M_0 = 0$ หมายถึง ผลรวมโมเมนต์ของแรงที่ตั้งฉากแกน y เท่ากับ 0

ดังนั้นในการวิเคราะห์สมดุล 2 มิติ จึงแยกทำการวิเคราะห์ตามลักษณะของประเภทของการสมดุล ดังนี้เราสามารถแยกได้ 4 อย่าง ได้แก่ การสมดุลของแรงขนานกัน การสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกัน การสมดุลของมีแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกันและการสมดุลของแรง 2 มิติที่มีระบบแรงทั่วไป เป็นต้น มีรายละเอียด ดังนี้

1.3.1 การสมดุลของแรงขนานกัน การสมดุลในลักษณะนี้จะเป็นการสมดุลของแรงที่มีทิศทางตรงข้ามกันกระทำต่อวัตถุชิ้นเดียวกัน จึงทำให้ระบบแรง 2 มิติที่อยู่ในสภาวะสมดุลและเงื่อนไขของการสมดุลของแรง 2 มิติที่มีแนวแรงขนานกัน คือ $\Sigma F_y = 0$ และ $\Sigma M_0 = 0$ ดังแสดงในภาพที่ 1.1



ภาพที่ 1.1 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2537:33)

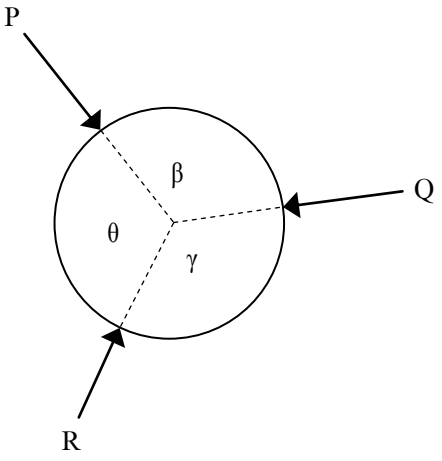


ภาพที่ 1.2 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:31)

1.3.2 การสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกัน ที่มีแนวแรงพบกันที่จุดเดียว การสมดุลชนิดนี้มาจากแรงที่กระทำต่อวัตถุในสภาวะสมดุล แนวแรงทั้งหมดจะต้องตัดกันที่จุดใดจุดหนึ่ง และสมการของการสมดุลของแรง 2 มิติคือ ΣF_x และ ΣF_y แต่ในการแก้ปัญหาของการสมดุลของแรงชนิดนี้โดยการใช้ทฤษฎีการสมดุลของแรง ดังนี้

1.3.2.1 ทฤษฎีของลามี (Lami's Theory)

ทฤษฎีลามีจะใช้ในกรณีที่มีแรงสามแรงกระทำร่วมกันที่จุดๆ ใดจุดหนึ่ง หรือจุดเดียวกัน และทำให้วัตถุนั้นอยู่ในสภาพสมดุล ทฤษฎีลามี จะกล่าวถึง "อัตราส่วนของแรงต่อค่า Sine ของมุมตรงกันข้ามจะมีค่าเป็นปฏิภาคต่อกัน" ดังแสดงในภาพที่ 1.3

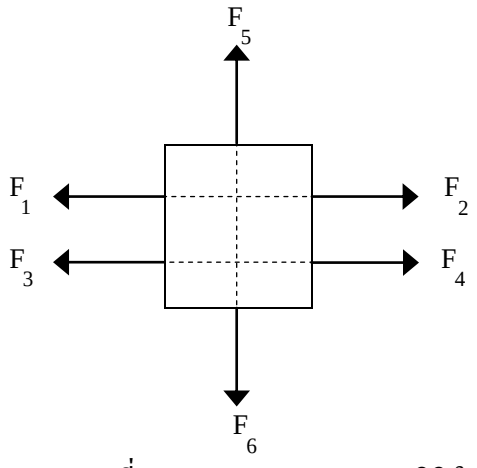


ภาพที่ 1.3 ทฤษฎีของลามี
ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:123)

จากภาพที่1.3 แสดงการสมดุลของแรงที่กระทำร่วมกัน ณ จุดเดียวกันตามทฤษฎีของลามีจะได้ตามสูตร ดังนี้

$$\frac{Q}{Sin\theta} = \frac{P}{Sin\gamma} = \frac{R}{Sin\beta} \text{ ……..(1.3)}$$

1.3.3 การสมดุลของแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เกิดจากแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุไม่มากเกิน 2 แรง ในขณะเดียวกันแรงจะต้องมีทิศทางตรงกันข้ามและมีทิศทางและขนาดเท่ากันอยู่ในเส้นเดียวกัน มีสมการของการสมดุลเพียงสมการเดียวเท่านั้น มีรายละเอียด ดังแสดงในภาพที่ 1.4



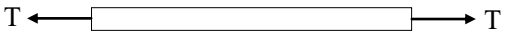
ภาพที่1.4 การสมดุลของแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2537:33)

1.3.4 การสมดุลของแรง 2 มิติ ที่มีระบบแรงทั่วไป การสมดุลของแรง 2 มิติที่มีระบบแรงทั่วไป คือ การสมดุลทั้งระบบที่มีทั้งโมเมนต์และแรงในแนวแกน x แกน y และเป็นการหาโมเมนต์ของแรงและแรงในแนวแกน x ที่ทำให้ระบบอยู่ในภาวะสมดุลโดยเงื่อนไขของการสมดุลของแรง 2 มิติ ที่มีระบบแรงทั่วไป ได้แก่ $\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M_0 = 0$

1.3.5 เครื่องหมายและทิศทาง (Sing Convention)

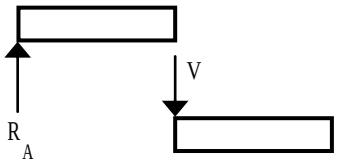
1.3.5.1 แรงตามแนวแกนหรือแรงดึง (Tension) จะมีเครื่องหมายเป็นบวกดังแสดงในภาพที่ 1.5



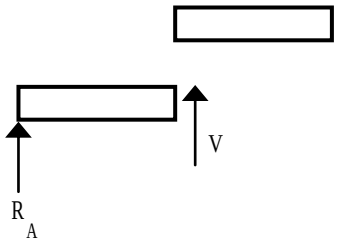
ภาพที่ 1.5 แรงตามแนวแกน

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:2)

1.3.5.2 แรงเฉือนจะมีเครื่องหมายเป็นบวก เมื่อด้านซ้ายมือขาด แล้วแล้วขึ้นไปจากส่วนที่เหลือด้านขวามือ ดังแสดงในภาพที่ 1.6 และดังแสดงในภาพที่ 1.7

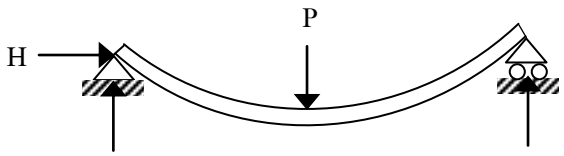


ภาพที่ 1.6 แรงเฉือนเป็นบวก
ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:117)



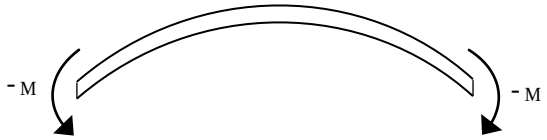
ภาพที่ 1.7 แรงเฉือนเป็นลบ
ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:117)

1.3.5.3 โมเมนต์ดัดจะมีเครื่องหมายเป็นบวก เมื่อใต้ผิวบนเกิดแรงอัด และผิวล่างเกิดแรงดึง ดังแสดงในภาพที่ 1.8 , 1.9 และดังแสดงในภาพที่ 1.10



ภาพที่ 1.8 โมเมนต์ดัด (Bending moment)
ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:6)

ภาพที่ 1.9 โมเมนต์เป็นบวก
ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:6)



ภาพที่ 1.10 โมเมนต์เป็นลบ

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:6)

การกำหนดเครื่องหมายโมเมนต์ดัด (BM) โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ถ้าโมเมนต์ดัดทำให้คานโค้งลง ให้ค่าเป็นบวก (+)

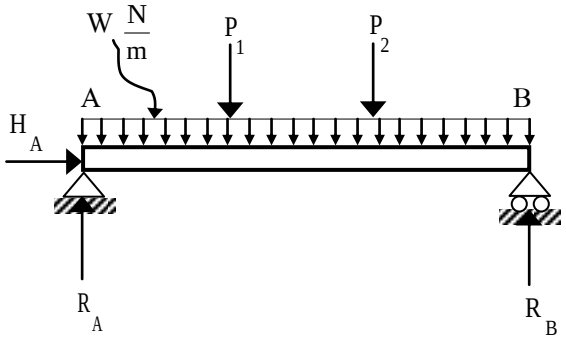
ถ้าโมเมนต์ดัดทำให้คานโค้งขึ้น ให้ค่าเป็นบวก (–)

หมายเหตุ สำหรับโครงสร้างที่ไม่ได้อยู่ในแนวนอน ให้หมุนส่วนของโครงสร้างขึ้นตามเข็มนากา จนกระทั่งโครงสร้างนั้นอยู่ในแนวนอน แล้วจึงพิจารณาเครื่องหมายและทิศทาง

1.3.6 หลักการวิเคราะห์

ในการวิเคราะห์โครงสร้าง จะต้องหาการคำนวณค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับเป็นอันดับแรก หลังจากนั้นก็ทำการคำนวณหาค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่หน้าตัดต่างๆ เพื่อที่จะนำข้อมูลไปใช้ในการเขียนภาพแรงเฉือนและภาพโมเมนต์ดัดต่อไป

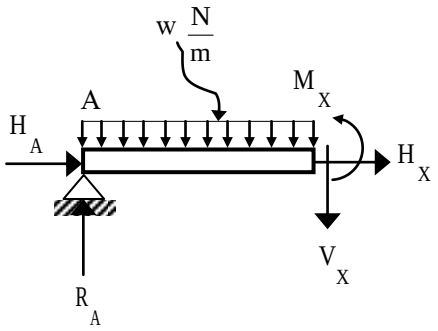
1.3.6.1 แรงปฏิกิริยา การคำนวณหาค่าจะเริ่มจากการใส่แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับต่างๆ ในภาพของตัวไม่ทราบค่า จำนวนของแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับแต่ละจุดจะขึ้นอยู่กับแบบของจุดรองรับ แล้วใช้สมการสมดุลก็จะสามารถหาค่าของแรงปฏิกิริยาต่างๆ ได้ ดังแสดงในภาพที่ 1.11 (ก) ให้ใช้สมการ $\Sigma M_B = 0$ จะหาค่า R_A ได้ และใช้สมการ $\Sigma M_A = 0$ จะหาค่า R_B ได้ และ $\Sigma M_X = 0$ จะหา X_A และหาค่าของแรงปฏิกิริยาได้ทั้งหมด แต่เหลือสมการ $\Sigma F_y = 0$ สมการนี้จะใช้สำหรับการตรวจสอบคำตอบ



ภาพที่ 1.11 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : ชุมพล จันทรสม (2552:8)

1.3.6.2 แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ในการคำนวณหาค่าจะพิจารณาเลือกตัดของโครงสร้างที่จุดต่างๆ จำนวนจุดที่จะเลือกตัด พิจารณาจะขึ้นอยู่กับสภาพความไม่สม่ำเสมอของแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง การตัดโครงสร้างที่หน้าตัดใดๆ จะต้องพบแรงภายในเกิดขึ้น 3 แบบ ได้แก่ แรงตามแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด การคำนวณหาค่าแรงภายในดังกล่าวก็จะใช้สมการสมดุลดังแสดงในภาพที่ 1.12 เมื่อใช้ $\Sigma F_X = 0$ จะหาค่า R_X ได้และใช้สมการ $\Sigma M_X = 0$ ก็จะหาค่า M_X ได้



ภาพที่ 1.12 คานรับแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
ที่มา : ชุมพล จันทรสม (2552:8)

1.4 น้ำหนักบรรทุก (Load)

ในการพิจารณาน้ำหนักบรรทุกหรือแรงที่กระทำต่อโครงสร้างมักจะเกิดปัญหาแม้ว่าจะมีกฎเกณฑ์หรือข้อกำหนดไว้ เป็นหน้าที่ของวิศวกรที่จะต้องใช้ประสบการณ์และการตัดสินใจที่จะพิจารณาความเหมาะสมของน้ำหนักบรรทุกให้ถูกต้องกับสภาพของโครงสร้างที่จะรับ จึงมีความจำเป็นจะต้องทราบข้อมูลต่างๆ ณ จุดที่จะก่อสร้าง เช่น สภาพดินฟ้าอากาศ, แรงลม หิมะ ฝน รวมทั้งข้อกำหนดของอาคาร เพื่อเป็นพื้นฐานข้อมูลในการจำลองสภาพน้ำหนักบรรทุก

น้ำหนักบรรทุกจำแนกตามลักษณะการกระทำออกเป็นจุด ตามเส้นหรือพื้นผิว (Surface loads) แรงที่กระทำเป็นจุดอาจหมายถึง การกระทำของส่วนของโครงสร้างอันอื่นที่มาต่อกับโครงสร้างดังกล่าว จุดรองรับของเครื่องจักรบนพื้นอาคารหรือล้อของรถบรรทุกบนคานสะพาน น้ำหนักกระทำเป็นเส้นเป็นน้ำหนักบรรทุกกำหนดเป็นแรงต่อหน่วยความยาว เช่น น้ำหนักของผนังที่กระทำต่อคานหรือน้ำหนักของพื้นที่กระทำต่อคานรองรับ น้ำหนักที่กระจายบนผิวจะกำหนดเป็นแรงต่อหน่วยพื้นที่และแล้วจะเปลี่ยนเป็นแรงตามเส้น เช่นในการวิเคราะห์ โครงสร้างอาคาร โครงสร้างหลังคา เป็นต้น

ส่วนการวิเคราะห์โครงสร้างและออกแบบโครงสร้างใดๆ จะต้องทราบที่โครงสร้างนั้นๆ จะต้องรับหรือต้านทาน น้ำหนักบรรทุกที่มากระทำต่อโครงสร้างจะพิจารณาเฉพาะแบบสแตติคส์ (Static Loads) เท่านั้นซึ่งแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท รายละเอียด ดังนี้

1.4.1 น้ำหนักบรรทุกตายตัว (Dead Load) หมายถึง เป็นน้ำหนักบรรทุกที่มีขนาดและตำแหน่งที่กระทำแน่นอนตายตัวหรือถาวรตลอดเวลา ไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดหรือตำแหน่งน้ำหนักบรรทุก เช่น น้ำหนักพื้น คาน เสา หรือวัสดุ อุปกรณ์ต่างๆ ที่อยู่กับอาคาร เครื่องทดสอบวัสดุทางด้านวิศวกรรมโยธา วัสดุปูพื้นผิว เครื่องปรับอากาศที่ติดตั้งแล้วบนอาคาร เป็นต้น น้ำหนักบรรทุกจรนี้เกิดจากแรงดึงดูดของโลกจึงมีแนวแรงกระทำอยู่ในแนวดิ่งเสมอ สำหรับค่าโดยประมาณของน้ำหนักบรรทุกตายตัวซึ่งใช้ในการออกแบบอาคารทั่วไปและน้ำหนักบรรทุกของวัสดุก่อสร้าง เป็นต้น รายละเอียด ดังแสดงในตารางที่ 1.1

ตารางที่ 1.1 น้ำหนักวัสดุและน้ำหนักบรรทุกคงที่หรือตายตัว

น้ำหนักวัสดุ	**น้ำหนักบรรทุกคงที่หรือตายตัว ($\frac{kg}{m^3}$)**
คานคอนกรีตเสริมเหล็กธรรมดา	1600-2400
เหล็ก เหล็กหล่อ	7,210
เหล็กกล้า	7,850
อะลูมิเนียม	2,724
ทองเหลือง	8,900
ตะกั่ว	11,370
หินอ่อน	2,720
ไม้เนื้อแข้ง	640-800
ทองเหลือง	8,900
บรอนด์	8,150
หินแกรนิต	2,640
ไม้เนื้ออ่อน	448-544
อิฐมวลเบา	1,680
อิฐ(อัด)	2,240

น้ำหนักวัสดุ	น้ำหนักบรรทุกคงที่หรือตายตัว ($\frac{kg}{m^3}$)
วัสดุมุงหลังคา	5-18
แปไม้	5
โครงหลังคา	10-20
ฝ้าเพดาน	14-26
กำแพงอิฐมอญ	180-360
กำแพงอิฐบล็อก	100-200
กำแพงคอนกรีตบล็อก	100-240
ฝาไม้ ไม้อัด รวมเคร่าไม้	12-30
พื้นไม้ รวมตง	30

1.4.2 น้ำหนักบรรทุกจร (Live Load) หมายถึง เป็นน้ำหนักบรรทุกที่กระทำต่อโครงสร้างเป็นบางครั้งบางคราว เช่น น้ำหนักของรถหรือบนอาคารจอดรถ น้ำหนักของสินค้าในโกดังเก็บของ นำหนักของโต๊ะ เก้าอี้ในห้องเรียน น้ำหนักนักศึกษาในห้องเรียน เป็นต้น น้ำหนักบรรทุกจร สามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ได้แก่ น้ำหนักบรรทุกจรแบบเคลื่อนที่ได้ และน้ำหนักบรรทุกจรแบบเคลื่อนที่ไม่ได้ ดังนี้

1.4.2.1 น้ำหนักบรรทุกจรแบบเคลื่อนที่ได้ ได้แก่ รถไฟ รถยนต์ รถบรรทุก และแรงลม เป็นต้น เป็นน้ำหนักที่มีอิทธิพลมากต่อโครงสร้าง เพราะว่าเมื่อมีการเคลื่อนที่จะมีผลของการกระแทก (Impact) รวมอยู่ด้วย ซึ่งถือเป็นเรื่องสำคัญของการออกแบบโครงสร้างเป็นอย่างมากที่จะให้ได้รับน้ำหนักบรรทุกแบบนี้

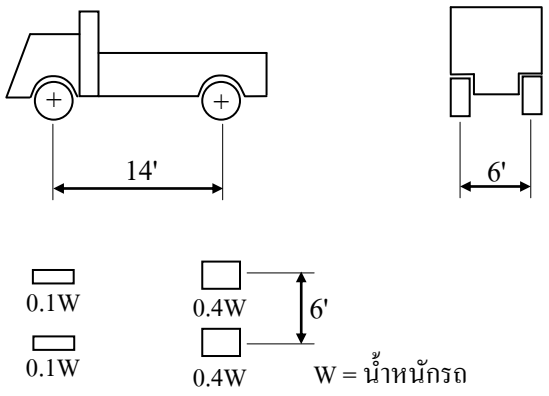
1.4.2.2 น้ำหนักบรรทุกจรแบบไม่ได้เคลื่อนที่ ได้แก่ สินค้าต่างๆ ที่นำมาเก็บไว้ในโกดัง เฟอร์นิเจอร์ต่างๆ ภายในบ้าน หรือที่ทำงาน หนังสือในห้องสมุด เป็นต้น

การเลือกน้ำหนักบรรทุกจรเพื่อใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบโครงสร้าง เป็นสิ่งที่ไม่ง่ายนัก บางครั้งอาจทราบค่าที่แน่นอนของน้ำหนักบรรทุกจรได้ทันที ฉะนั้นจึงต้องอาศัยความชำนาญและประสบการณ์ในการประมาณน้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำต่อโครงสร้าง หน่วยงานที่รับผิดชอบในด้านต่างๆ เช่น วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย เป็นต้น ก็ได้มีข้อกำหนดเกี่ยวกับน้ำหนักบรรทุกจรไว้แล้ว เช่น เทศบัญญัติของเทศบาลนครกรุงเทพมหานคร ได้กำหนดเกี่ยวกับน้ำหนักบรรทุกจรของอาคารประเภทต่างๆ จะต้องไม่น้อยกว่า ตารางที่ 1.2 ดังนี้

ตารางที่ 1.2 ประเภทการใช้อาคารและน้ำหนักบรรทุกจร

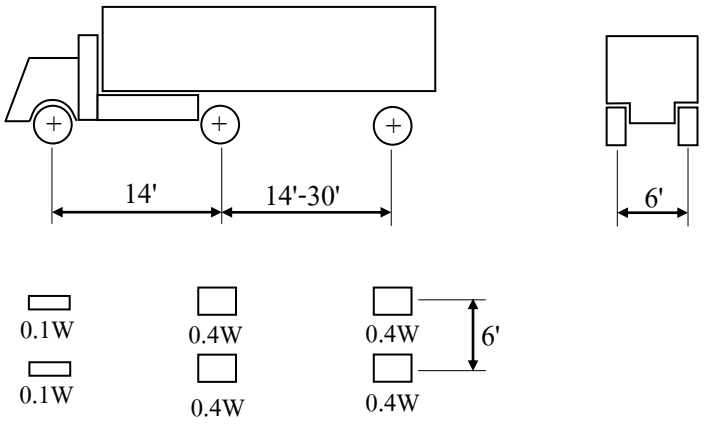
	ประเภทการใช้อาคาร	น้ำหนักบรรทุกจร ($\frac{kg}{m^2}$)
1	โครงหลังคา	50
2	กันสาดหรือหลังคาคอนกรีตเสริมเหล็ก	100
3	ที่พักอาศัย โรงเรียนอนุบาล ห้องน้ำ-ห้องส้วม	150
4	ห้องแถว ตึกแถว อาคารชุด หอพัก โรงแรม และห้องพักคนไข้พิเศษของโรงพยาบาล	200
5	สำนักงาน ธนาคาร	250
6	(ก) อาคารพาณิชย์ ส่วนของห้องแถว ตึกแถวที่ใช้เพื่อการพาณิชย์ มหาวิทยาลัย วิทยาลัย	300
	(ข) ห้องโถง บันได ช่องทางเดินของอาคารชุด หอพัก โรงแรม โรงพยาบาล สำนักงาน และธนาคาร	300
7	(ก) ตลาด ห้างสรรพสินค้า หอประชุม โรงมหรสพ ภัตตาคาร ห้องประชุม ห้องอ่านหนังสือในห้องสมุด ที่จอดรถหรือเก็บรถยนต์	400
	(ข) ห้องโถง บันได ช่องทางเดินของอาคารพาณิชย์ มหาวิทยาลัย วิทยาลัยและโรงเรียน	400
8	(ก) คลังสินค้า โรงกีฬา พิพิธภัณฑ์ อัฒจันทร์ โรงงานอุตสาหกรรม โรงพิมพ์ ห้องเก็บเอกสารและพัสดุ	500
	(ข) ห้องโถง บันได ช่องทางเดินของตลาด ห้างสรรพสินค้า หอประชุม โรงมหรสพ ภัตตาคารและหอสมุด	500
9	ห้องเก็บหนังสือห้องสมุด	600
10	ที่จอดหรือที่เก็บรถยนต์บรรทุกเปล่าและรถอื่นๆ	800

1.4.3 น้ำหนักรถบรรทุก สามารถแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ได้แก่ รถบรรทุกคันเดียวเรียกว่าแบบ H และแบบรถบรรทุกและมีรถพ่วง เรียกว่า แบบ H-S ดังแสดงในภาพที่ 1.13 และดังแสดงในภาพที่ 1.14 ซึ่งแสดงการกระจายน้ำหนักช่วงกว้าง ช่วงยาวระหว่างล้อรถบรรทุกขนาดต่างๆ ทั้งสองแบบ



H20 8,000 lb	32,000 lb
H15 6,000 lb	24,000 lb
H10 4,000 lb	16,000 lb

ภาพที่ 1.13 รถบรรทุกแบบ H
ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2552:18)



H20 –S16 8,000 lb	32,000 lb	32,000 lb
H15 –S12 6,000 lb	24,000 lb	24,000 lb

ภาพที่ 1.14 รถบรรทุกแบบ H-S
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2526:6-7)

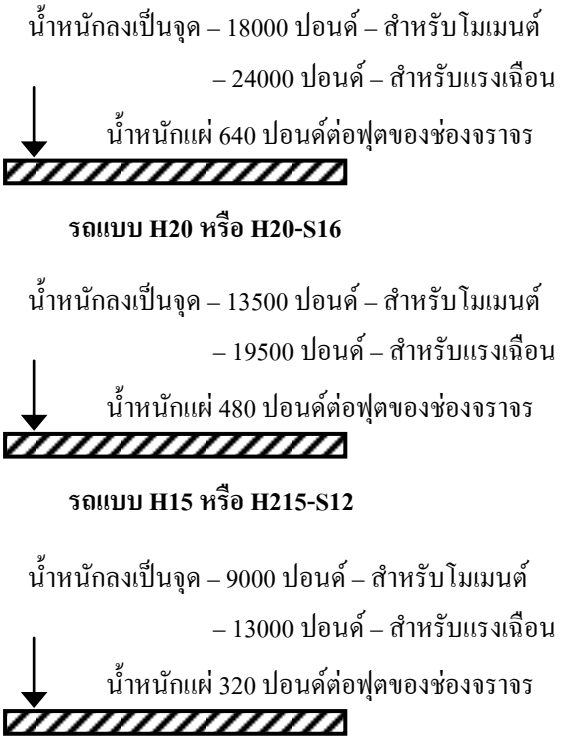
1.4.4 น้ำหนักแผ่รวมกับน้ำหนักที่กระทำแบบเป็นจุด (Uniform Load and Point Load)เป็นน้ำหนักบรรทุกที่ใช้แทนแบบน้ำหนักรถบรรทุกที่กล่าวมาข้างต้น ที่อาจจะแล่นไปมาไม่เป็นระเบียบยากแก่การพิจาณา น้ำหนักแบบนี้ใช้เพื่อให้เกิดผลทางโมเมนต์ และแรงเฉือนที่มากที่สุดสำหรับสะพานที่มีช่วงยาวๆ ดังแสดงในภาพที่ 1.15

1.4.5 น้ำหนักกระแทก (Impact Load) นอกเหนือไปจากน้ำหนักบรรทุกจรแล้ว จะต้องคิดน้ำหนักกระแทกของรถที่แล่นขึ้นสะพานอย่างทันทีเพิ่มขึ้นอีกด้วย โดยใช้สูตร ดังนี้

$$I = \frac{50}{L+125} \times 100 \text{ แต่ไม่เกิน } 30 \quad \text{.....(1.4)}$$

เมื่อ I = เศษส่วนของน้ำบรรทุกจร เป็นเปอร์เซ็นต์

L = ช่วงยาวของสะพาน เป็นฟุต



ภาพที่ 1.15 รถบรรทุกแบบ H-S

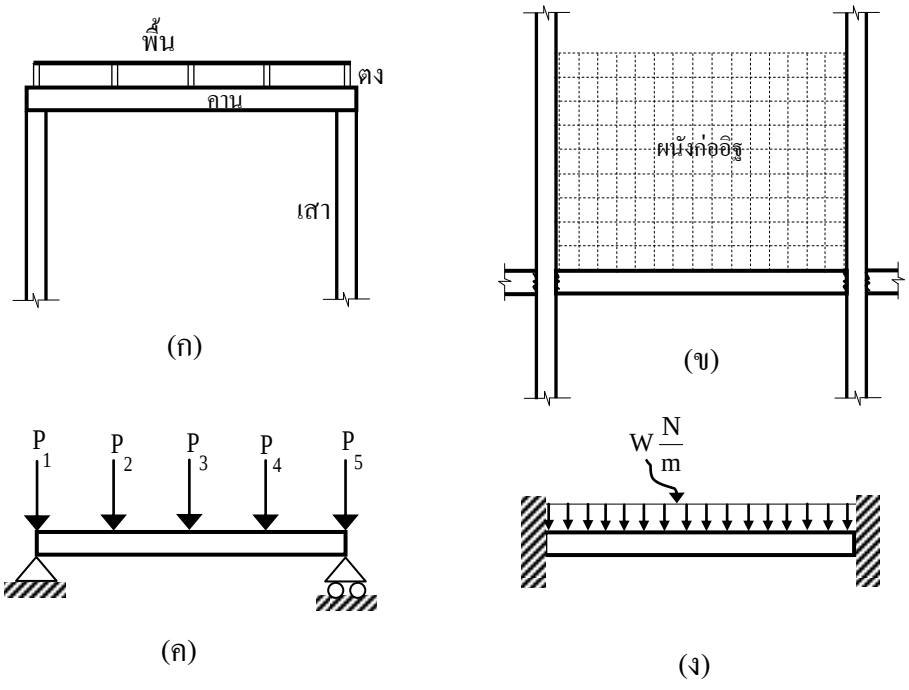
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2526:7-8)

นอกจากต้องพิจารณาออกแบบให้โครงสร้างรับน้ำหนักบรรทุกตายตัว และน้ำหนักบรรทุกจรดังกล่าวข้างต้นแล้ว ยังต้องพิจารณาถึงลักษณะการรับน้ำหนักบรรทุกของโครงสร้างตลอดจนแรงหรือน้ำหนักกระทำอย่างอื่นที่อาจจะเกิดขึ้น ได้แก่ 1) แรงกระแทก ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อน้ำหนักบรรทุกจรเคลื่อนที่บนโครงสร้าง 2) แรงกระทำด้านข้างโครงสร้างที่เกิดขึ้นจากแรงลม หรือแรงแผ่นดินไหว

โดยคิดเป็นแรงกระทำตั้งฉากกับส่วนของโครงสร้างที่อยู่ในแนวดิ่ง 3) แรงกระทำตามยาวที่เกิดขึ้นเมื่อน้ำหนักบรรทุกจรเริ่มเคลื่อนที่ หรือกำลังจะหยุด โดยคิดเป็นแรงกระทำจามทิศการเคลื่อนที่ หรือกำลังจะหยุด โดยคิดเป็นแรงกระทำตามทิศการเคลื่อนที่ของน้ำหนักบรรทุกจรนั้น ง) แรงหนีศูนย์กลางที่เกิดขึ้นเมื่อน้ำหนักบรรทุกจรเคลื่อนที่บนโครงสร้างซึ่งมีแนวโค้ง ค่าของแรงหนีศูนย์กลางขึ้นอยู่กับความเร็วที่เคลื่อนที่และความโค้งของโครงสร้างที่พิจาณา จ) แรงดันด้านข้างของดินและการไหลซึมผ่านของน้ำ เมื่อโครงสร้างที่พิจารณาอยู่ใต้ดิน เป็นต้น

1.5 การเขียนภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์

ในการเขียนภาพของโครงสร้างที่ปรากฏในแบบก่อสร้างหรือที่ก่อสร้างจริงจะมีทั้งส่วนที่แสดงความกว้าง ความยาวและความลึก ในการเขียนภาพของโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์นั้น จะใช้แทนภาพโครงสร้างจริง ส่วนแรงหรือน้ำหนักบรรทุกจะใช้ลูกศรเป็นสัญลักษณ์แทน



ภาพที่ 1.16 (ก) , (ข) ภาพของโครงสร้างจริง (ค), (ง) และภาพโครงสร้างเพื่อการวิเคราะห์
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2552:3-4)

1.6 ชนิดและสัญลักษณ์ของจุดรองรับ (Type and Symbols of Support)

เมื่อชิ้นส่วนของโครงสร้างรับน้ำหนักบรรทุก หน่วยแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นภายในโครงสร้างนั้นจะถูกถ่ายต่อไปยังจุดรองรับ ความสามารถในการรับน้ำหนักของจุดรองรับนั้นจะขึ้นอยู่กับ

คุณสมบัติและลักษณะของจุดรองรับนั้นๆ จุดรองรับของโครงสร้างโดยทั่วไปสามารถจำแนก เป็น 3 แบบ ออกเป็น ดังนี้

1.6.1 แบบยึดหมุน (Hing) ลักษณะการยึดหมุนแบบนี้จะไม่มีการเคลื่อนที่ และมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้น 2 ทางการทำงานเหมือนกับบานพับจะหมุนรอบแกน ค่าของโมเมนต์ที่จุดชนิดนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ จุดรองรับแบบนี้จะรับแรงได้ทั้งแนวดิ่งและแนวนอน ดังแสดงในภาพที่ 1.17

ภาพที่ 1.17 ฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hing)

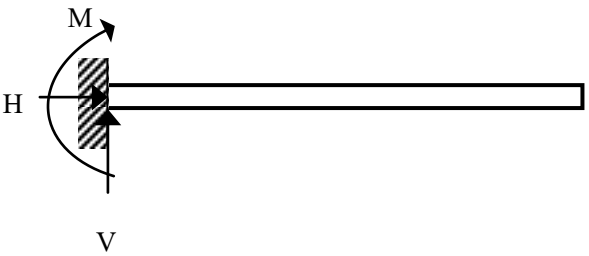
ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

1.6.2 แบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว (Roller Support) ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้ ชนิดแบบหมุนและเคลื่อนที่แบบนี้รับแรงได้ทางดิ่งอย่างเดียว ดังแสดงในภาพที่ 1.18

ภาพที่ 1.18 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2544:54

1.6.3 แบบยึดแน่น (Fixed Support) จุดรองรับแบบนี้จะยึดแน่นอยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ไม่ได้ จึงทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาทุกทิศทาง จึงมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้นทั้ง 2 ทิศทางและมีโมเมนต์เดียว ดังแสดงในภาพที่ 1.19



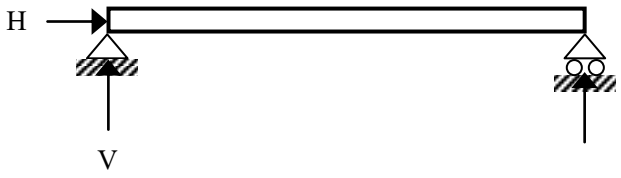
ภาพที่ 1.19 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

1.7 ประเภทของคาน (Beam)

ชนิดของคานสามารถแบ่งตามที่รองรับหรือแรงปฏิกิริยาได้ ดังนี้

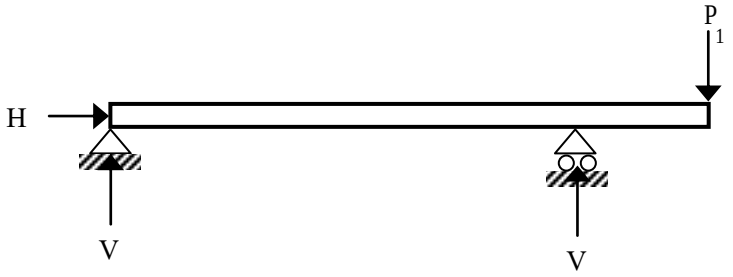
1.7.1 คานอย่างง่าย (Simple Beam) คานชนิดนี้จะรองรับด้วยลูกกลิ้งหรือสลักยึดที่ตำแหน่งของปลายคานทั้งสองข้าง และแรงปฏิกิริยาจะกระทำที่ปลายคานนั้นตั้งฉากกับคานดังแสดงในภาพที่ 1.20



ภาพที่ 1.20 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

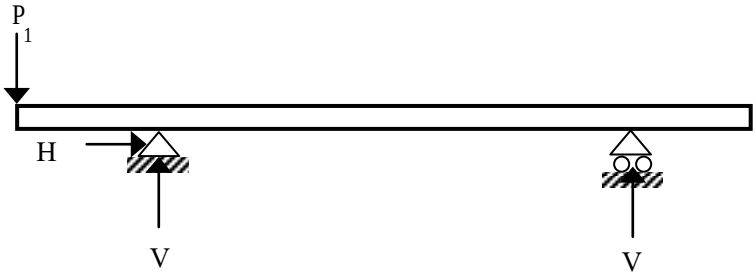
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

1.7.2 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย (Simple Beam with Overhang) คานชนิดนี้จะมีปลายด้านใดด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นออกไปจากจุดรองรับ ดังแสดงในภาพที่ 1.21 ถึง 1.23



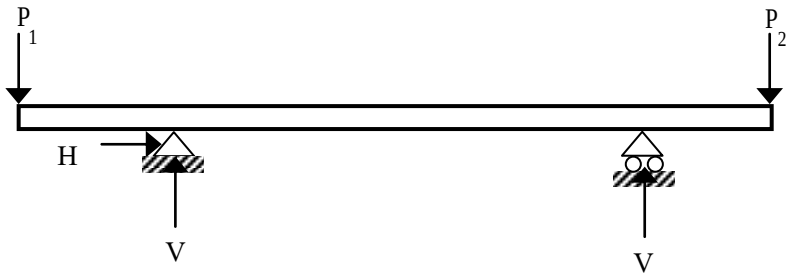
ภาพที่ 1.21 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายที่มา

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:43)



ภาพที่ 1.22 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย

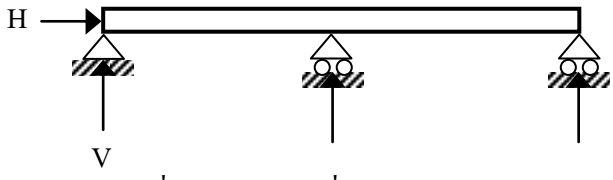
ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:371)



ภาพที่ 1.23 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายสองข้าง

ที่มา : สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2536:39)

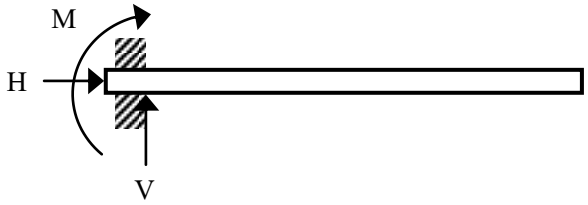
1.7.3 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam) เป็นคานที่มีจุดรองรับมากกว่า 2 จุดรองรับขึ้นไป ดังแสดงในภาพที่ 1.24



ภาพที่ 1.24 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

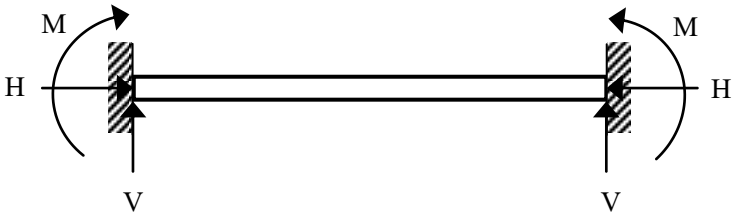
1.7.4 คานยื่น (Cantilever Beam) เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นถูกยึดแน่นฝังในตัวรองรับอย่างถาวร และจะต้องมีปลายด้านหนึ่งไม่สามารถเลื่อนตำแหน่งหรือหมุนได้ ดังแสดงในภาพที่ 1.25



ภาพที่ 1.25 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2536:39)

1.7.5 คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam) เป็นคานที่มีปลายสองข้างยึดรั้งไม่สามารถหมุนได้ ดังแสดงในภาพที่ 1.26



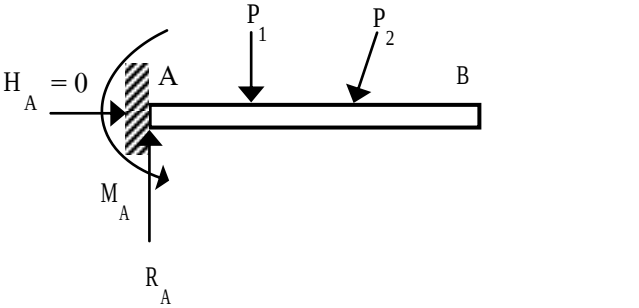
ภาพที่ 1.26 คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam)

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:369)

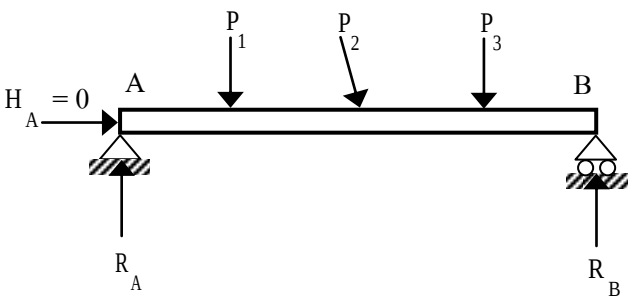
1.8 แบบของโครงสร้าง

สำหรับรูปแบบของโครงสร้างทั่วไปที่จะทำการวิเคราะห์ จะเป็นโครงสร้างสถิต ได้แก่ คาน โครงถัก และโครงข้อหมุน สามารถแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ โครงสร้างสถิตย์แบบดีเทอมิเนทและโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท เป็นต้น

1.8.1 โครงสร้างแบบดีเทอมิเนท (Statically Determinate Structures) หมายถึง โครงสร้างที่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงปฏิกิริยาต่างๆ ทั้งภายใน ภายนอกและแรงภายในโครงสร้างได้ โดยใช้เฉพาะสมการสมดุลเพียงอย่างเดียว นั่นคือจำนวนของแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างจะเท่ากับจำนวนของสมการสมดุล โครงสร้างแบบนี้ได้แก่ คานช่วงเดี่ยว (Simple Beam) คานยื่น (Cantilever Beam) โครงข้อแข็ง (Rigid Beam) โครงสร้างแบบนี้จะมีที่รองรับซึ่งให้แรงปฏิกิริยาเพียงพอที่จะทำให้โครงสร้างทรงตัวอยู่ได้ (Stable) ถ้าเอาแรงปฏิกิริยาตัวใดตัวหนึ่งออกไป โครงสร้างนั้นจะทรงตัวอยู่ไม่ได้ (Unstable) ดังแสดงในภาพที่ 1.27 ถึง 1.28



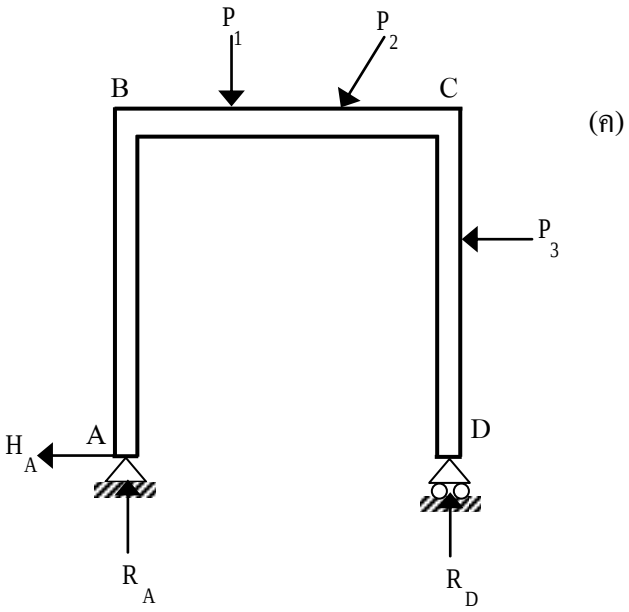
(ก)



(ข)

ภาพที่ 1.27 โครงแบบดีเทอมิเนท

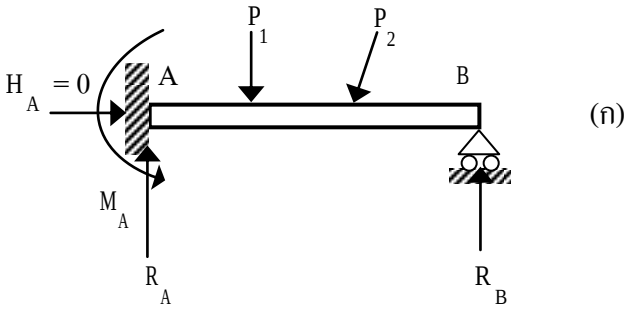
ที่มา : ที่มา : ชุมพล จันทรสม (2552:4)

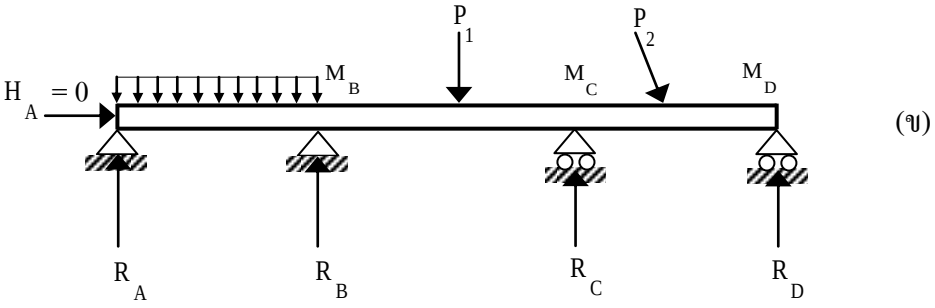


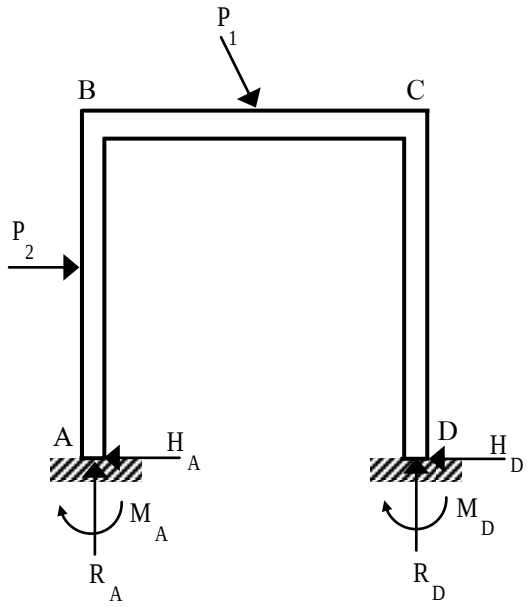
ภาพที่ 1.28 โครงแบบดีเทอมิเนท

ที่มา : ที่มา : ชุมพล จันทรสม (2552:4)

1.8.2 โครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท (Statically Indeterminate Structures) หมายถึง โครงสร้างที่ไม่สามารถวิเคราะห์หาค่าของแรงปฏิกิริยาทั้งภายนอกและภายในหรือทั้งสองอย่าง ได้ และแรงภายในโครงสร้างได้เมื่อใช้เฉพาะสมการสมดุลเพียงอย่างเดียว นั่นคือจำนวนแรงปฏิกิริยาของโครงสร้าง มากกว่าจำนวนของสมการสมดุล ถ้าหากเอาแรงต้านทานหรือแรงปฏิกิริยาจำนวนที่เกินมานี้ออกไปจะได้โครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.29







ภาพที่ 1.29 โครงแบบอินดีเทอมิเนท

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2526:10)

ในกรณีที่โครงสร้างมีจำนวนแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับมากกว่าจำนวนสมการสมดุลนั้น เราเรียกว่าสถิตย์แบบอินดีเทอมิเนทภายนอก (Externally Statically Indeterminate Structures) แต่ถ้าแรงปฏิกิริยาภายในของโครงสร้างมีจำนวนมากกว่าสมการสมดุลเราเรียกโครงสร้างนี้ว่า สถิตย์แบบอินดีเทอมิเนทภายใน (Internally Statically Indeterminate Structures)

ส่วนสถิตแบบอินดีเทอมิเนท จำนวนแรงปฏิกิริยาที่มากเกินกว่าจำนวนสมการสมดุลนี้เราเรียกว่า ตัวเกิน (Redundant) จำนวนของตัวเกินนี้จะแสดงถึงระดับของอินดีเทอมิเนท (Degree Indeterminate Structures) ใช้สัญลักษณ์ DI ซึ่งจะหมายถึงระดับความต้องการจำนวนสมการเพิ่มเติมอีก รายละเอียด ดังนี้

$$DI = r - e - f \quad \text{.....(1.4)}$$

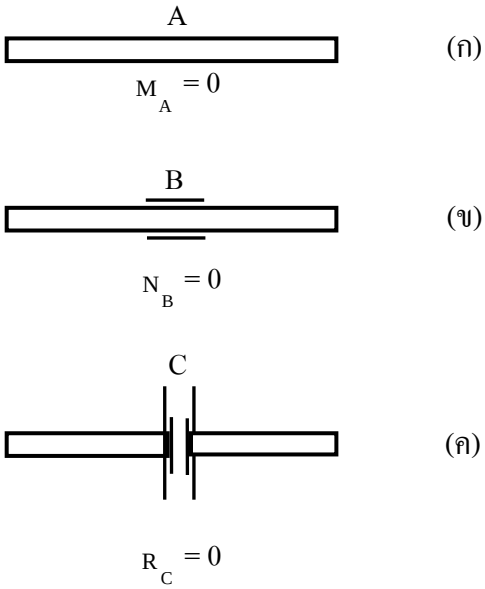
เมื่อ DI = ระดับอินดีเทอมิเนท

r = จำนวนของแรงปฏิกิริยา

e = จำนวนสมการสมดุล

f = จำนวนสมการจากเงื่อนไขพิเศษกำหนด

สำหรับสมการจากเงื่อนไขพิเศษกำหนด เป็นสมการที่ได้มาจากเงื่อนไขที่กำหนดของโครงสร้างเอง เช่น ลักษณะของโครงสร้างและลักษณะของแรงที่กระทำเป็นแบบสมมาตร หรือจุดภายในของโครงสร้าง เป็นบานพับ เป็นต้น ดังแสดงในภาพที่ 1.30



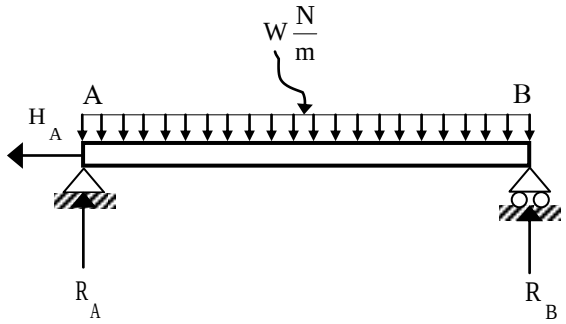
ภาพที่ 1.30 ลักษณะโครงสร้างที่เป็นเงื่อนไขพิเศษ
ที่มา : ชุมพล จันทรสม (2522:9)

1.9 การวิเคราะห์หาตัวเกิน (Redundant Analysis)

สำหรับการวิเคราะห์หาตัวเกินของโครงสร้างแบบดีเทอมิเนทและแบบอินดีเทอมิเนทของคานและโครงข้อหมุน รายละเอียด ดังนี้

1.9.1 คาน (Beam) ในการวิเคราะห์หาตัวเกินจะใช้สมการที่ 1 โครงสร้างแบบดีเทอมิเนทในคาน โดยทั่วไปขึ้นอยู่กับแบบของจุดรองรับ ได้แก่ คานยื่น (Cantilever Beam) คานธรรมดา (Simple Beam) และคานที่มีเงื่อนไขพิเศษกำหนด ให้พิจารณาการวิเคราะห์หาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของอินดีเทอมิเนท (DI)

ตัวอย่างที่ 1.1 คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam) คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.31



ภาพที่ 1.31 คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา แรงในแนวราบและโมเมนต์ จำนวน 5 ตัว ได้แก่ R_A , R_B และ H_A จะได้ ดังนี้

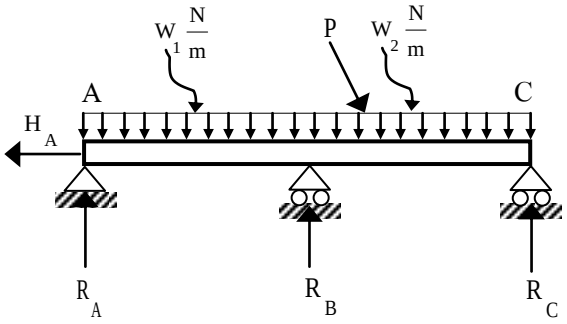
$$DI = r - e - f$$

$$= 3 - 3 - 0$$

$$DI = 0$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบดีเทอมิเนท (Determinate)

ตัวอย่างที่ 1.2 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam) คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.32



ภาพที่ 1.32 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา แรงในแนวราบและโมเมนต์ จำนวน 5 ตัว ได้แก่ R_A , R_B , R_C และ H_A จะได้ ดังนี้

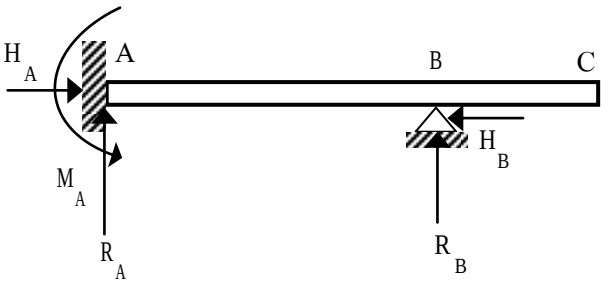
$$DI = r - e - f$$

$$= 4 - 3 - 1$$

$$DI = 0$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบดีเทอมิเนท (Determinate)

ตัวอย่างที่ 1.3 คานธรรมดายึดแน่นและปลายยื่น (Fixed Beam and Continuous)คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.33



ภาพที่ 1.33 คานธรรมดายึดแน่นและปลายยื่น

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา แรงในแนวราบและโมเมนต์ จำนวน 5 ตัว ได้แก่ R_A , R_B , M_A R_B และ H_B จะได้ ดังนี้

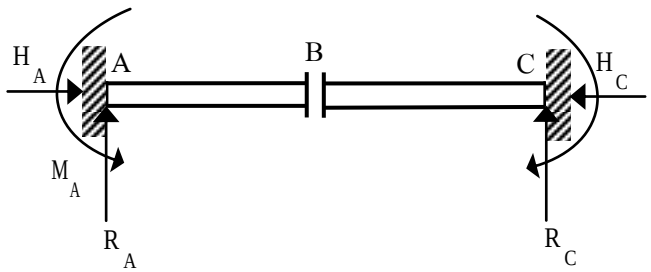
$$DI = r - e - f$$

$$= 5 - 3 - 0$$

$$DI = 2$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

ตัวอย่างที่ 1.4 คานยึดแน่นลักษณะโครงสร้างพิเศษ คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.34



ภาพที่ 1.34 คานยึดแน่นลักษณะโครงสร้างพิเศษ

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา แรงในแนวราบและโมเมนต์ จำนวน 6 ตัว ได้แก่ R_A , H_A ,M_A ;R_B ; R_C ;R_D และแรงนำทางที่จุด B หรือ f = 1 จะได้ ดังนี้

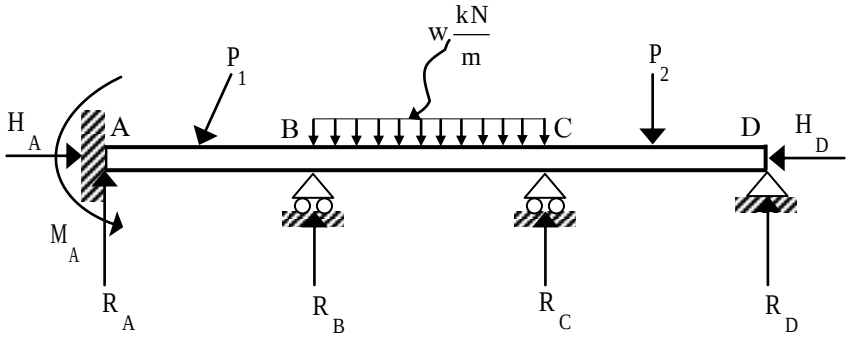
$$DI = r - e - f$$

$$= 6 - 3 - 1$$

$$DI = 2$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

ตัวอย่างที่ 1.5 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam) คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.35



ภาพที่ 1.35 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา แรงในแนวราบและโมเมนต์ จำนวน 5 ตัว ได้แก่ R_A , H_A ,M_A ;R_B ; R_C ;R_D และ H_D จุดที่เป็นบานพับ (Hing) มีจำนวน 1 จุดและ (Roller) จำนวน 2 จุด นั้นคือ ; M_B =0 ; M_C = 0 หรือ f = 2 จะได้ ดังนี้

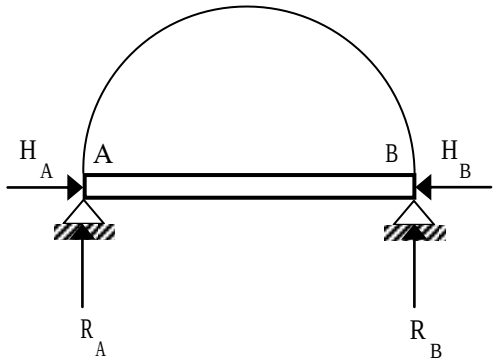
$$DI = r - e - f$$

$$= 7 - 3 - 2$$

$$DI = 2$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

ตัวอย่างที่ 1.6 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.36



ภาพที่ 1.36 โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลม

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยาและแรงในแนวราบ จำนวน 4 ตัว ได้แก่ R_A ,R_B ; H_B และ H_A จะได้ ดังนี้

$$DI = r - e - f$$

$$= 4 - 3 - 0$$

$$DI = 1$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

หมายเหตุ จากการคำนวณค่า DI ของโครงสร้าง ถ้า

DI = 0 โครงสร้างเป็นแบบดีเทอมิเนท

DI > 0 โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท

1.9.2 โครงถักหรือโครงข้อหมุน (Truss) จากข้อกำหนดของโครงถักคือ น้ำหนักบรรทุกกระทำที่จุดต่อเท่านั้น และจุดต่อสามารถหมุนได้ นั้นคือในแต่ละชิ้นส่วนจึงมีแรงภายในเป็นแรงตามแนวแกนอย่างเดียวที่จุดต่อเนื่องจากกำหนดให้หมุนได้จึงไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้ ดังนั้นแรงกระทำจะเป็นเฉพาะแรงตามแนวดิ่งและตามแนวนอนเท่านั้น เมื่อพิจารณาจากสามการ 1 จำนวนแรงปฏิกิริยา (r) จะประกอบด้วย แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับรวมกับแรงภายในแต่ละชิ้นส่วน ส่วนจากสมการ (e) จะประกอบด้วยจำนวนสมการสมดุลที่จุดรองรับรวมกับสมการสมดุลของแต่ละจุดต่อ สามารถเขียนเป็นสูตร ได้รายละเอียด ดังนี้

$$e = r - e - f \quad \text{.....(1.5)}$$

เมื่อ e = สมการสมดุลภายนอก+สมการสมดุลของแรงแต่ละจุด

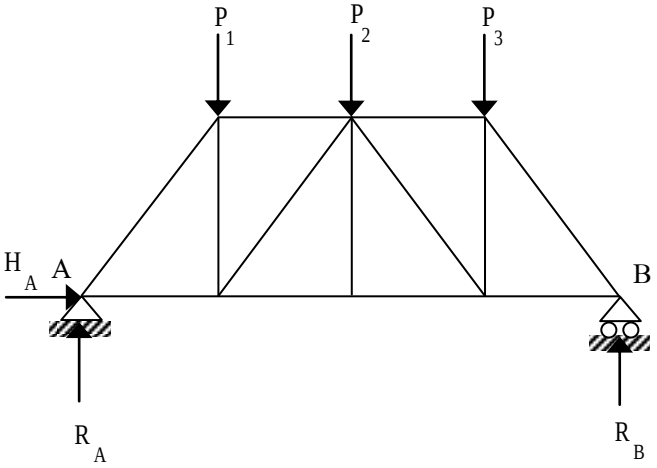
หรือ $e = 3+(2j-3) = 2j$

r = แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ + จำนวนชิ้นส่วน

j = จำนวนสมการสมดุล

f = จำนวนจุดต่อ

ตัวอย่างที่ 1.7 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.37



ภาพที่ 1.37 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)

ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยาได้แก่ R_A , H_A และ R_B จำนวน 13 จำนวนจุดต่อ8 จุด จะได้ ดังนี้

$$DI = r - e - f$$

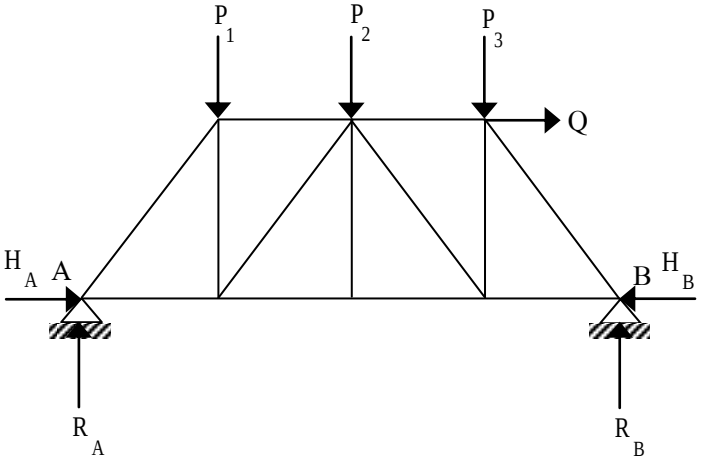
$$= (13+3)-(2\times 8) - 0$$

$$DI = 0$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบดีเทอมิเนท (Determinate)

ตัวอย่างที่ 1.8 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) อยู่ในลักษณะสมดุล

จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.38



ภาพที่ 1.38 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)

ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา ได้แก่ R_A , H_A ; R_B และ H_B จำนวน 13 จำนวนจุดต่อ 8 จุด ในขณะเดียวกันโครงสร้างและแรงสมมาตรทำให้ $R_A = R_B$ $H_A = H_B$ จะได้ ดังนี้

$$DI = r - e - f$$

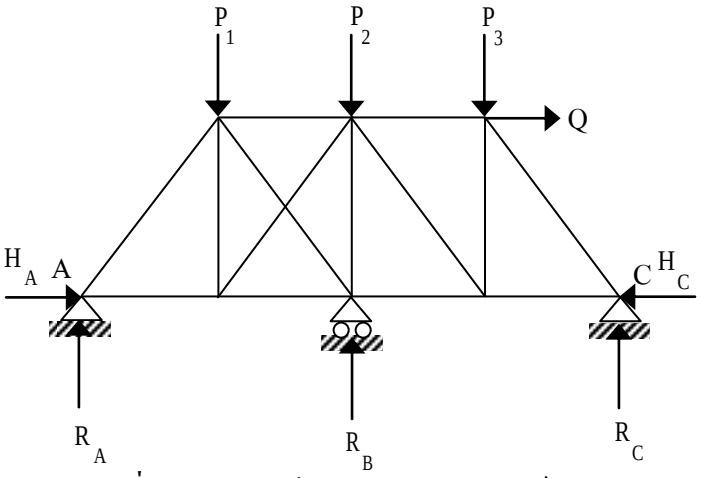
$$= (13+4) - (2 \times 8) - 0$$

$$DI = 1$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

ตัวอย่างที่ 1.9 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) อยู่ในลักษณะสมดุล

จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.39



ภาพที่ 1.39 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)

ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา ได้แก่ R_A , H_A ; R_B ; R_C และ H_C จำนวน 13 จำนวนจุดต่อ 8 จุด ในขณะเดียวกันโครงสร้างและแรงสมมาตรทำให้ $R_A = R_B$ $H_A = H_B$ จะได้ ดังนี้

$$DI = r - e - f$$

$$= (13+5) - (2 \times 8) - 0$$

$$DI = 2$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

1.9.3 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame) โครงสร้างแต่ละชิ้นส่วนหรือแต่ละจุดจะสามารถรับแรงตามแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดได้ จำนวนแรงปฏิกิริยาทั้งหมด (r) ประกอบด้วย แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับรวมกับแรงภายในแต่ละชิ้นส่วน ส่วนจำนวนสมการ (e) จะประกอบด้วยสมการสมดุลของจุดรองรับรวมกับจำนวนสมการสมดุลของแต่ละจุดต่อ ดังนั้น

$$e = r - e - f \quad \text{.....(1.6)}$$

เมื่อ e = สมการสมดุลภายนอก+สมการสมดุลของแรงแต่ละจุด

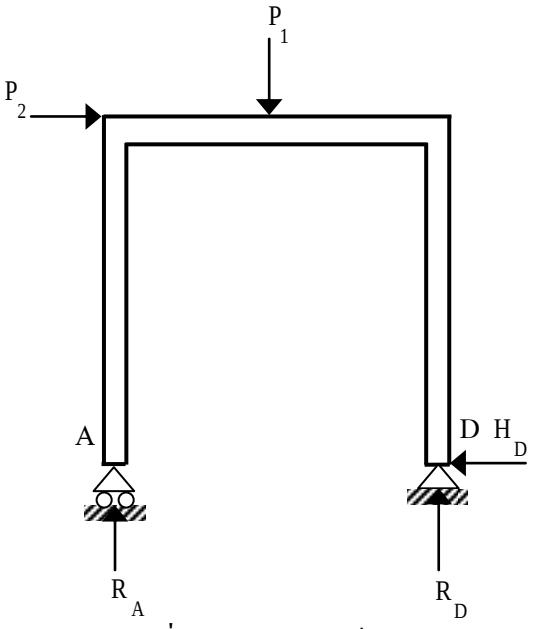
หรือ $e = 3+(3j-3) = 3j$

r = แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ + 3(จำนวนชิ้นส่วน)

j = จำนวนสมการสมดุล+(3×จำนวนจุดต่อ-3)

f = จำนวนจุดต่อ

ตัวอย่างที่ 1.10 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.40



ภาพที่ 1.40 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2526:10)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา ได้แก่ R_A , R_D ; R_B ; H_D จำนวนชิ้นส่วน 3 จำนวนจุดต่อ 4 จุด จะได้ ดังนี้

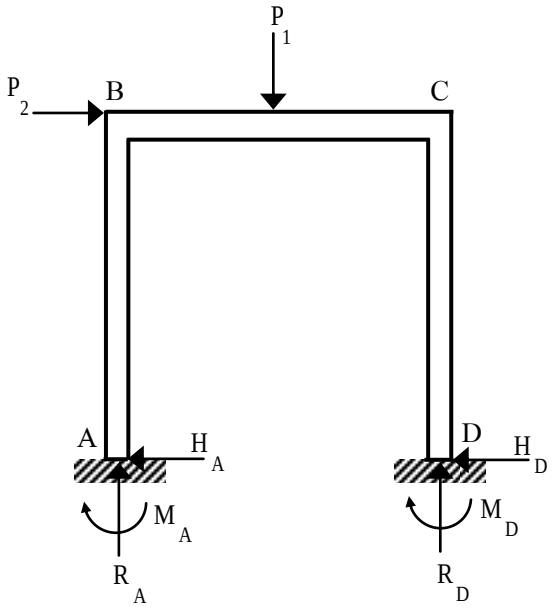
$$DI = r - e - f$$

$$= (3+3\times3) - (3\times4) - 0$$

$$DI = 0$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบดีเทอมิเนท (Determinate)

ตัวอย่างที่ 1.11 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.41



ภาพที่ 1.41 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2526:10)

วิธีทำ เมื่อมีแรงปฏิกิริยา แรงในแนวราบและโมเมนต์ ได้แก่ R_A , H_A , M_A ; R_D , H_D และ M_A จำนวนชิ้นส่วน 3 ชิ้น จำนวนจุดต่อ 3 จุด จะได้ ดังนี้

$$DI = r - e - f$$

$$= (6+3\times3) - (3\times4) - 0$$

$$DI = 3$$

ดังนั้น : โครงสร้างเป็นแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)

1.10 สมมุติฐานในการวิเคราะห์

ทฤษฎีโครงสร้างที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะใช้สมมุติฐานเบื้องต้นต่อไปนี้ เป็นหลักการคำนวณโครงสร้าง ดังนี้

1.10.1 วัสดุที่ใช้ทำส่วนของโครงสร้างหนึ่งๆ จะต้องเป็นเนื้อเดียวกันตลอดละมีคุณสมบัติของการรับแรงหรือน้ำหนักบรรทุกเหมือนกันทุกทิศทาง

1.10.2 หน่วยแรงที่เกิดขึ้นภายในเนื้อของวัสดุของส่วนโครงสร้าง จะต้องไม่มากเกินกว่าขีดจำกัดยืดหยุ่นของวัสดุนั้น

1.10.3 การโก่งงอหรือเคลื่อนที่ต่างๆ ของโครงสร้างที่เกิดขึ้น อันเนื่องมาจากการกระทำของแรงหรือน้ำหนักบรรทุก ถือว่ามีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับกับขนาดของโครงสร้างนั้น ฉะนั้นการเพิ่มแรงหรือน้ำหนักอาจสมมุติได้ว่า แรงหรือน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นนี้กระทำต่อส่วนของโครงสร้างนั้นๆ ในขณะที่โครงสร้างยังไม่มีการโก่งงอหรือมีการเคลื่อนที่ใดๆ และค่าของการโก่งงอหรือการเคลื่อนที่ทั้งหมด ณ จุดใด เป็นผลรวมของค่าการโก่งงอหรือเคลื่อนที่ ณ จุดนั้น อันเนื่องมาจากแรงหรือน้ำหนักต่างๆ ที่กระทำบนโครงสร้าง

บทสรุป

1) คำจำกัดความ

ส่วนคำจำกัดความของแรงที่มากระทำต่อโครงสร้าง ดังนี้

(1) แรงกระทำด้านข้าง (Lateral Force) สำหรับแรงลมบนระนาบดิ่ง ซึ่งใช้กันโดยทั่วๆ ไป เท่ากับ 100 $\frac{kg}{m^2}$ ฉะนั้นแรงลมตามแนวตั้งฉากหลังคาสารมารถได้ ดังนี้

ดังนั้น $Pn = \frac{P\theta}{45}$ สมมุติมุมหลังคาเท่ากับ 30 องศา

$\therefore Pn = \frac{100\times 30}{45} = 66.67 \frac{kg}{m^2}$

(2) แรงหนีศูนย์ (Centrifugal Forces) หรือแรงเหวี่ยง หมายถึงแรงที่เท่ากับแรงรั้ง แต่กลับทิศทางเป็นแรงที่เกิดขึ้นเนื่องมาจากน้ำหนักเคลื่อนที่ไปตามแนวโค้ง สำหรับแรงหนีศูนย์หรือแรงเหวี่ยงหาได้จากสูตร ดังนี้

ดังนั้น $C = \frac{0.0675(WV^2)}{R}$ .....(1.7)

เมื่อ :-

C = แรงหนีศูนย์ .....ปอนด์

W = น้ำหนักรถ ……..……ปอนด์

V = ความเร็ว ……..……ปอนด์

R = รัศมีความโค้งของรางรถไฟหรสะพาน……ฟุต

2) สมการของการสมดุล

เมื่อวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำ หมายถึง สภาวะการของวัตถุไม่หมุนและไม่มีการเคลื่อนที่ และสภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นได้ ก็เนื่องมาจากมีแรงต้านทาน หรือโมเมนต์ที่มากระทำต่อวัตถุนั้นมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นสมการสเกลาร์ได้ ดังนี้

$$\Sigma F_x = 0\,,\ \Sigma F_y = 0\,,\ \Sigma M_0 = 0 \quad \text{.....(1.8)}$$

$\Sigma F_x = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน x เท่ากับ 0

$\Sigma F_y = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน y เท่ากับ 0

$\Sigma M_0 = 0$ หมายถึง ผลรวมโมเมนต์ของแรงที่ตั้งฉากแกน y เท่ากับ 0

(1) ทฤษฎีของลามี (Lami's Theory) จะแสดงการสมดุลของแรงที่กระทำร่วมกัน ณ จุดเดียวกันตามทฤษฎีของลามี จะได้ตามสูตร ดังนี้

$$\frac{Q}{\text{Sin}\theta} = \frac{P}{\text{Sin}\gamma} = \frac{R}{\text{Sin}\beta} \quad \text{.....(1.9)}$$

(2) น้ำหนักกระแทก (Impact Load) นอกเหนือไปจากน้ำหนักบรรทุกจรแล้ว จะต้องคิดน้ำหนักกระแทกของรถที่แล่นขึ้นสะพานอย่างทันทีเพิ่มขึ้นอีกด้วย โดยใช้สูตร ดังนี้

$$I = \frac{50}{L+125} \times 100\% \qquad \text{แต่ไม่เกิน } 30$$

เมื่อ I = เศษส่วนของน้ำบรรทุกจร เป็นเปอร์เซ็นต์

L = ช่วงยาวของสะพาน เป็นฟุต

(3) สถิตแบบอินดีเทอมิเนท จำนวนแรงปฏิกิริยาที่มากเกินกว่าจำนวนสมการสมดุลนี้เราเรียกว่าตัวเกิน (Redundant) จำนวนของตัวเกินนี้จะแสดงถึงระดับของอินดีเทอมิเนท (Degree Indeterminate Structures) ใช้สัญลักษณ์ DI ซึ่งจะหมายถึงระดับความต้องการจำนวนสมการเพิ่มเติมอีก รายละเอียด ดังนี้

$$DI = r - e - f \quad \text{.....(1.10)}$$

เมื่อ DI = ระดับอินดีเทอมิเนท

r = จำนวนของแรงปฏิกิริยา

e = จำนวนสมการสมดุล

f = จำนวนสมการจากเงื่อนไขพิเศษกำหนด

(4) โครงถักหรือโครงข้อหมุน (Truss) คือ น้ำหนักบรรทุกกระทำที่จุดต่อเท่านั้น และจุดต่อสามารถหมุนได้ เมื่อพิจารณาจากสามการ 1 จำนวนแรงปฏิกิริยา (r) จะประกอบด้วย แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับรวมกับแรงภายในแต่ละชิ้นส่วน ส่วนจากสมการ (e) จะประกอบด้วยจำนวนสมการสมดุลที่จุดรองรับรวมกับสมการสมดุลของแต่ละจุดต่อ สามารถเขียนเป็นสูตร ได้รายละเอียด ดังนี้

$$e = r - e - f \quad \text{.....(1.11)}$$

เมื่อ e = สมการสมดุลภายนอก+สมการสมดุลของแรงแต่ละจุด

หรือ $e = 3+(2j-3) = 2j$

r = แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ + จำนวนชิ้นส่วน

j = จำนวนสมการสมดุล

f = จำนวนจุดต่อ

(5) โครงข้อแข็ง (Rigid Frame) ประกอบด้วยสมการสมดุลของจุดรองรับรวมกับจำนวนสมการสมดุลของแต่ละจุดต่อ ดังนั้น

$$e = r - e - f \quad \text{.....(1.12)}$$

เมื่อ e = สมการสมดุลภายนอก+สมการสมดุลของแรงแต่ละจุด

หรือ $e = 3+(3j-3) = 3j$

r = แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ + 3(จำนวนชิ้นส่วน)

j = จำนวนสมการสมดุล+(3×จำนวนจุดต่อ-3)

f = จำนวนจุดต่อ

3) สมมุติฐานในการวิเคราะห์

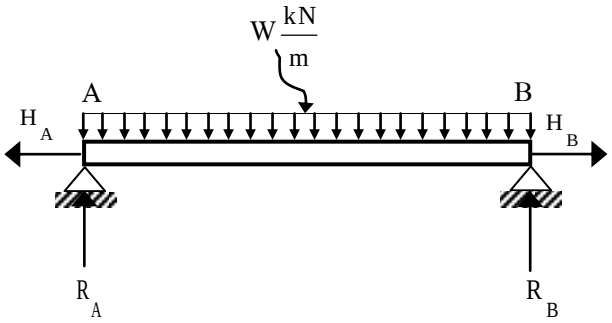
3.1 วัสดุที่ใช้ทำส่วนของโครงสร้างหนึ่งๆ จะต้องเป็นเนื้อเดียวกันตลอดละมีคุณสมบัติของการรับแรงหรือน้ำหนักบรรทุกเหมือนกันทุกทิศทาง

3.2 หน่วยแรงที่เกิดขึ้นภายในเนื้อของวัสดุของส่วนโครงสร้าง จะต้องไม่มากเกินกว่าขีดจำกัดยืดหยุ่นของวัสดุนั้น

3.3 การโก่งงอหรือเคลื่อนที่ต่างๆ ของโครงสร้างที่เกิดขึ้น อันเนื่องมาจากการกระทำของแรงหรือน้ำหนักบรรทุก ถือว่ามีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับกับขนาดของโครงสร้างนั้น ฉะนั้นการเพิ่มแรงหรือน้ำหนักอาจสมมุติได้ว่า แรงหรือน้ำหนักที่เพิ่มขึ้นนี้กระทำต่อส่วนของโครงสร้างนั้นๆ ในขณะที่โครงสร้างยังไม่มีการโก่งงอหรือมีการเคลื่อนที่ใดๆ และค่าของการโก่งงอหรือการเคลื่อนที่ทั้งหมด ณ จุดใด เป็นผลรวมของค่าการโก่งงอหรือเคลื่อนที่ ณ จุดนั้น อันเนื่องมาจากแรงหรือน้ำหนักต่างๆ ที่กระทำบนโครงสร้าง

แบบฝึกหัด

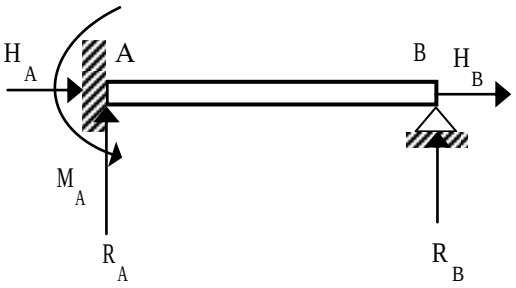
1. คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.42 (DI=1) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน



ภาพที่ 1.42 คานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam)
ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

2. คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Beam) อยู่ในลักษณะสมดุล ดังแสดงในภาพที่ 1.43 จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท (DI=2) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน



ภาพที่ 1.43 คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Beam)

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

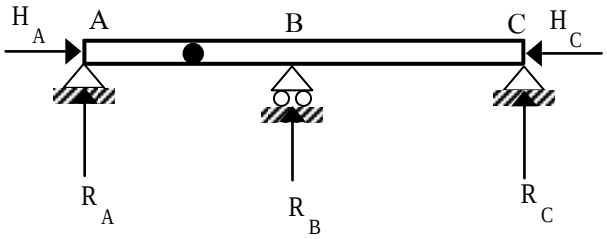
……

……

……

……

3. คานต่อเนื่อง (Continuous Beam) อยู่ในลักษณะสมดุล ดังแสดงในภาพที่ 1.44 จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท (DI=1)



ภาพที่ 1.44 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

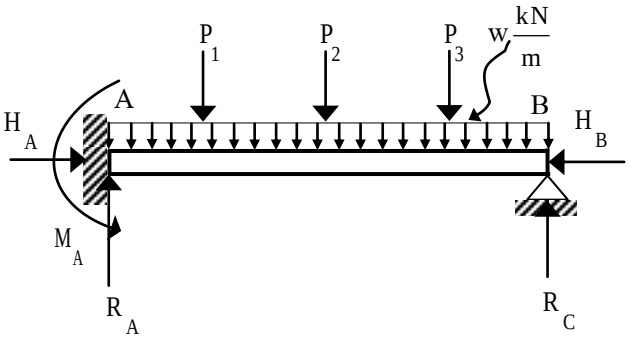
……

……

……

……

4. คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Simple Beam) คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.45 (DI=2)



ภาพที่ 1.45 คานธรรมดายึดแน่น (Fixed Simple Beam)

ที่มา : R.C. Hibbeler. (1994:318)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

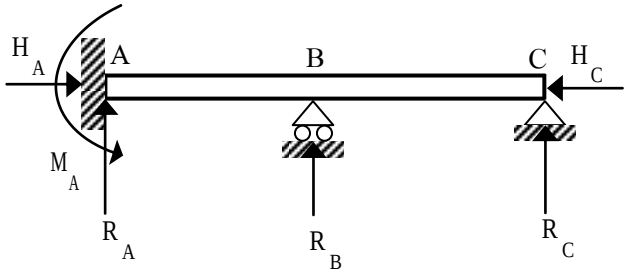
……

……

……

……

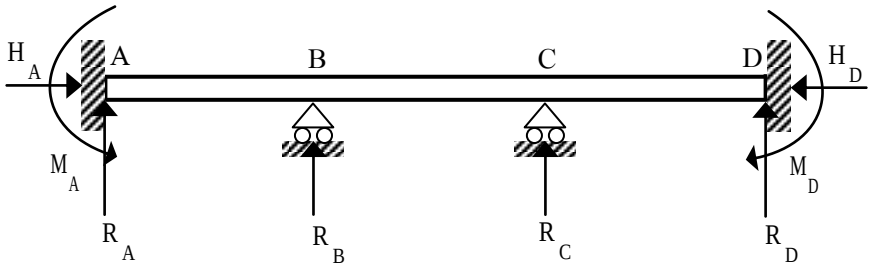
5. คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam) อยู่ในลักษณะสมดุล ดังแสดงในภาพที่ 1.46 จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท (DI=3)



ภาพที่ 1.46 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)
ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:86)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

6. คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท ดังแสดงในภาพที่ 1.47 (DI=5)



ภาพที่ 1.47 คานต่อเนื่องยึดแน่น (Fixed Continuous Beam)

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

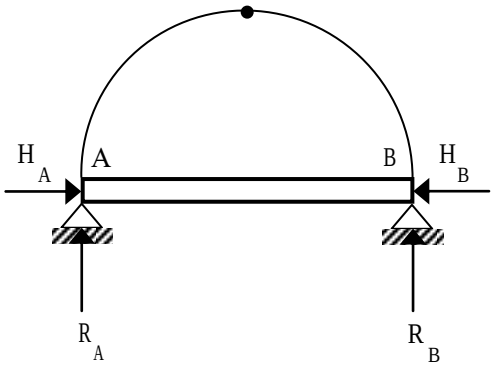
……

……

……

……

7. โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลมมีจุดต่ออยู่ตรงกลาง ดังแสดงในภาพที่ 1.48 จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท (DI=0)



ภาพที่ 1.48 โครงสร้างโค้งรูปครึ่งวงกลม

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

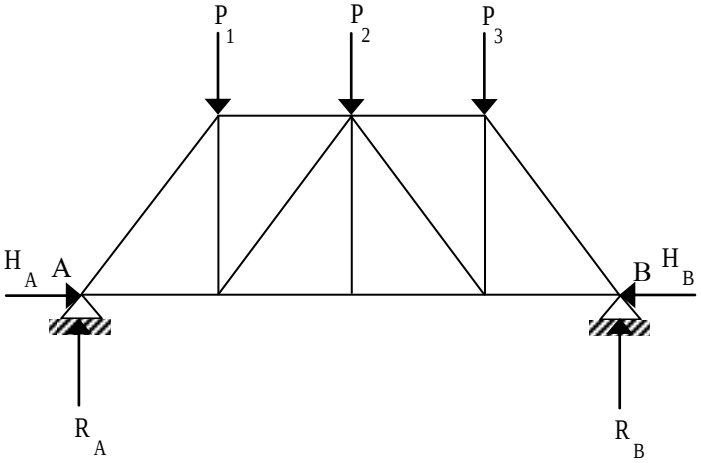
……

……

……

……

8. โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) อยู่ในลักษณะสมดุล ดังแสดงใน ภาพที่ 1.49 จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท (DI=0)



ภาพที่ 1.49 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

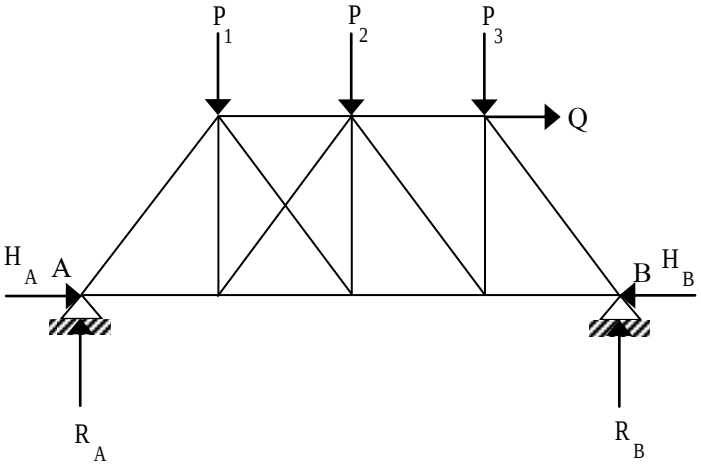
……

……

……

……

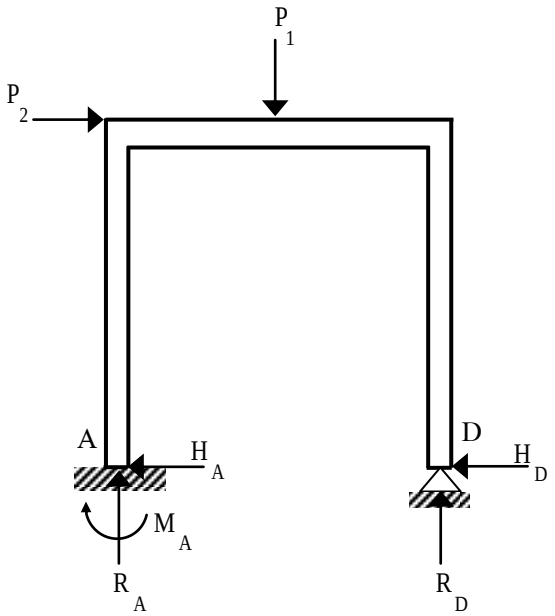
9. โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนทดังแสดงในภาพที่ 1.50 (DI=1)



ภาพที่ 1.50 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)
ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

10. โครงข้อแข็ง (Rigid Frame) อยู่ในลักษณะสมดุล ดังแสดงในภาพที่ 1.51 จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนท (DI=2)



ภาพที่ 1.51 โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2526:10)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (✕) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. แรงที่พยายามทำวัตถุเกิดการเคลื่อนที่หรือหยุดนิ่ง แรงดังกล่าวอาจเป็นแรงดึงหรือแรงอัดเป็นความหมายของแรง

..... 2. ตำแหน่งของแรง คือ ความลาดเอียงของแนวแรงที่กระทำ

..... 3. แนวแรงกระทำ หมายถึง การกระทำของแรงเข้าหาหรือเคลื่อนที่เข้าจุด ฉะนั้นจึงเป็นปริมาณเสกลาร์

..... 4. แรงตามแนวแกน หมายถึงแรงที่พยายามอัดหรือดึงเพื่อให้โครงสร้างหดตัวหรือยืดออก

..... 5. แรงหนีศูนย์จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความชันของเส้นทาง

..... 6. เมื่อวัตถุอยู่ภายใต้แรงกระทำหมายถึงสภาวะการของวัตถุไม่หมุนหรือมีการเคลื่อนที่มากระทำต่อวัตถุนั้น

..... 7. แรงเฉือนจะมีค่าเป็นลบเมื่อด้านซ้ายมือขาดออกจากกัน

..... 8. โมเมนต์ดัดจะมีเครื่องหมายเป็นบวกเมื่อใต้ผิวบนเกิดแรงอัดและผิวล่างเกิดแรงดึง

..... 9. เมื่อโมเมนต์ดัดทำให้คานโค้งลงให้ค่าเป็นบวก (+)

..... 10. เมื่อโมเมนต์ดัดทำให้คานโค้งขึ้นให้ค่าเป็นลบ (–)

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 4 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ในแต่ละชิ้นส่วนจึงมีแรงภายในเป็นแรงตามแนวแกนอย่างเดียวที่จุดต่อเนื่องจากกำหนดให้หมุนได้จึงไม่สามารถรับโมเมนต์ได้ คือข้อใด
   ก. โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)
   ข. โครงสร้างอย่างง่าย (Simple Beam)
   ค. โครงสร้างคานต่อเนื่อง (Continuous Beam)
   ง. โครงสร้างถัก (Truss Structure)
2. แรงกระทำจะเป็นเฉพาะแรงตามแนวดิ่งและตามแนวนอนเท่านั้น คือโครงสร้างข้อใด
   ก. โครงข้อแข็ง (Rigid Frame)
   ข. โครงสร้างอย่างง่าย (Simple Beam)
   ค. โครงสร้างคานต่อเนื่อง (Continuous Beam)
   ง. โครงสร้างถัก (Truss Structure)
3. โครงข้อแข็ง (Rigid Frame) คือข้อใด
   ก. สามารถรับแรงตามแนวแกนและสามารถรับแรงเฉือน
   ข. สามารถรับตามแนวแกน สามารถรับแรงเฉือนได้และไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดได้
   ค. สามารถรับแรงตามแนวแกน สามารถรับแรงเฉือนได้และโมเมนต์ดัดได้
   ง. ถูกข้อ ค และ ง
4. ข้อใดคือสมมุติฐานของการวิเคราะห์โครงสร้างที่ดีถูกต้องมากที่สุด คือข้อใด
   ก. วัสดุที่ใช้ทำเป็นโครงสร้างจะใช้วัสดุหลายๆอย่างผสมกันได้
   ข. คุณสมบัติของวัสดุมีความแตกต่างกัน
   ค. หน่วยแรงที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุของส่วนโครงสร้างจะต้องมากกว่าขีดจำกัดยืดหยุ่น
   ง. ผิดหมดทุกข้อ
5. โครงสร้างแบบดีเทอมิเนท (Determinate Structural) มีดีกรีและตัวที่เกินมีจำนวนเท่าใด
   ก. มีจำนวนดีกรี หรือตัวเกินเท่ากับ 0
   ข. มีจำนวนดีกรี หรือตัวเกินเท่ากับ 1
   ค. มีจำนวนดีกรี หรือตัวเกินเท่ากับ 2
   ง. มีจำนวนดีกรี หรือตัวเกินเท่ากับ 3

6. จำนวนแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับมากกว่าจำนวนสมการสมดุลเราเรียกว่าอะไร คือข้อใด
   ก. สถิตแบบดีเทอมิเนทภายใน
   ข. สถิตแบบอินดีเทอมิเนทภายใน
   ค. สถิตแบบดีเทอมิเนทภายนอก
   ง. สถิตแบบอินดีเทอมิเนทภายนอก
7. จำนวนแรงปฏิกิริยาภายในของโครงสร้างมีจำนวนมากกว่าสมการสมดุลเราเรียกว่าอะไร
   ก. สถิตแบบดีเทอมิเนทภายนอก
   ข. สถิตแบบอินดีเทอมิเนทภายนอก
   ค. สถิตแบบดีเทอมิเนทภายใน
   ง. สถิตแบบอินดีเทอมิเนทภายใน
8. ข้อใดคือความหมายของคานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย คือข้อใด
   ก. ปลายด้านซ้ายยื่นออกไปจากจุดรองรับเท่านั้น
   ข. ปลายด้านขวายื่นออกไปจากจุดรองรับเท่านั้น
   ค. ปลายด้านใดด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นออกไปจากจุดรองรับ
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
9. ความหมายของแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว คือข้อใด
   ก. แบบถ่วงดุลสามารถเคลื่อนที่ได้ทางเดียวแกน x และแกน y
   ข. แบบยึดหมุนไม่มีการเคลื่อนที่และมีแรงปฏิกิริยา 2 แรงขึ้นไป
   ค. ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้
   ง. จุดรองรับจะยึดแน่นอยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาทุกทิศทาง
10. ความหมายของน้ำหนักแผ่รวมกับน้ำหนักที่กระทำแบบเป็นจุด คือข้อใด
   ก. เป็นน้ำหนักบรรทุกที่ใช้แทนน้ำหนักรถบรรทุก
   ข. จะใช้ได้ดีในการตรวจสอบแรงเฉือนที่มากที่สุด
   ค. เป็นน้ำหนักที่กระทำต่อโครงสร้างเป็นบางครั้งบางคราว
   ง. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

ก่อเกียรติ บุญชูกุศลและคณะ.(2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ.(2548). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด, 2546.

เดชัย ด่านวรรณกิจ.(2548). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ.(2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

พิมาน ชาญวานิชบริการ (2541).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แมคกรอ-ฮิล.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546).**ทฤษฎีโครงสร้าง** ภาควิชาครุศาสตร์โยธา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ.

บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

ศิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2536)**. กำลังวัสดุ**. กรุงเทพฯ: พิมพ์ครั้งที่ 4 โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.

เสกสรร ศรียศ. (2550). **กลศาสตร์วิศวกรรม1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แมคกรอ-ฮิล.

สมนึก กุลประภา (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์. (2536). **กลศาสตร์วัสดุ,** กรุงเทพพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สุรศักดิ์ รายี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

อำนวย พาณิชกุล (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วทัชภพ เดชพันธ์ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

วินิจ ช่อวิเชียร (2521).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วินิจ ช่อวิเชียร (2528).**ทฤษฎีโครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522)**. กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980)**. Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Elwyn E. Seelye. (1960)**. Data book for civil engineers**. New York.

Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Jr. (1985)**. Mechanics of Materials**: McGraw – Hill Ryerson Limited.

Jan J. Tuma (1969).Theory and Problems of Structural Analysis.The McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

J.B.Wilbur (1965). **Elementary Structural Analysis ,**2^{nd} Ed, Mc Graw-Hill,New York.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

Timoshenko,S.P. (1969).**S.P. and D.H.Young: Throry of Structures**, 2ed Ed., McGraw-Hill New York,

YUAN-YU HSIEH (1995)**.Elementary theory of Structural,** U.S.A,Mexico.

หน่วยที่ 2 แรงปฏิกิริยา

เนื้อหาสาระ

2.1 บทนำ

2.2 สมการสมดุล 2 มิติ

2.3 ชนิดของที่รองรับ

2.4 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

2.5 ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา

จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 อธิบายความหมายของสมการสมดุล 2 มิติได้

2.2 สามารถคำนวณหาสมการสมดุลของแรงในระบบ 2 มิติได้

2.3 อธิบายความหมายของกชนิดของที่รองรับได้

2.4 สามารถคำนวณหาแรงปฏิกิริยาได้

2.5 อธิบายขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยาได้

แนวคิดในการสอน

สำหรับแรงปฏิกิริยาสามารถนำไปใช้ในการออกแบบโครงสร้างได้ เช่น การออกแบบฐานราก การออกแบบเสา การออกแบบเหล็กปลอก และอื่นๆ เป็นต้น ดังนั้นผู้ศึกษาและผู้ที่สนใจจะต้องมีความเข้าใจในหลักการและแนวคิด ทฤษฎี เป็นอย่างดีเกี่ยวกับแรงปฏิกิริยา สามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ตรงตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ ในการหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างต่างๆ นั้นจะต้องสามารถวิเคราะห์ชนิดของโครงสร้างต่างๆ อย่างเข้าใจ ซึ่งผู้เขียนได้แสดงวิธีการวิเคราะห์โครงสร้างไว้ในหน่วยที่ 1 และสามารถนำมาใช้คำนวณหาแรงปฏิกิริยาได้ในหน่วยที่ 2 นี้ได้ และจะกล่าวถึงการวิเคราะห์โครงสร้างอย่างง่ายแบบอินดีเทอมิเนท (Determinate Structural) ที่มี DI=0 เท่านั้น โดยจะใช้สมการสมดุลเพียงอย่างเดียว ใช้สมการสมดุลเพียงสามสมการเท่านั้น ในการหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างจะมีตัวที่ไม่ทราบค่า (Unknow) ได้ไม่เกิน 3 ตัว ส่วนแรงกระทำต่อโครงสร้างมี 2 ชนิด ได้แก่ แรงกระทำ (Active Force) และแรงต้านทานตรงฐานรองหรือ ที่รองรับ (Supporting Force) เพื่อให้เกิดสภาวะความสมดุลเป็นต้น แรงแบบหลังนี้เรียกว่า “แรงปฏิกิริยา” (Reaction Force) ทั้งนี้เพราะว่าเป็นแรงปฏิกิริยาที่ตอบโต้ หรือต้านทานต่อแรงที่มากระทำ แรง

ปฏิกิริยาดังกล่าวหมายความรวมถึงแรงและโมเมนต์ดัด ฉะนั้นจะต้องมีทั้งขนาด ทิศทางและตำแหน่งที่กระทำ จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการเรียนรู้เกี่ยวกับการหาแรงปฏิกิริยา ดังนั้นผู้เรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับสมการสมดุล 2 มิติ แบบของที่รองรับ การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา และขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

2.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

2.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

2.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

2.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

2.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

2.1 สื่อ Power Point

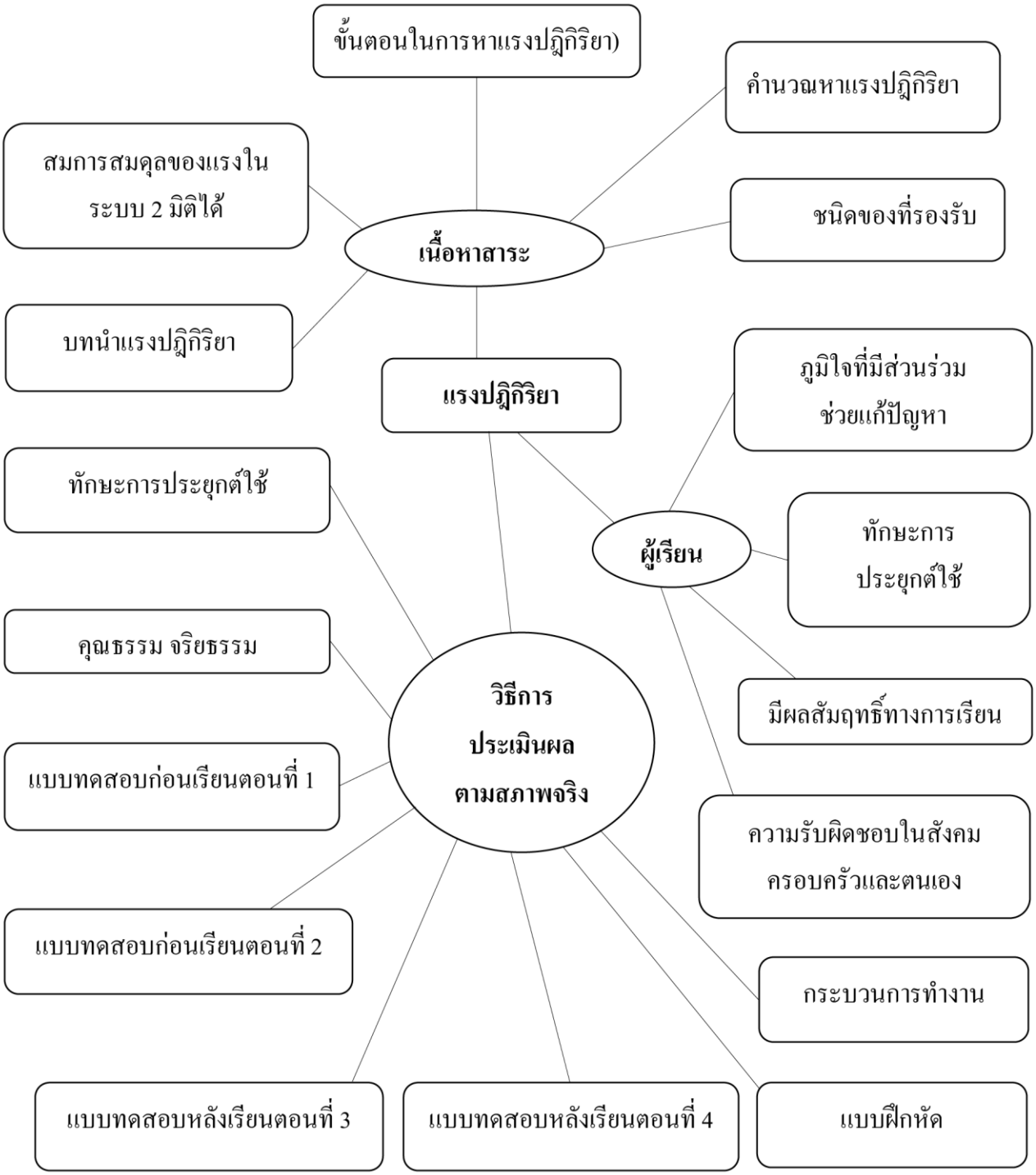
2.2 สื่อแผ่นใส

2.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

2.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 1 จากโจทย์ที่กำหนดให้ จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. แรงปฏิกิริยาเป็นแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำที่ฐานรองรับ

..... 2. จำนวนของแรงปฏิกิริยาของแต่ละฐานรองรับจะขึ้นอยู่กับแบบของจุดรองรับ

..... 3. จุดรองรับ แบบยึดหมุนและเคลื่อนที่ไม่ได้จะมีแรงปฏิกิริยาในทิศทางตั้งฉากและไม่
มีทิศทางตั้งฉากกับฐานรองรับ

..... 4. ในการวิเคราะห์สมการสมดุลเพียงสองสมการเท่านั้น

..... 5. ในหารหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างจะมีตัวที่ไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ตัว (Unknown)

..... 6. แรงต้านทานตรงฐานรองรับหรือที่รองรับเพื่อให้เกิดสภาวะสมดุลเรียกว่าแรงในแนวแกน x

..... 7. แรงปฏิกิริยาเป็นแรงที่ตอบโต้หรือต้านทานต่อแรงที่มากระทำ

..... 8. แรงปฏิกิริยาตัวกลางหมายความรวมถึงแรงเฉือนและแรงกระทำ

..... 9. แรงปฏิกิริยาจะมีทั้งขนาด มีทิศทางและตำแหน่งที่มากระทำ

..... 10. สภาวะการของวัตถุไม่หมุนและไม่มีการเคลื่อนที่เรียกว่าวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงที่มากระทำ

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดคือความหมายของแรงปฏิกิริยา คือข้อใด
   ก. เป็นแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำที่ฐานรองรับเพื่อให้โครงสร้างเกิดสภาวะสมดุล
   ข. เป็นโมเมนต์หรือแรงกระทำที่ฐานรองรับเพื่อให้โครงสร้างเกิดสภาวะสมดุล
   ค. จำนวนของแรงปฏิกิริยาของแต่ละฐานรองรับจะขึ้นอยู่กับแบบของจุดแต่ละจุด
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
2. ในการวิเคราะห์หาค่าของแรงปฏิกิริยาต่างๆ สำหรับโครงสร้างดีเทอมิเนท ข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง
   ก. ใช้สมการสมดุลเพียงอย่างเดียว
   ข. ใช้สมการสมดุลเพียงสามสมการเท่านั้น
   ค. การหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างจะมีตัวที่ไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ตัวเท่านั้น
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
3. ข้อใดคือความหมายของโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท
   ก. มีดีกรีอินดีเทอมิเนทมากกว่าศูนย์
   ข. มีดีกรีอินดีเทอมิเนทมากกว่า 3 ตัวขึ้นไป
   ค. เป็นคานช่วงเดียวธรรมดา
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
4. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง
   ก. แรงต้านทานตรงฐานตั้งแต่สองฐานรองรับขึ้นไป
   ข. ที่รองรับของของฐานอาจจะเกิดการเคลื่อนที่ได้
   ค. ที่ฐานรองรับเพื่อให้เกิดสภาวะสมดุล
   ง. เป็นแรงที่โต้ตอบหรือต้านทานต่อแรงที่มากระทำไม่ได้
5. วัตถุอยู่นิ่งอยู่ภายใต้แรงกระทำคือความหมายข้อใด
   ก. สภาวะของวัตถุไม่หมุนและมีการเคลื่อนที่
   ข. สภาวะของวัตถุหมุนและมีการเคลื่อนที่
   ค. สภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นได้ก็เนื่องมาจากมีแรงต้านทาน
   ง. โมเมนต์ที่มากระทำต่อวัตถุนั้นมีค่าเป็นหนึ่งเสมอ

6. การวิเคราะห์สมการสมดุล 2 มิติ สามารถวิเคราะห์ตามลักษณะของประเภทการสมดุลได้กี่ประเภท คือข้อใด
   ก. แบ่งได้เป็น 6 ประเภท
   ข. แบ่งได้เป็น 5 ประเภท
   ค. แบ่งได้เป็น 4 ประเภท
   ง. แบ่งได้เป็น 3 ประเภท
7. ข้อใดคือความหมายของการสมดุลของแรงขนานกัน
   ก. มีแรงพบกันตั้งแต่สองจุดขึ้นไปจึงจะเกิดการสมดุล
   ข. การแก้ปัญหาของสมการสมดุลของแรงชนิดนี้โดยการใช้ $\sum F_X = 0$ เท่านั้น
   ค. แรงพบกันที่จุดเดียว สมการสมดุลชนิดนี้มาจากแรงที่กระทำต่อวัตถุในสภาวะสมดุล
   ง. เป็นการสมดุลของแรงที่มีทิศทางตรงข้ามกันกระทำต่อวัตถุชิ้นเดียวกัน
8. การวิเคราะห์การสมดุลของแรงขนานกันข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง
   ก. เป็นการสมดุลของแรงที่มีทิศทางตรงกันข้ามกันกระทำต่อชิ้นส่วนสองชิ้นที่มาต่อกัน
   ข. ระบบแรง 2 มิติที่อยู่ในสภาวะสมดุลและเงื่อนไขของการสมดุลที่มีแนวแรงขนานกัน
   ค. ระบบแรง 2 มิติที่ทิศทางขนานกันกระทำต่อชิ้นส่วนเดียวกัน
   ง. ข้อ ก และ ค ถูกต้อง
9. ข้อใดคือความหมายของการสมดุลของแรง 2 มิติในแนวเส้นตรงเดียวกัน
   ก. มีทิศทางสวนทางกัน
   ข. มีทิศทางและขนาดไม่เท่ากัน
   ค. มีสมการสมดุลเพียงสมการเดียว
   ง. มีแรงกระทำที่มีทิศทางตรงข้ามกับแรงลัพธ์
10. การสมดุลทั้งระบบที่มีทั้งโมเมนต์และแรงกระทำในแนวแกน x และ y คือความหมายข้อใด
   ก. การสมดุลของแรง 2 มิติในแนวเส้นตรงเดียวกัน
   ข. การสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกัน
   ค. การสมดุลของแรง 2 มิติที่มีระบบแรงทั่วไป
   ง. การสมดุลของแรงขนานกัน

2.1 บทนำ

แรงปฏิกิริยา (Reaction) หมายถึง เป็นแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำที่ฐานรองรับเพื่อให้โครงสร้างเกิดสภาวะสมดุลกับน้ำหนักบรรทุก จำนวนของแรงปฏิกิริยาของแต่ละฐานรองรับจะขึ้นอยู่กับแบบของจุดรองรับ จุดรองรับแบบยึดหมุนและเคลื่อนที่ได้ จะมีแรงปฏิกิริยาในทิศทางตั้งฉากกับฐานรองรับเพียง 1 ตัว จุดรองรับแบบยึดหมุนและเคลื่อนที่ไม่ได้จะมีแรงปฏิกิริยาในทิศทางตั้งฉากและทิศทางขนานกับฐานรองรับและโมเมนต์รวม 3 ตัว

ในการวิเคราะห์หาค่าของแรงปฏิกิริยาต่างๆ สำหรับโครงสร้างอย่างง่ายแบบดีเทอมิเนท (Determinate Structural) มี DI=0 จะใช้สมการสมดุลเพียงอย่างเดียว ใช้สมการสมดุลเพียงสามสมการเท่านั้น ในการหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างจะมีตัวที่ไม่ทราบค่า (Unknow) ได้ไม่เกิน 3 ตัว ส่วนโครงสร้างอย่างยากแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate Structural) มี DI > 0 นั้นจะใช้สมการสมดุลร่วมกับสมการจากวิธีการวิเคราะห์แบบอื่นๆ และจะมีตัวที่ไม่ทราบค่า (Unknow) เกิน 3 ตัวขึ้นไป จะได้กล่าวต่อไปในหน่วยที่ 7 ของเรื่องสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Eqration) ต่อไปในหน่วยนี้จะพิจารณาเฉพาะโครงสร้างแบบเทอมิเนทเท่านั้น สำหรับแรงกระทำต่อโครงสร้างมี 2 ชนิด ได้แก่ แรงกระทำ (Active Force) และแรงต้านทานตรงฐานรองหรือ ที่รองรับ (Supporting Force) เพื่อให้เกิดสภาวะความสมดุลเป็นต้น แรงแบบหลังนี้เรียกว่า “**แรงปฏิกิริยา**” (Reaction Force)ทั้งนี้เพราะว่าเป็นแรงปฏิกิริยาที่ตอบโต้ หรือต้านทานต่อแรงที่มากระทำ แรงปฏิกิริยาดังกล่าวหมายความรวมถึงแรงและโมเมนต์ดัด ฉะนั้นจะต้องมีทั้งขนาด ทิศทางและตำแหน่งที่กระทำ

2.2 สมการการสมดุลในระบบ 2 มิติ

เมื่อวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำ หมายถึง สภาวะการของวัตถุไม่หมุนและไม่มีการเคลื่อนที่ และสภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นได้ ก็เนื่องมาจากมีแรงต้านทาน หรือโมเมนต์ที่มากระทำต่อวัตถุนั้นมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$\Sigma H = 0\,,\ \Sigma V = 0\,,\ \Sigma M = 0 \qquad \text{.....(2.1)}$$

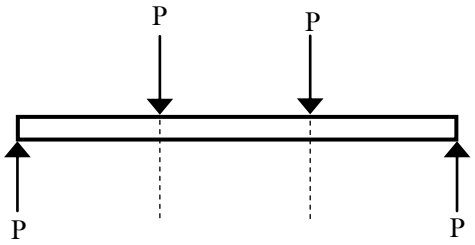
$\Sigma H = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน x เท่ากับ 0

$\Sigma V = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน y เท่ากับ 0

$\Sigma M_0 = 0$ หมายถึง ผลรวมโมเมนต์ของแรงที่ตั้งฉากแกน y เท่ากับ 0

ดังนั้นในการวิเคราะห์สมดุล 2 มิติ จึงแยกทำการวิเคราะห์ตามลักษณะของประเภทของการสมดุล ดังนี้เราสามารถแยกได้ 4 อย่าง ได้แก่ การสมดุลของแรงขนานกัน การสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกัน การสมดุลของมีแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกันและการสมดุลของแรง 2 มิติที่มีระบบแรงทั่วไป เป็นต้น มีรายละเอียด ดังนี้

2.2.1 การสมดุลของแรงขนานกัน การสมดุลในลักษณะนี้จะเป็นการสมดุลของแรงที่มีทิศทางตรงข้ามกันกระทำต่อวัตถุชิ้นเดียวกัน จึงทำให้ระบบแรง 2 มิติที่อยู่ในสภาวะสมดุลและเงื่อนไขของการสมดุลของแรง 2 มิติที่มีแนวแรงขนานกัน คือ $\Sigma F_y = 0$ และ $\Sigma M_0 = 0$ ดังแสดงในภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 แสดงสมดุลของแรงขนานกัน
ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:31)

2.2.2 การสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกัน ที่มีแนวแรงพบกันที่จุดเดียว การสมดุลชนิดนี้มาจากแรงที่กระทำต่อวัตถุในสภาวะสมดุล แนวแรงทั้งหมดจะต้องตัดกันที่จุดใดจุดหนึ่ง และสมการของการสมดุลของแรง 2 มิติคือ ΣF_x และ ΣF_y แต่ในการแก้ปัญหาของการสมดุลของแรงชนิดนี้โดยการใช้ทฤษฎีการสมดุลของแรง

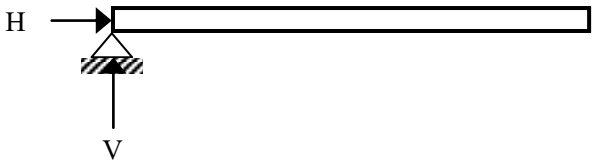
2.2.3 การสมดุลของแรง 2 มิติ ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เกิดจากแรงภายนอกกระทำต่อวัตถุไม่มากเกิน 2 แรง ในขณะเดียวกันแรงจะต้องมีทิศทางตรงกันข้ามและมีทิศทางและขนาดเท่ากันอยู่ในเส้นเดียวกัน มีสมการของการสมดุลเพียงสมการเดียวเท่านั้น

2.2.4 การสมดุลของแรง 2 มิติ ที่มีระบบแรงทั่วไป คือ การสมดุลทั้งระบบที่มีทั้งโมเมนต์และแรงในแนวแกน x แกน y และเป็นการหาโมเมนต์ของแรงและแรงในแนวแกน x ที่ทำให้ระบบอยู่ในภาวะสมดุลโดยเงื่อนไขของการสมดุลของแรง 2 มิติ ที่มีระบบแรงทั่วไป ได้แก่ $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_0 = 0$

2.3 แบบของที่รองรับ

ในการออกแบบโครงสร้างอาคาร จะต้องมีความรู้ ทักษะความชำนาญในการหาแรงปฏิกิริยาเพื่อจะนำไปใช้ในการหาแรงเฉือนสูงสุด โมเมนต์สูงสุด และนำไปออกแบบโครงสร้างต่างๆ ต่อไป สิ่งที่สำคัญจะต้องหาแรงปฏิกิริยาก่อนเสมอ นั้นก็คือสัญลักษณ์และเครื่องหมายของโครงสร้าง ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 แบบ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

2.3.1 แบบยึดหมุน (Hing) ลักษณะการยึดหมุนแบบนี้จะไม่มีการเคลื่อนที่ และมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้น 2 ทางการทำงานเหมือนกับบานพับจะหมุนรอบแกน ค่าของโมเมนต์ที่จุดชนิดนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ จุดรองรับแบบนี้จะรับแรงได้ทั้งแนวดิ่งและแนวนอน ดังแสดงในภาพที่ 2.2

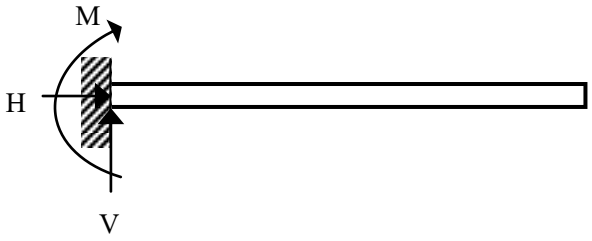


ภาพที่ 2.2 ฐานรองรับแบบยึดหมุน (Hing)
ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

2.3.2 แบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว (Roller Support) ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้ ชนิดแบบหมุนและเคลื่อนที่แบบนี้รับแรงได้ทางดิ่งอย่างเดียว ดังแสดงในภาพที่ 2.3

ภาพที่ 2.3 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2544:54)

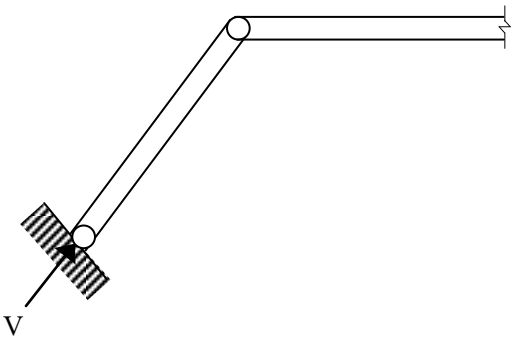
2.3.3 แบบยึดแน่น (Fixed Support) จุดรองรับแบบนี้จะยึดแน่นอยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ไม่ได้ จึงทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาทุกทิศทาง จึงมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้นทั้ง 2 ทิศทางและมีโมเมนต์เดียว ดังแสดงในภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.4 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

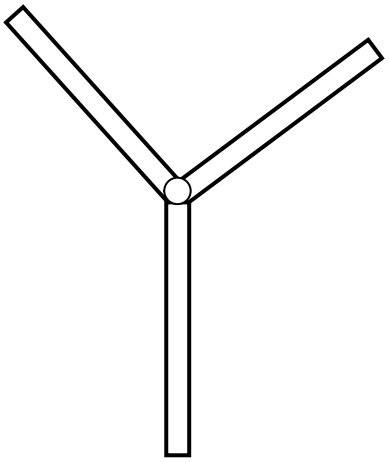
2.3.3.1 แบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support) ที่ปลายทั้งสองข้างของข้อต่อสมมุติว่าเป็นแบบยึดหมุนไม่มีแรงเสียดทานใดๆ ทั้งสิ้น ฉะนั้นแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับจึงมีเพียงตัวเดียวเท่านั้นในแนวของข้อต่อที่ผ่านหมุดยึดหมุนทั้งสองที่รองรับแบบนี้มีลักษณะคล้ายกับแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ๆได้ ดังแสดงในภาพที่ 2.5



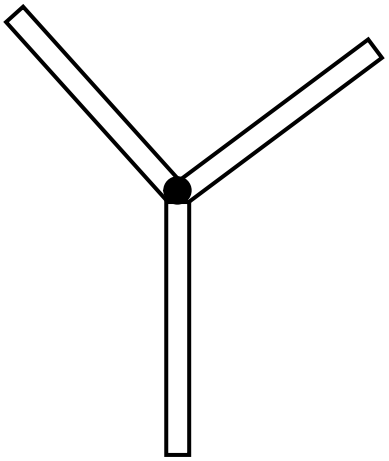
ภาพที่ 2.5 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

2.3.3.2 จุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint) จุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อของโครงสร้างที่เกิดจากการนำปลายของแต่ละส่วนของโครงสร้างมาต่อยึดกัน มีอยู่ 2 แบบ คือ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) และจุดต่อ (Rigid Joint) ที่จุดต่อแบบยึดหมุนไม่มีการถ่ายโมเมนต์ดัดจากส่วนโครงสร้างหนึ่งไปอีกโครงสร้างหนึ่ง ฉะนั้นผลรวมของโมเมนต์ดัดที่จุดต่อนี้จึงเป็นศูนย์ แต่ที่จุดต่อแบบยึดรั้งจะมีการถ่ายโมเมนต์ดัดจากส่วนของโครงสร้างหนึ่งไปอีกส่วนของโครงสร้างหนึ่ง โดยที่ส่วนของโครงสร้างอันใดอันหนึ่งตรงจุดต่อหมุนไปเป็นมุมเท่าใด ส่วนโครงสร้างอื่นๆที่นำมาต่อกันตรงจุดต่อนั้นจะหมุนไปในทิศทางเดียวกันและเป็นมุมเท่ากันด้วย ดังแสดงในภาพที่ 2.6 และ 2.7



ภาพที่ 2.6 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Pinned Joint)
ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

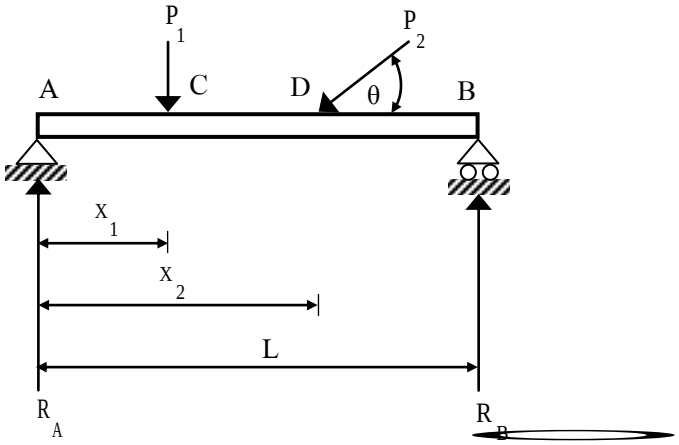


ภาพที่ 2.7 ฐานรองรับแบบยึดรั้ง (Rigid Joint)
ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

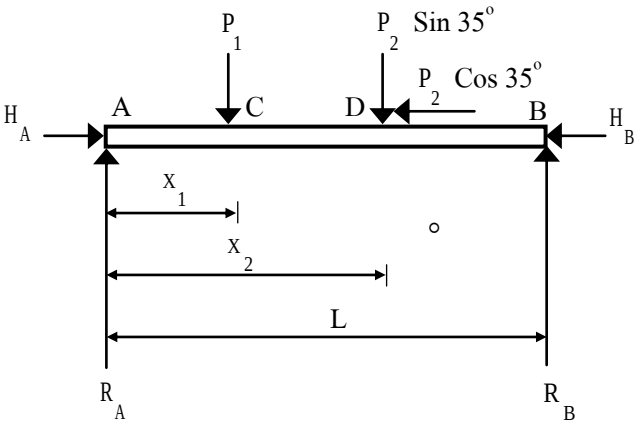
2.4 การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

ในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยา (Reaction) ที่เป็นตัวไม่รู้ค่าในโครงสร้างดีเมอมิเนท สามารถทำได้ไม่ยากนัก ทั้งนี้โดยอาศัยสมการของการสมดุล อย่างไรก็ดีวิธีคำนวณนี้มีอยู่ 2 วิธี คือ วิธีคำนวณทางพีชคณิต (Algebraic Solution) และวีคำนวณหาแรงปฏิกิริยาโดยการเขียนภาพ Graphical Solution) ในหน่วยนี้จะกล่าวเฉพาะวิธีคำนวณทางพีชคณิตเท่านั้น

เมื่อพิจารณาโครงสร้างประเภทคานช่วงเดียว AB ซึ่งมีช่วงความยาว L และรับน้ำหนักบรรทุก P_1 และ P_2 ดังแสดงในภาพที่ 2.8 และ 2.9 สำหรับขั้นตอนในการคำนวณทางพีชคณิตเพื่อหาค่าของแรงปฏิกิริยา มีดังนี้



ภาพที่ 2.8 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



ภาพที่ 2.9 การเขียน Free Body Diagram
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

สำหรับขั้นตอนแรกในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาตัวไม่รู้ค่ากี่ตัวที่จะต้องหาเพื่อใช้พิจารณาดูว่าเป็นโครงสร้างแบบดีเทอมิเนท (Determinate Structural) หรือโครงสร้างแบบอินดีเทมิเนท (Indeterminate Structural)

ที่จุด A ซึ่งแบบที่รองรับเป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าจึงมีทั้งขนาดและทิศทาง อย่างไรก็ตามแนวของแรงปฏิกิริยานี้จะต้องผ่านจุดยึดหมุนนี้ ส่วนที่จุด B ซึ่งเป็นแบบของที่รองรับเป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ ดังนั้น แรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าจึงมีแต่ขนาดของแรงเพียงอย่างเดียว ทั้งนี้เพราะว่าแรงปฏิกิริยาที่จุด B นี้ต้องตั้งได้ฉากกับฐานรอง และมีทิศทางผ่านจุดหมุนนี้ ฉะนั้นสิ่งที่ไม่รู้ค่าจึงมี 3 อย่าง ดังนั้นโครงสร้างนี้จึงเป็นโครงสร้างแบบดีเทอมิเนท การแก้ปัญหาก็สามารถใช้สมการของการสมดุลทั้งสามได้

ขั้นตอนที่สองเลือกแกนตั้งฉากสองแกน โดยทั่วไปนิยมใช้แกน X เป็นแกนนอน และแกน Y เป็นแกนตั้ง

ขั้นตอนที่สาม ทำการแตกแรงให้อยู่ในแนวแกนนอน X และแกนตั้ง Y ดังแสดงในภาพที่ 2.9 สมมุติให้แรงปฏิกิริยาในแนวนอนและแนวตั้งเป็นไปตามภาพที่แสดงไว้ การแตกแรงนี้จะทำให้การหาแขนของโมเมนต์ (Moment Arm) ง่ายขึ้น

และขั้นตอนสี่ใช้สมการของการสมดุล คำนวณหาแรงปฏิกิริยาต่าง รายละเอียด ดังนี้

$$\Sigma F_x = 0 : H_A - P_2 \text{Cos}\ \theta - H_B \quad \text{.....(2.2)}$$

$$\Sigma F_y = 0 : R_A - P_1 - P_2 \text{Cos}\ \theta + R_B \quad \text{.....(2.3)}$$

$$\Sigma M_A = 0 : R_A L - P_1 x_1 - P_2 \text{Sin}\ \theta \quad \text{.....(2.4)}$$

จากสมการที่กล่าวมา จะมีตัวไม่รู้ค่าจำนวน 4 ตัว ได้แก่ R_A , R_B , H_A และ R_B เนื่องจากแรงปฏิกิริยาที่ R_B ต้องได้ฉากกับฐานรองรับ ทำให้แรงปฏิกิริยาตัวไม่รู้ค่าจริงๆ เหลือเพียง 3 ตัวเท่านั้น จึงสามารถแก้สมการได้ รายละเอียดของสมการ ดังนี้

$$H_B = R_B \tan\theta$$

2.5 ขั้นตอนในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

สำหรับขั้นตอนในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยามีรายละเอียด ดังนี้

2.5.1 ให้พิจารณาโครงสร้างดูก่อนว่าเป็นโครงสร้างแบบดีเทอมิเนท (Determinate Structural) หรือโครงสร้างแบบอินดีเทมิเนท (Indeterminate Structural) ทำการสังเกตจากแรงปฏิกิริยาว่ามีตัวที่ไม่รู้ค่าอยู่จำนวนกี่ตัว ดังนี้

2.5.1.1 สังเกตที่จุด A ที่จุด A ที่รองรับเป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ ฉะนั้นแรงปฏิกิริยาที่จุดนี้จึงมีทั้งขนาดละทิศทางคือ R_A และ R_B อย่างไรก็ตามแนวของแรงปฏิกิริยานี้จะต้องกระทำผ่านจุดยึดหมุน

2.5.1.2 ให้สังเกตที่จุด B ที่รองรับแบบนี้เป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ แรงปฏิกิริยาที่จุด B ตั้งได้ฉากกับฐานรองรับและมีทิศทางผ่านจุดยึดหมุนนี้ นั้นแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าจึงมีแต่ขนาดของแรงเพียงอย่างเดียวคือ R_B

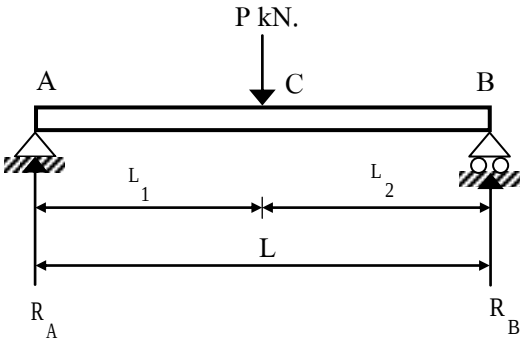
ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าของโครงสร้างนี้จึงมีเพียง 3 สมการ ได้แก่ R_A ,R_B และ H_A ฉะนั้นโครงสร้างนี้จึงเป็นโครงสร้างแบบ ดีเทอมิเนท (Determinate Structural)

2.5.2 ทำการเลือกแกนตั้งฉาก 2 แกน โดยให้แกน X เป็นแนวนอน และแกน Y เป็นแนวตั้ง

2.5.3 แตกแรงต่างๆ ให้อยู่ในแกน X และแกน Y

2.5.4 ใช้สมการของการสมดุลข้างต้นทำการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาต่อไป

ตัวอย่างที่ 2.1 จากภาพที่ 2.10 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน



ภาพที่ 2.10 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times L - P \times L_2 = 0$$

$$R_A \times L = P \times L_2$$

$$R_A = \frac{PL_2}{L}$$

$$\therefore \quad R_A = \frac{PL_2}{L} \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times L + P \times L_1 = 0$$

$$P \times L_1 = R_B \times L$$

$$\frac{PL_1}{L} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{PL_1}{L} \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - P = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ $\frac{PL_2}{L}$ kN.

$$\frac{PL_2}{L} + R_B - P = 0$$

$$\frac{PL_2 - PL}{L} + R_B = 0$$

$$\frac{PL_2 - P(L_1 - L_2)}{L} + R_B = 0$$

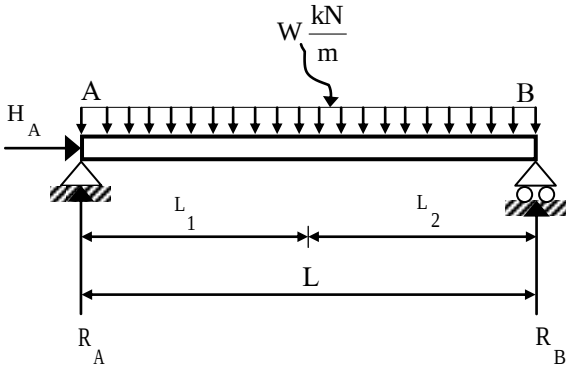
$$\frac{PL_2 - PL_1 - PL_2}{L} + R_B = 0$$

$$\frac{-PL_1}{L} + R_B = 0$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{PL_1}{L} \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ $\frac{PL_2}{L}$ kN. $(\uparrow^+)$ และ R_B เท่ากับ $\frac{PL_1}{L}$ kN. $(\uparrow^+)$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.2 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดงแสดงในภาพที่ 2.11



ภาพที่ 2.11 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times L - WL \times \frac{L}{2} = 0$$

$$R_A \times L - \frac{WL^2}{2} = 0$$

$$R_A = \frac{WL^2}{2L}$$

$$\therefore \quad R_A = \frac{WL}{2} \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^+\circlearrowleft^-$

$$-R_B \times L + WL \times \frac{L}{2} = 0$$

$$\frac{WL^2}{2L} = R_B \times L$$

$$\frac{WL}{2} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{WL}{2} \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - WL = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ $\frac{WL}{2}$ kN.

$$\frac{WL}{2} + R_B - WL = 0$$

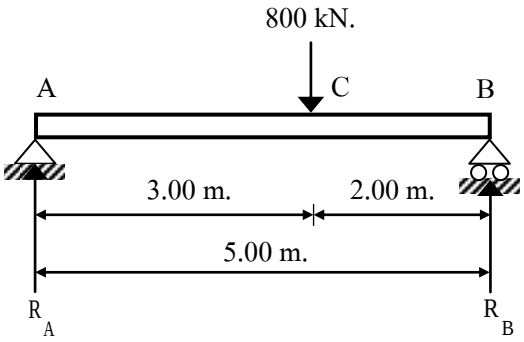
$$\frac{WL - 2LW}{2} + R_B = 0$$

$$-\frac{WL}{2} + R_B = 0$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{WL}{2} \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ $\frac{WL}{2}$kN. $(\uparrow^+)$ และ R_B เท่ากับ $\frac{WL}{2}$ kN. $(\uparrow^+)$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.3 จากภาพที่ 2.12 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน



ภาพที่ 2.12 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 800 \times 2.00 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 1{,}600 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 1{,}600$$

$$R_A = \frac{1{,}600}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 320 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 800 \times 3.00 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 2{,}400 = 0$$

$$2{,}400 = R_B \times 5.00$$

$$\frac{2{,}400}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 480 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 800 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 320 kN.

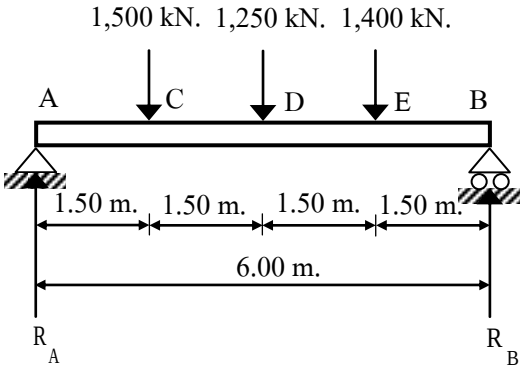
$$320 + R_B - 800 = 0$$

$$R_B - 480 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 480 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 320 kN. ($\uparrow^+$) และ R_B เท่ากับ 480 kN. ($\uparrow^+$) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.4 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ดังแสดงในภาพที่ 2.13 ของคานโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล



ภาพที่ 2.13 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1{,}500 \times 4.50 - 1{,}250 \times 3.00 = 0$$

$$- 1{,}400 \times 1.50$$

$$R_A \times 6.00 - 12{,}600 = 0$$

$$R_A \times 6.00 = 12{,}600$$

$$R_A = \frac{12{,}600}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 2{,}100 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times 6.00 + 1{,}500 \times 1.50 + 1{,}250 \times 3.00 = 0$$

$$+1{,}400 \times 4.50$$

$$-R_B \times 6.00 + 12{,}300 = 0$$

$$12{,}300 = R_B \times 6.00$$

$$\frac{12{,}300}{6.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}050 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 1{,}500 - 1{,}250 - 1{,}400 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 2,100 kN.

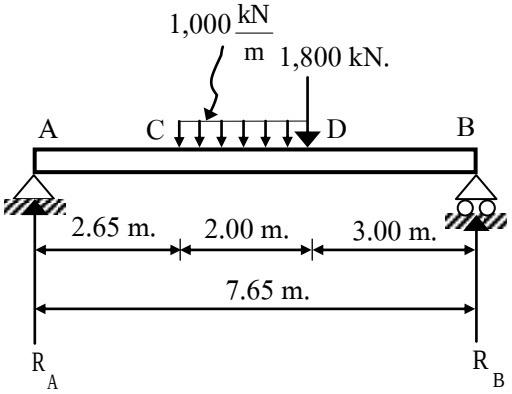
$$2{,}100 + R_B - 1{,}500 - 1{,}250 - 1{,}400 = 0$$

$$R_B - 2{,}050 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}050 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 2,100 kN. ($\uparrow^+$) และ R_B เท่ากับ 2,050 kN. ($\uparrow^+$) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.5 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 2.14



ภาพที่ 2.14 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$+R_A \times 7.65 - 1,800 \times 3.00 - 1,000 \times 2.00 \times \left[\frac{2.00}{2} + 3.00\right] = 0$$

$$R_A \times 7.65 - 13,400 = 0$$

$$R_A \times 7.65 = 13,400$$

$$R_A = \frac{13,400}{7.65}$$

$$\therefore \quad R_A = 1,751.63 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$+R_A \times 7.65 + 1,800 \times 4.65 - 1,000 \times 2.00 \times \left[\frac{2.00}{2} + 2.65\right] = 0$$

$$-R_B \times 7.65 + 8,370 + 7,300 = 0$$

$$-R_B \times 7.65 + 15.670 = 0$$

$$\frac{15,670}{7.65} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 2,048.37 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1,800 - 1,000 \times 2.00 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 2,048.37 kN.

$$+2,048.37 + R_A - 1,800 - 1,000 \times 2.00 = 0$$

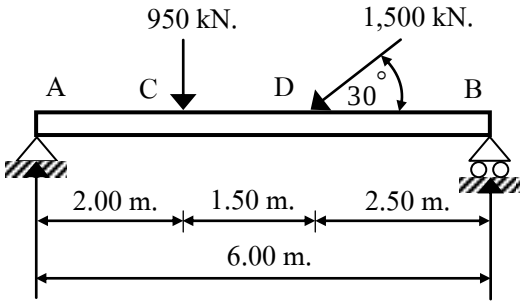
$$+2,048.37 + R_A - 1,800 - 1,000 \times 2.00 = 0$$

$$R_A - 1,751.63 = 0$$

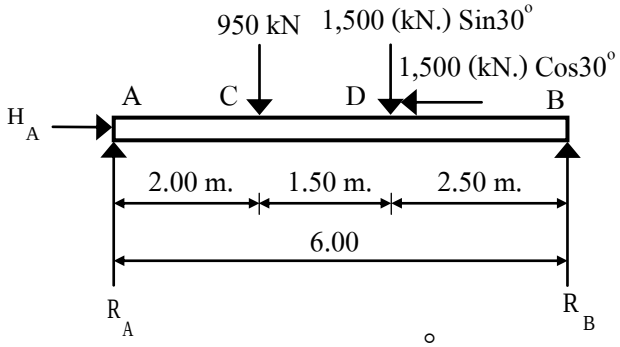
$$\therefore \quad R_A = 1,751.63 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 1,751.63 kN. $(\uparrow^{+})$ และ R_B เท่ากับ 2,048.37 kN. $(\uparrow^{+})$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.6 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ของคานโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 2.15



ภาพที่ 2.15 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



ภาพที่ 2.16 การเขียน Free Body Diagram
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 950 \times 4.00 - 1{,}500 \sin 30^{\circ} \times 2.50 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 3{,}800 - 1{,}875 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 5{,}675 = 0$$

$$R_A = \frac{5{,}675}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 945.83 \text{ kN.} \ (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 6.00 + 950 \times 2.00 + 1{,}500 \text{ Sin } 30^{\circ} \times 3.50 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 1{,}900 + 2{,}625 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 4{,}525 = 0$$

$$3{,}384.64 = R_B \times 7.50$$

$$\frac{3{,}384.64}{7.50} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 754.17 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0$ $\overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$

$$+H_A - 1{,}500 \text{ Cos } 30^{\circ} = 0$$

$$+H_A - 1{,}299 = 0 \qquad (\overset{+}{\rightarrow})$$

$$+H_A = 1{,}299 \text{ kN.}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$ H_A

$$R_A + R_B - 950 - 1{,}500 \text{ Sin } 30^{\circ} = 0$$

$$R_A + R_B - 950 - 750 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 945.83 kN.

$$945.83 + R_B - 950 - 750 = 0$$

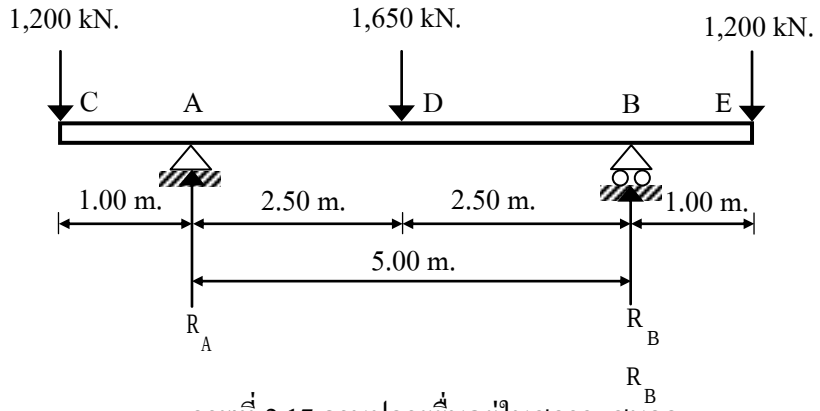
$$R_B - 754.17 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 754.17 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 945.83 kN. $(\uparrow^{+})$ และ R_B เท่ากับ 754.17 kN. $(\uparrow^{+})$

และ H_A เท่ากับ 1,299 kN. $(\overset{+}{\rightarrow})$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.7 จากภาพที่ 2.17 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน



ภาพที่ 2.17 คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:132)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1,650 \times 2.50 - 1,200 \times 6.00 = 0$$

$$+1,200 \times 1.00$$

$$R_A \times 5.00 - 4,125 - 7,200 + 1,200 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - = 10,125$$

$$R_A = \frac{10,125}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 2,025 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$- R_B \times 5.00 + 1,650 \times 2.50 + 1,200 \times 6.00 = 0$$

$$- 1,200 \times 1.00$$

$$-R_B \times 5.00 + 4,175 + 7,200 - 1,200 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 10,175 = 0$$

$$\frac{12,175}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}025 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + RB - 1{,}200 - 1{,}650 - 1{,}200 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 2,025 kN.

$$2{,}025 + R_B - 1{,}200 - 1{,}650 - 500 = 0$$

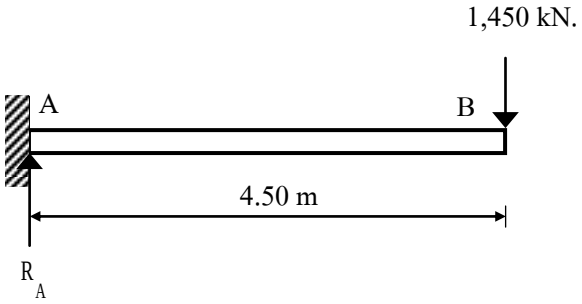
$$2{,}035 + R_B - 4{,}050 = 0$$

$$R_B - 2{,}025 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}025 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 2,025 kN. $\uparrow^+$ และ R_B เท่ากับ 2,025 kN. $\uparrow^+$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.8 จากภาพที่ 2.18 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน



ภาพที่ 2.18 คานยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:366)

วิธีทำ

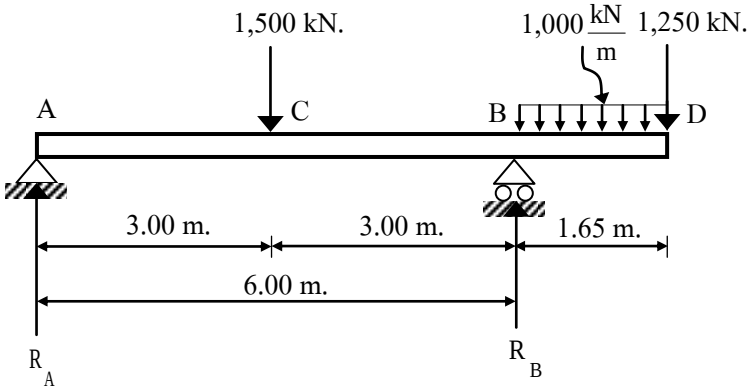
คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$$R_A - 1{,}450 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}450 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 1,200 kN. **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.9 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดงแสดงในภาพที่ 2.19



ภาพที่ 2.19 คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:146)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1{,}500 \times 3.00 + 1{,}000 \times 1.65 \times \frac{1.65}{2} + 1{,}250 \times 1.65 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 4{,}500 + 1{,}361.25 + 2{,}062.50 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 1{,}076.25 = 0$$

$$R_A \times 6.00 = 1{,}076.25$$

$$R_A = \frac{1{,}076.25}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 179.38 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 6.00 + 1{,}500 \times 3.00 + 1{,}000 \times 1.65 \times \left[\frac{1.65}{2.00} + 6.00\right] + 1{,}250 \times 7.65 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 4{,}500 + 11{,}261.25 + 9{,}562.50 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 25{,}323.75 = 0$$

$$-R_B \times .00 = -25{,}323.75$$

$$R_B = \frac{25{,}323.75}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4{,}220.63 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 1{,}500 - 1{,}000 \times 1.65 - 1{,}250 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 179.38 kN.

$$179.38 + R_B - 1{,}500 - 1{,}000 \times 1.65 - 1{,}250 = 0$$

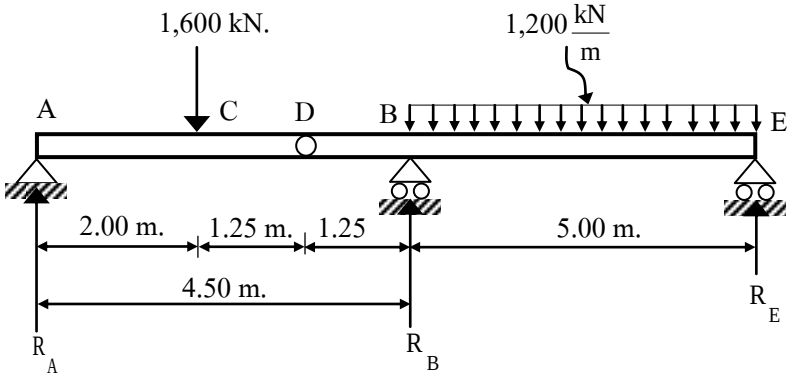
$$179.38 + R_B - 1{,}500 - 1{,}650 - 1{,}250 = 0$$

$$R_B - 4{,}220.63 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 4{,}220.63 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

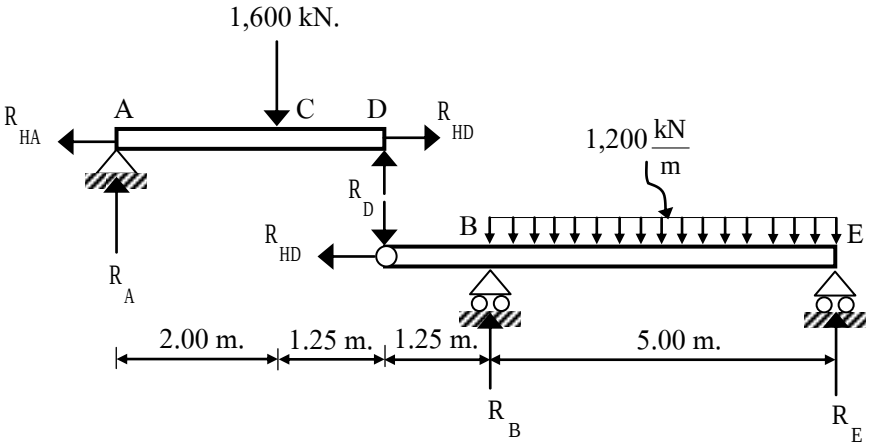
ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 179.38 kN. ($\uparrow^+$) และ R_B เท่ากับ 4,220.63 kN. ($\uparrow^+$) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.10 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A B และ C ของคานต่อเนื่อง ดังแสดงใน ภาพที่ 2.20



ภาพที่ 2.20 คานต่อเนื่องอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:146)



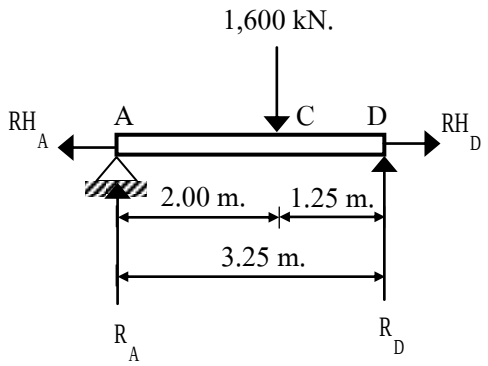
ภาพที่ 2.21 เขียนแผนภาพอิสระของคานต่อเนื่อง

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:146)

สำหรับคานตามโจทก์นี้เป็นลักษณะของคานดีเทอมิเนท (Determinate Structure) ถ้าดูแบบผ่านๆและไม่เข้าใจโครงสร้างอย่างดีแล้วจะเป็นโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate Stracture) ลักษณะของคานจะเป็น 2 ช่วง โดยมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่า จำนวนถึง 4 ตัวด้วยกัน คือ R_{HA} , R_A ,R_B และ R_E ซึ่งสมการสมดุล (Eqiliburm) ยอมให้มีค่าได้เพียง 3 ตัวเท่านั้น เป็นคานดีเทอมิมเนท เมื่อเราสังเกตคานช่วง A-D ที่จุด D จะเป็นจุดยึดหมุนที่เราเรียกว่าแรง 2 แรง (Hinge) ซึ่งเป็นจุดที่เพิ่มสมการในเงื่อนไขของสมการสมดุลอีก 1 สมการ และเมื่อแยกรูปออกจากกันจะพบว่าคานที่กำหนดให้นี้เป็นคานแบบดีเทอมิเนท

ในการทำโจทก์ข้อนี้จะต้องพิจารณาแยกคานออกเป็นส่วนๆ แต่ละส่วนแยกออกมาเป็นแบบดีเทอมิเนท (Determinate) เราสามารถแยกคานออกเป็น 2 ช่วง คือ ช่วง A-D ออกมา 1 ช่วง และคาน D-E ออกมาอีก 1 ช่วง โดยเอาจุดยึดหมุนที่จุด D ออกไป จะสามารถถ่ายแรงให้ซึ่งกันและกันได้ทุกทิศทาง เป็นต้น

ส่วนของคาน A-D



ภาพที่ 2.22 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:146)

วิธีทำ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 3.25 - 1,600 \times 1.25 = 0$$

$$R_A \times 3.25 - 2,000 = 0$$

$$R_A \times 3.25 = 2,000$$

$$R_A = \frac{2,000}{3.25}$$

$$\therefore \quad R_A = 615.38 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด D

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_D \times 3.25 + 1,600 \times 2.00 = 0$$

$$-R_D \times 3.25 + 3,200 = 0$$

$$-R_D \times 3.25 = -3,200$$

$$R_D = \frac{3,200}{3.25}$$

$$\therefore \quad R_D = 984.62 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_D - 1,600 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 615.38 kN.

$$615.38 + R_D - 1,600 = 0$$

$$R_D - 984.62 = 0$$

$$\therefore \quad R_D = 984.62 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad R_D = 0$$

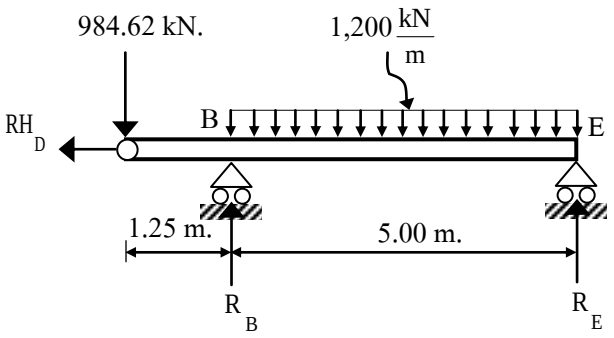
แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0$ $\overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$

$$+ RH_A - 0 = 0$$

$$\therefore \quad RH_A = 0$$

$$\therefore \quad RH_D = 0$$

ส่วนของคาน D-E



ภาพที่ 2.23 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:146)

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$

$$R_B \times 5.00 - 984.62 \times 6.25 - 1{,}200 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$R_B \times 5.00 - 6{,}153.88 - 15{,}000 = 0$$

$$R_B \times 5.00 = 21{,}154$$

$$R_B = \frac{21{,}154}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4{,}231 \text{ kN.} \ (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด E

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_E \times 5.00 - 984.62 \times 1.25 + 1{,}200 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-R_E \times 5.00 - 1{,}231 + 15{,}000 = 0$$

$$-R_E \times 5.00 = -13{,}769$$

$$R_E = \frac{13{,}769}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_E = 2{,}754 \text{ kN.} \ (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_E - 984.62 - 1{,}200 \times 5.00 = 0$$

ดังนั้น R_E เท่ากับ 4,231 kN.

$$4{,}231 + R_E - 984.62 - 1{,}200 \times 5.00 = 0$$

$$R_E - 2{,}574 = 0$$

$$\therefore \quad R_E = 2{,}574 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

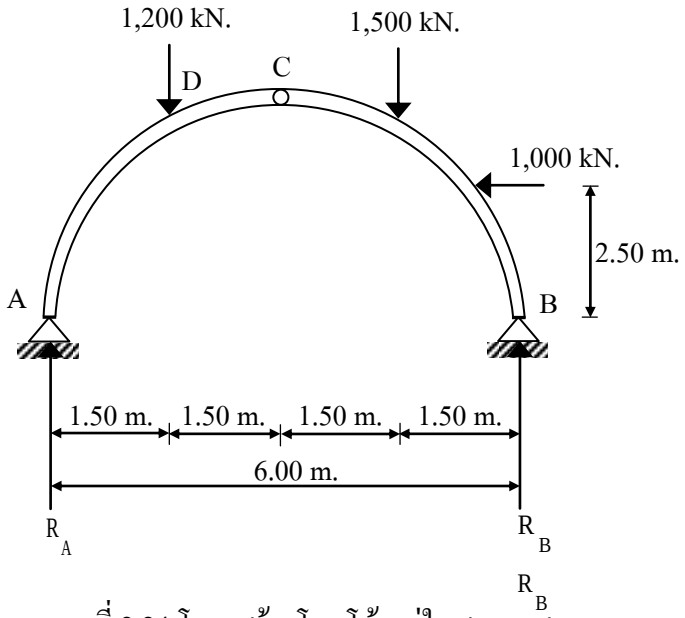
$$\therefore \quad R_E = 0$$

แรงในแนวแกน $\quad RH_D = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$\therefore \quad RH_D = 0$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 615.38 kN. $(\uparrow^+)$ R_B เท่ากับ 4,231 kN. $(\uparrow^+)$ **ตอบ** R_E เท่ากับ 2,754 kN. $(\uparrow^+)$ และ RH_D เท่ากับ 0

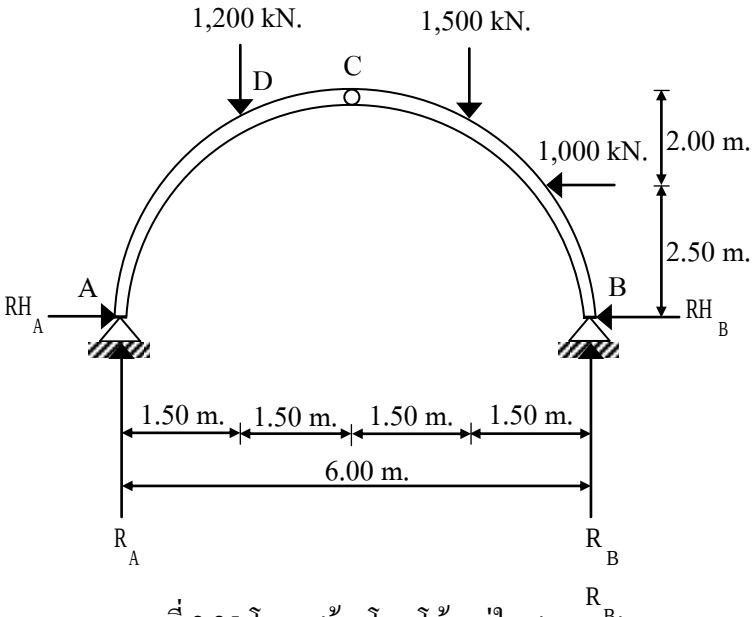
ตัวอย่างที่ 2.11 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A B และ C ของโครงสร้างโดมโค้ง ดังแสดงในภาพที่ 2.24



ภาพที่ 2.24 โครงสร้างโดมโค้งอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เดชัย ด่านวรรณกิจ (2546:146)

เขียนแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) จะได้ ดังนี้



ภาพที่ 2.25 โครงสร้างโดมโค้งอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:132)

สำหรับโจทก์ข้อนี้มีที่รองรับเป็นจุดยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ที่จุด A และ B จึงทำให้ที่รองรับมีแรงปฏิกิริยาจำนวนข้างละ 2 ตัว คือ ในแนวนอนและในแนวตั้ง จึงจำเป็นตั้งหาแรงปฏิกิริยาจำนวนทั้งหมด 4 ตัว ในขณะเดียวกันที่จุด C เป็นแบบ Hing จึงต้องใช้สมการที่มีเงื่อนไข $\Sigma M_C = 0$ เนื่องจากโครงสร้างเป็นแบบดีเทอมิเนท (Determinate Structural)

วิธีทำ

จาก $\Sigma F_x = 0$ $\overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$

$$RH_A - RH_B - 1{,}000 = 0 \quad \text{.....(2.5)}$$

จาก $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 - 1{,}500 = 0 \quad \text{.....(2.6)}$$

$$R_A + R_B - 1{,}150 - 1{,}400 = 0$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}\ \overset{-}{\circlearrowright}$

$$R_A \times 6.00 - 1{,}200 \times 4.50 - 1{,}500 \times 1.50 = 0$$

$$- 1{,}000 \times 2.50$$

$$R_A \times 6.00 - 5,400 - 2,250 - 2,500 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - = 10,150$$

$$R_A = \frac{10,150}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1,691.67 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^+\circlearrowleft^-$

$$-R_B \times 6.00 + 1,200 \times 1.50 - 1,500 \times 4.50 = 0$$

$$- 1,000 \times 2.50$$

$$-R_B \times 6.00 + 1,800 - 6,750 - 2,500 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 6,050 = 0$$

$$\frac{6,050}{6.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 1,008.33 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 1,200 - 1,500 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,691.67 kN.

$$1,691.67 + R_B - 1,500 - 1,200 = 0$$

$$1,275 + R_B - 2,700 = 0$$

$$R_B - 1,425 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1,008.33 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_C = 0$

$$RH_B \times 4.50 - R_B \times 3.00 - 1,200 \times 4.50 = 0$$

$$-1,500 \times 1.50$$

$$RH_B \times 4.50 - 1,425 \times 3.00 - 5,400 - 2,250 = 0$$

$$RH_B \times 4.50 - 11,925 = 0$$

$$\frac{11,925}{4.50} = RH_B$$

$$\therefore \quad RH_B = 2,650 \text{ kN.} \quad (\overset{+}{\rightarrow})$$

แทนค่า RH_B ลงในสมการที่ (2.5) จะได้

$$RH_A + 2{,}650 - 1{,}000 = 0 \quad \text{.....(1)}$$

$$RH_A + 1{,}650 = 0$$

$$RH_A = -1{,}650 \text{ kN.} \ (\overset{-}{\leftarrow})$$

แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$RH_A + RH_B - 1{,}000 = 0$$

$$RH_A + 2{,}650 - 1{,}000 = 0$$

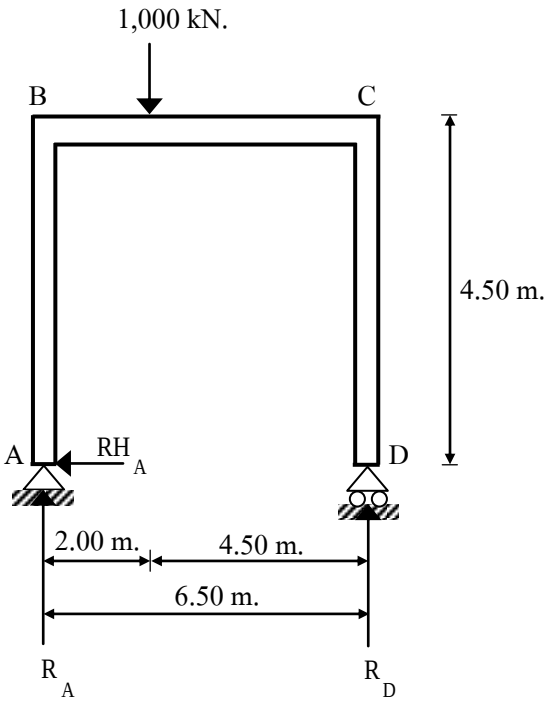
$$RH_A + 1{,}650 = 0$$

$$\therefore \quad RH_A = -1{,}650 \text{ kN.} \ (\overset{-}{\leftarrow})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 1,691.67 kN. $\uparrow^+$ R_B เท่ากับ 1,008.33 kN. $\uparrow^+$ **ตอบ**

RH_A เท่ากับ –1,650 kN. $(\overset{-}{\leftarrow})$ และ RH_B เท่ากับ 2,650 kN. $(\overset{+}{\rightarrow})$

ตัวอย่างที่ 2.12 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A และ D ของคานต่อเนื่อง ดังแสดงในภาพที่ 2.26



ภาพที่ 2.26 โครงสร้างข้อแข็ง

ที่มา : ชุมพล จันทรสม (2552:4)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$

$$R_A \times 6.50 - 1{,}000 \times 4.50 = 0$$

$$R_A \times 6.50 - 4{,}500 = 0$$

$$R_A \times 6.50 - = 4{,}500$$

$$R_A = \frac{4{,}500}{6.50}$$

$$\therefore \quad R_A = 692 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด D

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $\quad {}^{+}\circlearrowright{}^{-}$

$$-R_D \times 6.50 + 1{,}000 \times 2.00 = 0$$

$$-R_D \times 6.50 + 2{,}000 = 0$$

$$-R_D \times 6.50 = 0$$

$$\frac{2{,}000}{6.50} = R_B$$

$$\therefore \quad R_D = 308 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}000 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 692 kN.

$$692 + R_B - 1{,}000 = 0$$

$$R_B - 308 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 308 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

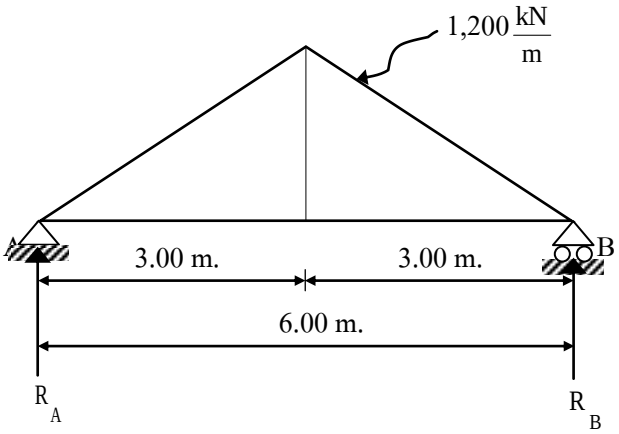
แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0 \quad {}^{+}\rightarrow{}^{-}\leftarrow$

$$RH_A = 0$$

$$\therefore \quad RH_A = 0$$

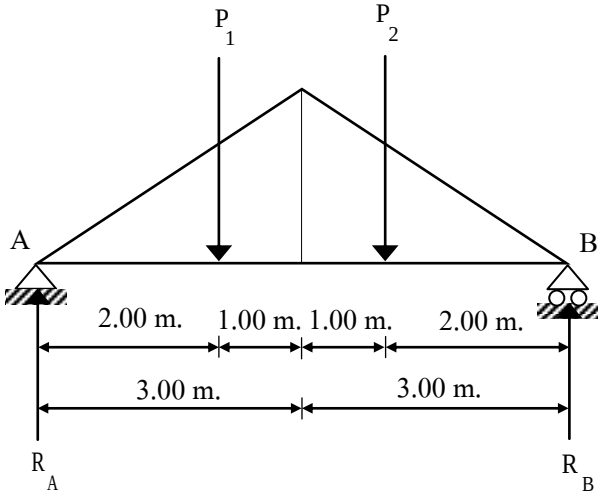
ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 692 kN. $\uparrow^{+}$ R_B เท่ากับ 308 kN. $\uparrow^{+}$ และ RH_A เท่ากับ 0 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2.13 จากภาพที่ 2.27 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักโครงสร้าง



ภาพที่ 2.27 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

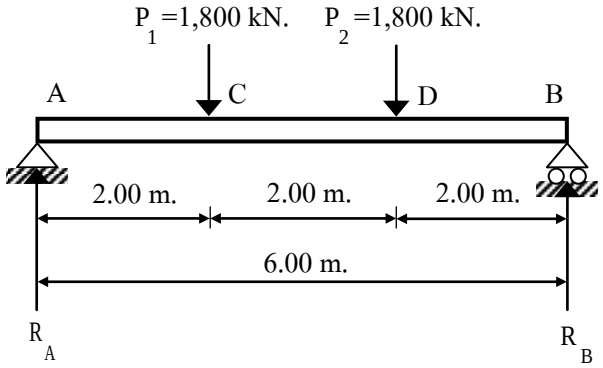


ภาพที่ 2.28 การเขียน Free Body Diagram

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

จะได้ $\frac{2L}{3} = 2.00$ m. และ $\frac{L}{3} = 1.00$ m.

P_1 และ $P_2 = \frac{1}{2} \times 3.00 \times 1{,}200 =$ 1,800 kN.



ภาพที่ 2.29 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1,800 \times 4.00 - 1,800 \times 2.00 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 7,200 - 3,600 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 10,800 = 0$$

$$R_A \times 6.00 = 10,800$$

$$= \frac{10,800}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1,800 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 6.00 + 1,800 \times 2.00 + 1,800 \times 4.00 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 3,600 + 7,200 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 10,800 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -10,800$$

$$-R_B = -\frac{10,800}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1,800 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}800 - 1{,}800 = 0$$

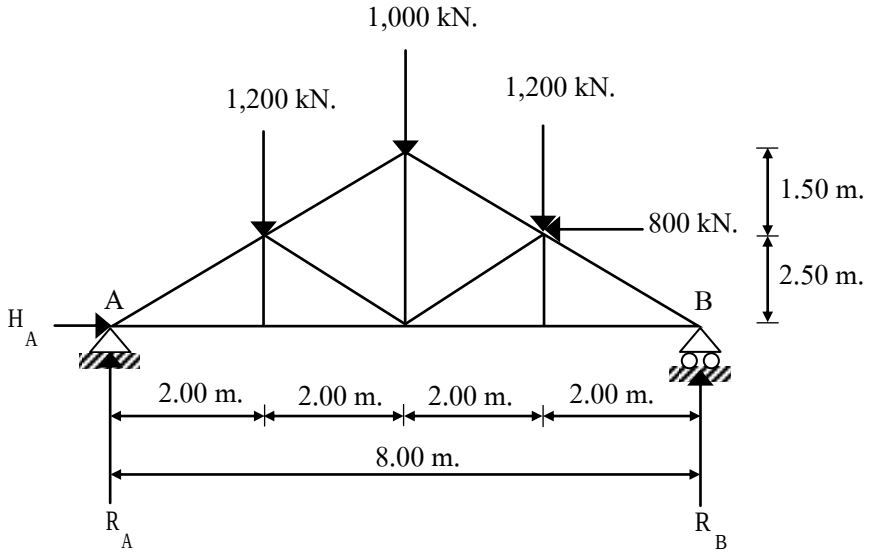
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,800 kN.

$$1{,}800 + R_B - 1{,}800 - 1{,}800 = 0$$

$$R_B - 1{,}800 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}800 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

ตัวอย่างที่ 2.14 จากภาพที่ 2.30 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักโครงสร้างหลังคาถัก (Truss)



ภาพที่ 2.30 โครงสร้างหลังคาถัก (Truss)
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B $\Sigma M_B = 0$ $+\circlearrowleft-$

$$R_A \times 8.00 - 1{,}200 \times 6.00 - 1{,}000 \times 4.00 = 0$$

$$- \ 1200 \times 2.00 - 800 \times 2.50$$

$$R_A \times 8.00 - 7{,}200 - 4{,}000 - 2{,}400 - 2{,}000 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 15{,}600 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = 15{,}600$$

$$R_A = \frac{15{,}600}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1{,}950 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B $= 0$

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 1{,}200 \times 2.00 + 1{,}000 \times 4.00 = 0$$

$$+1{,}200 \times 6.00 - 800 \times 2.50$$

$$-R_B \times 8.00 + 2{,}400 + 4{,}000 + 7{,}200 - 2{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 11{,}600 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -11{,}600$$

$$-R_B = -\frac{11{,}600}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}450 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0$ $\overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$

$$+ H_A - 800 = 0$$

$$\therefore \quad H_A = 800 \text{ kN.} \quad (\overset{+}{\rightarrow})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 - 1{,}000 - 1{,}200 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,950 kN.

$$1{,}950 + R_B - 1{,}200 - 1{,}000 - 1{,}200 = 0$$

$$1{,}950 + R_B - 3{,}400 = 0$$

$$R_B - 1{,}450 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}450 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 1,950 kN. $(\uparrow^{+})$ และ R_B เท่ากับ 1,450 kN. $(\uparrow^{+})$ **ตอบ**

และ H_A เท่ากับ 800 N. $(\overset{+}{\rightarrow})$

บทสรุป

1. สมการการสมดุลในระบบ 2 มิติ

เมื่อวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำ หมายถึง สภาวะการของวัตถุไม่หมุนและไม่มีการเคลื่อนที่ และสภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นได้ ก็เนื่องมาจากมีแรงต้านทาน หรือโมเมนต์ที่มากระทำต่อวัตถุนั้นมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$\Sigma H = 0\ ,\ \Sigma V = 0\ ,\ \Sigma M = 0 \quad \text{.....(2.1)}$$

$\Sigma H = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน x เท่ากับ 0

$\Sigma V = 0$ หมายถึง ผลรวมในแนวแกน y เท่ากับ 0

$\Sigma M_0 = 0$ หมายถึง ผลรวมโมเมนต์ของแรงที่ตั้งฉากแกน y เท่ากับ 0

2. การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

ขั้นตอนสี่ใช้สมการของการสมดุล คำนวณหาแรงปฏิกิริยาต่าง รายละเอียด ดังนี้

$$\Sigma F_x = 0 : H_A - P_2 \text{Cos}\ \theta - H_B \quad \text{.....(2.2)}$$

$$\Sigma F_y = 0 : R_A - P_1 - P_2 \text{Cos}\ \theta + R_B \quad \text{.....(2.3)}$$

$$\Sigma M_A = 0 : R_A\ L - P_1\ x_1 - P_2 \text{Sin}\ \theta \quad \text{.....(2.4)}$$

3. ขั้นตอนในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยา

สำหรับขั้นตอนในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยามีรายละเอียด ดังนี้

3.1 ให้พิจารณาโครงสร้างดูก่อนว่าเป็นโครงสร้างแบบดีเทอมิเนท (Determinate Structural) หรือโครงสร้างแบบอินดีเทมิเนท (Indeterminate Structural) ทำการสังเกตจากแรงปฏิกิริยาว่ามีตัวที่ไม่รู้ค่าอยู่จำนวนกี่ตัว ดังนี้

3.1.1 สังเกตที่จุด A ที่จุด A ที่รองรับเป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ไม่ได้ ฉะนั้นแรงปฏิกิริยาที่จุดนี้จึงมีทั้งขนาดละทิศทางคือ R_A และ R_B อย่างไรก็ตามแนวของแรงปฏิกิริยานี้จะต้องกระทำผ่านจุดยึดหมุน

3.1.2 ให้สังเกตที่จุด B ที่รองรับแบบนี้เป็นแบบยึดหมุนเคลื่อนที่ได้ แรงปฏิกิริยาที่จุด B ตั้งได้ฉากกับฐานรองรับและมีทิศทางผ่านจุดยึดหมุนนี้ นั้นแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าจึงมีแต่ขนาดของแรงเพียงอย่างเดียวคือ R_B

ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าของโครงสร้างนี้จึงมีเพียง 3 สมการ ได้แก่ R_A ,R_B และH_A ฉะนั้นโครงสร้างนี้จึงเป็นโครงสร้างแบบ ดีเทอมิเนท (Determinate Structural)

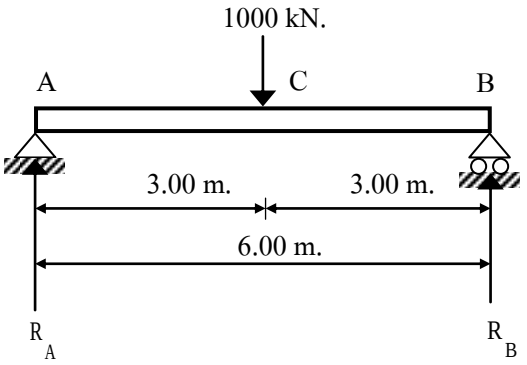
3.2 ทำการเลือกแกนตั้งฉาก 2 แกน โดยให้แกน X เป็นแนวนอน และแกน Y เป็นแนวตั้ง

3.3 แตกแรงต่างๆ ให้อยู่ในแกน X และแกน Y

3.4 ใช้สมการของการสมดุลข้างต้นทำการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาต่อไป

แบบฝึกหัด

1. จากภาพที่ 2.31 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B (R_A = 500 kN. , R_B = 500 kN.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 2.31 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

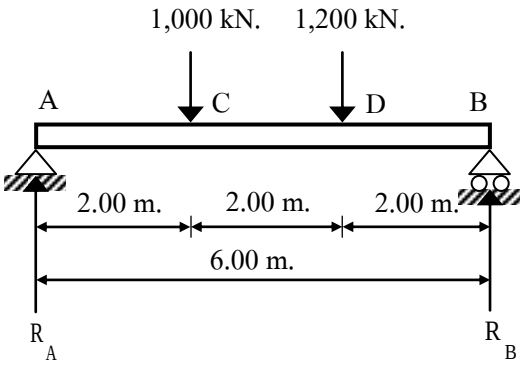
.....

.....

.....

.....

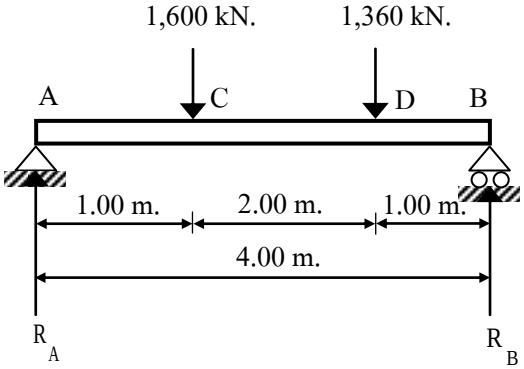
2. จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดA และ B ดังแสดงในภาพที่ 2.32 ของคานเมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล (R_A =1,066.67 kN. , R_B = 1,133.33 kN.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 2.32 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร (2523:28)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

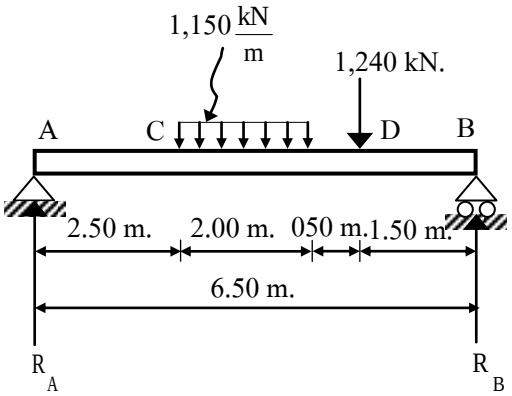
3. จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ดังแสดงในภาพที่ 2.33 ของคานโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล (R_A =1,540 kN. , R_B = 1,420 kN.)



ภาพที่ 2.33 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข. (2541:35)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4. คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดงแสดงในภาพที่ 2.34 (R_A =1,347.70 kN. , R_B = 2,192.30 kN.)



ภาพที่ 2.34 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : มนตรี พิรุณ (2553:42)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

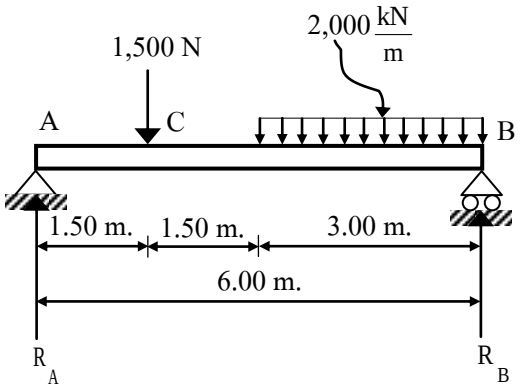
.....

.....

.....

.....

5. คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดงแสดงในภาพที่ 2.35 (R_A =2,625 kN. , R_B = 4,875 kN.)



ภาพที่ 2.35 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2523:27)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

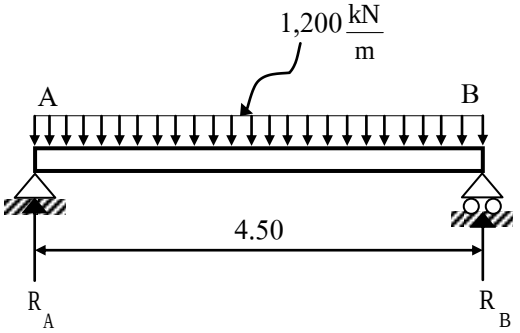
.....

.....

.....

.....

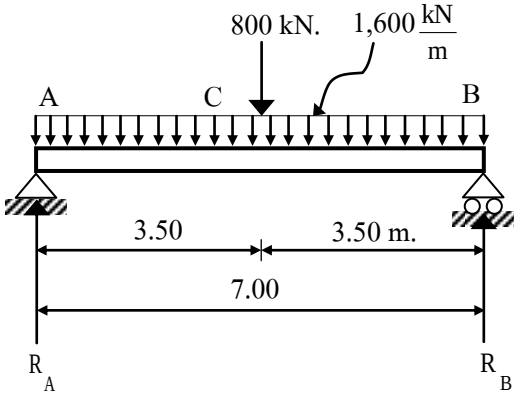
6. จากภาพที่ 2.36 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน (R_A =2,700 kN. , R_B = 2,700 kN.)



ภาพที่ 2.36 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ที่มา : เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์ (2546:26)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

7. จากภาพที่ 2.37 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน (R_A =6,000 kN. , R_B = 6,000 kN.)



ภาพที่ 2.37 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา. (2544:34)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

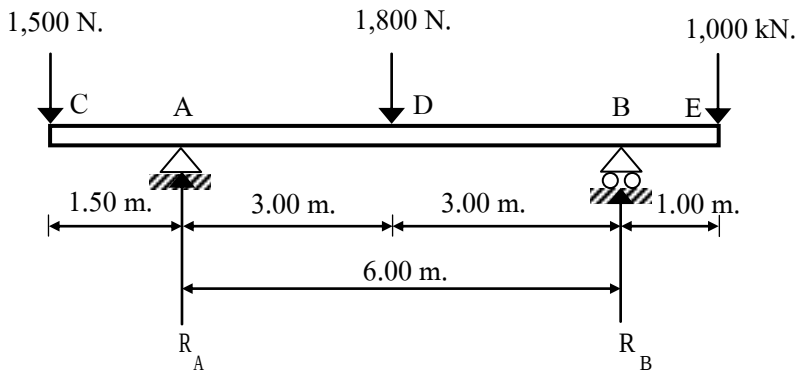
.....

.....

.....

.....

8. จากภาพที่ 2.38 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน (R_A =2,608.33 kN. , R_B = 1,691.67 kN.)



ภาพที่ 2.38 คานยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล R_B

ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:132)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

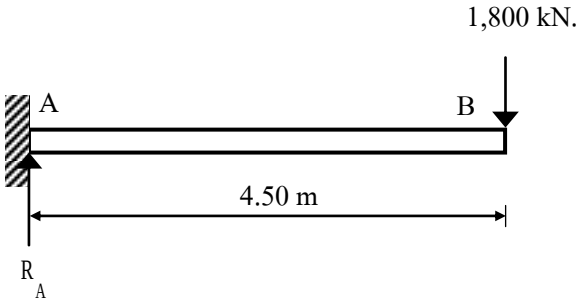
.....

.....

.....

.....

9. จากภาพที่ 2.39 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน (R_A =1,800 kN.)



ภาพที่ 2.39 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:366)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

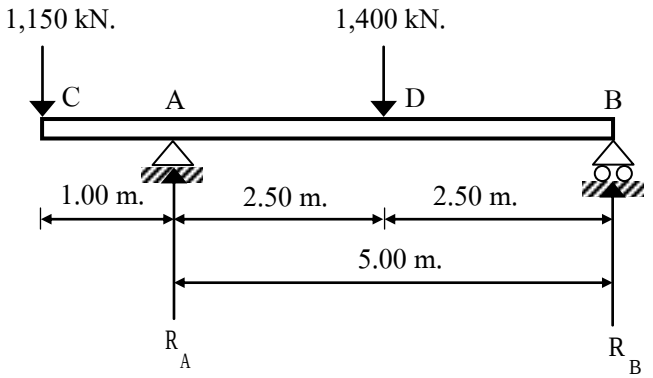
.....

.....

.....

.....

10. คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดงแสดงในภาพที่ 2.40 (R_A =2,080 kN. , R_B = 470 kN.)



ภาพที่ 2.40 คานปลายยื่นอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เกรียงศักดิ์ อุดมสินโรจน์. (2550:34)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้ จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1.เมื่อวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำหมายถึงสภาวะการของวัตถุไม่มีการเคลื่อนที่และวัตถุไม่หมุน

..... 2. สภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นได้ก็เนื่องมาจากมีแรงต้านทานหรือโมเมนต์ที่มากระทำต่อวัตถุนั้นมีค่าไม่เป็นศูนย์

..... 3. มีแนวแรงพบกันที่จุดเดียว การสมดุลชนิดนี้มาจากแรงกระทำต่อวัตถุในสภาวะสมดุลเรียกว่าการสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกัน

..... 4. ในการแก้ปัญหาของการสมดุลของแรง 2 มิติที่ไม่ขนานกันโดยใช้ทฤษฎีการสมดุลของแรงเท่านั้น

..... 5. การสมดุลของแรง 2 มิติในแนวเส้นตรงเดียวกัน เกิดจากแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุไม่มากเกิน 2 แรง

..... 6.การสมดุลของแรง 2 มิติทีมีระบบแรงทั่วไป คือ การสมดุลของแรงเฉือนและแรงปฏิกิริยา

..... 7.แบบยึดหมุน (Hing) ลักษณะการยึดหมุนแบบนี้จะไม่มีการเคลื่อนที่ทางเดียว (Roller Support) ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้

..... 8.แบบยึดหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว (Rolled Support) ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้

..... 9.แบบยึดหมุนและเคลื่อนที่อยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ จะทำให้เกิดแรงปฏิกิริยา
ทุกทิศทุกทางเรียกว่า (Fixed Support)

..... 10. โครงสร้างอย่างง่ายคือโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate Structural)

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 4 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดคือความหมายของจุดรองรับแบบยึดหมุน (Hing)
   ก. การยึดหมุนแบบจะไม่มีการเคลื่อนที่
   ข. การยึดหมุนแบบนี้จะมีการเคลื่อนที่
   ค. มีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้นในแนวแกน x และ y
   ง. แบบยุดหมุนแบบนี้จพทำงานเหมือนกับบานพับจะไม่หมุนรอบแกน
2. ข้อใดคือความหมายของจุดรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว (Roller Support)
   ก. ที่รองรับแบบไม่สามารถรับ
   ข. การยึดหมุนแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียวสามารถรับโมเมนต์ที่จุดหมุนได้
   ค. จุดยึดหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียวจะรับได้ทั้งแกน x แกน y
   ง. ถูกทุกข้อ
3. ข้อใดคือความหมายของแบบยึดแน่น (Fixed Support)
   ก. แรงปฏิกิริยาเกิดขึ้นได้ทิศทางเดียว
   ข. มีโมเมนต์สองทิศทาง
   ค. จุดยึดแน่นแบบยึดแน่นอยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ได้
   ง. ถูกข้อ ก และ ค
4. ข้อใดคือความหมายของแบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support)
   ก. แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับจะมีสองฐานรองรับขึ้นไป
   ข. แบบยึดหมุนยึดด้วยข้อต่อเคลื่อนที่ได้
   ค. แบบยึดหมุนแบบยึดด้วยข้อต่อไม่มีแรงเสียดทานใดๆ ทั้งสิ้น
   ง. มีโมเมนต์ทิศทางเดียว
5. ข้อใดคือความหมายของจุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint Support)
   ก. การนำปลายของแต่ละส่วนมาต่อยึดกัน
   ข. มีการถ่ายโมเมนต์ดัดไปอีกโครงสร้างที่ต่อกันได้
   ค. ผลของโมเมนต์ดัดจะไม่เท่ากับศูนย์
   ง. โครงสร้างที่นำมาต่อกันรงจุดนั้นจะหมุนไปในทิศทางเดียวกันและเป็นมุมไม่เท่ากัน

6. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง
   ก. ในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาโดยอาศัยหลักการสมการสามสมการ
   ข. ในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่เป็นตัวไม่รู้ค่าในโครงสร้างอินดีเทอมิเนท
   ค. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาโดยอาศัยสมการของการสมดุล
   ง. ถูกทุกข้อ
7. สำหรับจุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint) มีอยู่กี่แบบอะไรบ้าง
   ก. มี 2 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) และจุดต่อ (Rigid Joint)
   ข. มี 3 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) จุดต่อ (Rigid Joint) และแบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support)
   ค. มี 3 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) จุดต่อ (Rigid Joint) แบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support) และจุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint)
   ง. มี 3 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) จุดต่อ (Rigid Joint) แบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support) จุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint) และจุดต่อ (Roller Support)
8. การสมดุลของแรงสามมิติที่มีระบบของแรงทั่วไป คือข้อใด
   ก. เป็นโมเมนต์ของแรงและแรงในแนวแกน y
   ข. อยู่ในระบบอยู่ในสภาวะสมดุลเงื่อนไขของการสมดุลของแรง 3 มิติ
   ค. การสมดุลทั้งระบบที่มีทั้งโมเมนต์และแรงในแนวแกน x, y
   ง. มีทิศทางตรงข้ามกัน
9. เป็นแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำที่ฐานรองรับเพื่อให้โครงสร้างเกิดความสมดุลคือความหมายข้อใด
   ก. แรงต้านทาน
   ข. แรงลัพธ์
   ค. โมเมนต์
   ง. แรงปฏิกิริยา
10. โครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนทแตกต่างกับโครงสร้างแบบอินดีเมอมิเนทอย่างไร
   ก. โครงสร้างดีเทอมิเนทใช้เพียงสมการสมดุลเพียงอย่างเดียว
   ข. โครงสร้างดีเทอมิเนทใช้สมการสมดุลสองสมการ
   ค. โครงสร้างอินดีเทอมิเนทจะไม่ทราบค่า 2 ตัวขึ้นไป
   ง. โครงสร้างอินดีเทอมิเนทเป็นโครงสร้างช่วงเดียว (Simple Beam)

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

เกรียงศักดิ์ อุดมสินโรจน์. (2525). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์มิตรณรงค์การพิมพ์.

ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพมหานคร : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

ชุมพล จันทร์สม (2552). **วิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ.(2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ.(2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เมธี หมั่นทำการ และคณะ.(2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์**.กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

ยิ่งศักดิ์ พรรณเชษฐ์.(2541). **กำลังวัสดุเบื้องต้น**. พิมพ์ครั้งที่ 4 มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

นิรันดร์ สุวรัตน์. (2544). **ฟิสิกส์ กลศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพฯ: บริษัทสำนักพิมพ์ พ.ศ.พัฒนา จำกัด.

ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข. (2541). **กลศาสตร์วิศวกรรมภาคสถิติศาสตร์.หน่วยสารบรรณ.** ขอนแก่น: คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

เสกสรร ศรียศ. (2550). **กลศาสตร์วิศวกรรม1**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แมคกรอ-ฮิล.

โสภณ วงศ์มีทรัพย์และคณะ. (2544). **กลศาสตร์วิศวกรรม (ภาคสถิตยศาสตร์).** กรุงเทพพมหานคร: สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์. (2536). **กลศาสตร์วัสดุ,** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

สุรศักดิ์ รายี. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

วีระศักดิ์ กรัยวิเชียรและคณะ. (2553). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

อำนวย พาณิชกุล (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

Bresler, B., Lin, T.Y., and Scalzi, J.B.: (1963). **Design of Steel Structural**. 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York.

Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Jr. (1985) **Mechanics of Materials**: McGraw – Hill Ryerson Limited.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

หน่วยที่ 3 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดในคาน

เนื้อหาสาระ

3.1 บทนำ

3.2 แรงปฏิกิริยาและฐานรองรับ

3.3 ประเภทของคาน (Beam)

3.4 คำจำกัดความของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (W) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ (M) ในคานตรง

3.6 ขั้นตอนการสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคาน

จุดประสงค์การเรียนรู้

3.1 อธิบายความหมายของแรงปฏิกิริยาและฐานรองรับได้

3.2 สามารถหาแรงปฏิกิริยาและบอกชนิดของฐานรอรับได้

3.3 บอกความหมายประเภทของคานได้

3.4 อธิบายคำจำกัดความของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานได้

3.5 อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (W) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ (M) ในคานตรงได้

3.6 อธิบายขั้นตอนการสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานได้

3.7 สามารถสร้างแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคานได้

แนวคิดในการสอน

โครงสร้าง (Structural) เป็นไกที่ถูกออกแบบและสร้างให้รับน้ำหนักบรรทุก (Load) หรือต้านทานแรง สำหรับทฤษฎีโครงสร้าง (Theory of Structural) คือ วิธีการศึกษาองค์ประกอบ (Formation) ของการวิเคราะห์โครงสร้าง ชิ้นส่วน (Element) ของโครงสร้างซึ่งอาจจะเป็นทรงกลม (Bar) แผ่น (Plate) หรือแผ่นเปลือก (Shell) การรวมกัน การเชื่อมต่อ (Connection) และการรองรับ (Support) คือองค์ประกอบของโครงสร้าง หลังจากชนิดและรูปแบบเลือกใช้งานในแต่ละส่วนของโครงสร้างทั้งหมดจะต้องทำการวิเคราะห์ โดยใช้เชิงตัวเลข กราฟิก และหรือการทดลอง เป็นต้น ในการวิเคราะห์โครงสร้างได้ถูกต้องและมีประสิทธิภาพได้เป็นอย่างดีนั้น จำเป็นจะต้องเรียนรู้แนวคิดและทฤษฎีของโครงสร้าง เพื่อจะนำข้อมูลที่ได้มาใช้ในการวิเคราะห์โครงสร้างทางด้านวิศวกรรม การเรียนในรายวิชาที่เกี่ยวข้องและรายวิชาที่สูงขึ้นได้อย่างดี ซึ่งสามารถแบ่งออกได้เป็น 2

ชนิดได้แก่ โครงสร้างอย่างง่าย (Determinate Structure) และโครงสร้างอย่างยาก (Indeterminate Structure) ในหน่วยนี้จะวิเคราะห์เฉพาะโครงสร้างอย่างง่ายเท่านั้น ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดในคาน นอกจากนั้นผู้เรียนยังจะได้เขียนแผนภาพของแรงเฉือนและแผนภาพของโมเมนต์ตามขั้นตอนที่ถูกต้อง ในหน่วยการเรียนนี้ผู้เรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับแรงปฏิกิริยาและฐานรองรับ ประเภทของคาน คำจำกัดความของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดและขั้นตอนการสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคาน เป็นต้น

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

3.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

3.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

3.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

3.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

3.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

3.1 สื่อ Power Point

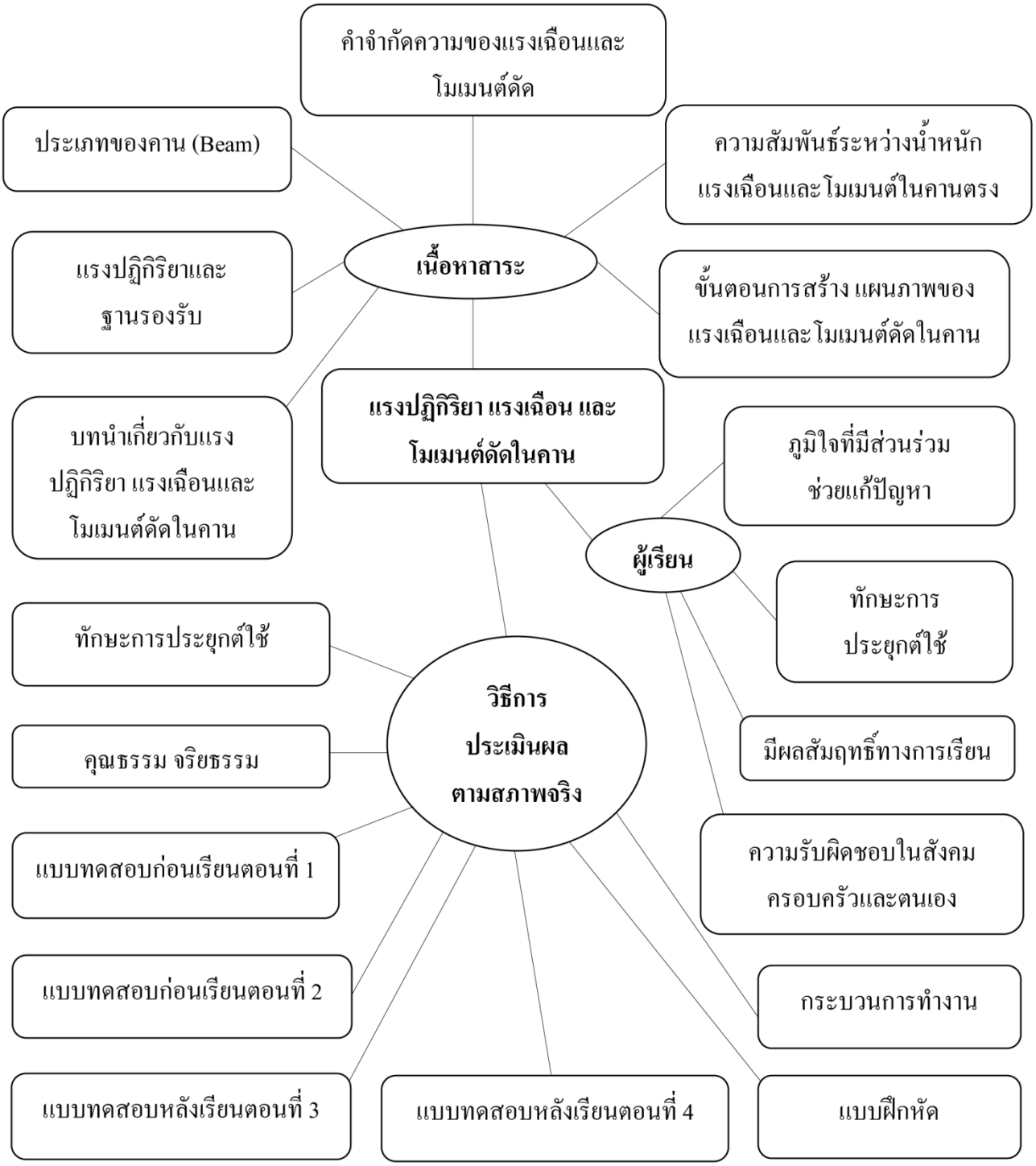
3.2 สื่อแผ่นใส

3.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

3.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 1 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. แรงต้านตรงที่รองรับ (Support Force) หมายถึง แรงที่ทำให้เกิดความไม่สมดุล (Equilibrium) ระหว่างแรงกระทำกับแรงที่สวนทางกัน

..... 2. แรงกระทำ หมายถึง น้ำหนักของโครงสร้างเอง หรือน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง

..... 3. แรงลัพธ์เกิดจากแรงภายนอกที่มากระทำต่อโครงสร้าง โดยใช้กฎของสถิตศาสตร์

..... 4. แรงลัพธ์เกิดจากแรงภายในกระทำ ต้านทานแรงภายนอก

..... 5. แรงลัพธ์ตามแนวแกนที่เกิดจากแรงภายนอกเรียกว่าแรงตามแนวแกน

..... 6. แรงยึดหมุน ลักษณะของการยึดหมุนแบบนี้จะไม่มีการเคลื่อนที่และมีแรงเกิดขึ้นในทางดิ่ง

..... 7. คานจะรองรับด้วยลูกกลิ้งหรือสลักยึดที่ตำแหน่งของปลายคานทั้งสองข้าง เรียกว่าคานอย่างง่าย

..... 8. คานยื่นเป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นถูกยึดแน่นในตัวรองรับอย่างถาวร

..... 9. แรงเฉือนเป็นแรงภายนอกเท่านั้นที่กระทำให้คานถูกเฉือนขาดในแนวดิ่ง

..... 10.ขั้นตอนในการสร้างแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดอันดับแรก จะต้องหาตำแหน่งแรงเฉือนที่เป็นเฉือน

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ประเภทของคาน สามารถแบ่งตามที่รองรับหรือแรงปฏิกิริยามีกี่ประเภท คือข้อใด
   ก. 5 ประเภท
   ข. 4 ประเภท
   ค. 3 ประเภท
   ง. 5 ประเภท
2. ความหมายของคานปลายยึดรั้ง คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่ปลายทั้งสองยึดรั้งไม่สามารถหมุนได้
   ข. เป็นคานที่ปลายทั้งสองข้างและสามารถหมุนได้
   ค. เป็นคานปลายเดียวยื่นได้หมุนได้
   ข. เป็นคานที่ปลายทั้งสองยึดรั้งสามารถหมุนได้
3. เมื่อคานมีน้ำหนักบรรทุกมากระทำทั้งภายในและภายนอกจะทำให้คานเป็นอย่างไร คือข้อใด
   ก. คานจะเกิดความเครียดและความเค้นขึ้น
   ข. คานจะเกิดแรงเฉือนขึ้น
   ค. คานจะเกิดโมเมนต์ขึ้น
   ง. คานจะเกิดโมเมนต์ลง
4. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องมากที่สุด คือข้อใด
   ก. โมเมนต์ดัดกระทำให้คานโก่งลงโมเมนต์จะเป็นลบ
   ข. โมเมนต์ดัดกระทำให้คานโก่งขึ้นโมเมนต์จะเป็นบวก
   ค. โมเมนต์ดัดกระทำให้คานโก่งลงโมเมนต์จะเป็นบวก
   ง. โมเมนต์ดัดกระทำให้คานโก่งขึ้นโมเมนต์จะเป็นบวกและสลับเป็นลบ
5. ความหมายของแรงกระทำตามแนวแกน. (Axial Force) คือข้อใด
   ก. แรงลัพธ์ในแนวตั้งฉากกับแนวที่เกิดจากแรงภายนอก
   ข. แรงลัพธ์ตามแนวแกนที่เกิดจากแรงภายนอก
   ค. แรงลัพธ์ที่เกิดจากแรงภายนอก
   ง. แรงลัพธ์ในแนวขนานกับแรงที่เกิดจากแรงภายนอก

6. ความหมายของคานยื่น (Cantilever Beam) คือข้อใด
   ก. คานที่มีปลายอีกด้านหนึ่ง หรือทั้งสองข้างยื่น
   ข. คานที่มีปลายด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นยึดแน่นและไม่สามารถเลื่อนตำแหน่งหรือหมุนได้
   ค. คานที่ยื่นออกจากผนังหรือเสาสามารถรับน้ำหนักได้ปลอดภัยและสามารถเลื่อนตำแหน่งหรือหมุนได้ถูกอัดแน่นและสามารถเลื่อนตำแหน่ง หรือหมุนได้
   ง. คานที่ยื่นออกจากผนังหรือเสาสามารถรับน้ำหนักได้ปลอดภัยและสามารถเลื่อนตำแหน่งหรือหมุนได้ถูกอัดแน่นและไม่สามารถเลื่อนตำแหน่งหรือหมุนได้
7. ความหมายของคานจะรองรับด้วยลูกกลิ้งหรือสลักยึดที่ตำแหน่งปลายทั้งสองข้างและแรงปฏิกิริยาจะกระทำที่ปลายคานนั้นตั้งฉากกับคาน ที่กล่าวมาข้างต้น คือข้อใด
   ก. คานปลายยึดรั้ง
   ข. คานต่อเนื่อง
   ค. คานยื่น
   ง. คานอย่าง่าย
8. ความหมายของคานต่อเนื่อง คือข้อใด
   ก. คานที่มีจุดรองรับสองจุดส่วนมากจะเป็นคานยื่น
   ข. คานที่มีจุดรองรับมากกว่าสองจุดขึ้นไป
   ค. คานที่มีจุดรองรับมีจำนวนสองจุด
   ง. คานที่มีจุดรองรับที่ฐานรองรับแบบยึดแน่น
9. ความหมายของแรงเฉือน คือข้อใด
   ก. แรงภายในอย่างเดียวที่กระทำให้คานถูกเฉือนขาดในทางดิ่ง
   ข. แรงที่กระทำในแนวดิ่ง ทำให้คานถูกเฉือนขาด
   ค. แรงในแนวขนานที่ทำให้เสาเฉือนขาดออกจากกัน
   ง. แรงภายในและภายนอกที่ทำให้คานถูกเฉือนขาดในแนวดิ่ง
10. ความหมายของโมเมนต์ดัด คือข้อใด
   ก. โมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงบิดที่กระทำกับคานทำให้เกิดการโค้งงอ
   ข. โมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงดึงที่กระทำกับเสาทำให้เกิดการโค้งงอ
   ค. โมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงเฉือนที่กระทำกับคานทำให้เกิดการโค้งงอ
   ง. โมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงปฏิกิริยาที่กระทำกับคานทำให้เกิดการโค้งงอ

3.1 บทนำ

การออกแบบโครงสร้างใดๆ เริ่มจากความประสงค์ของเจ้าของโครงสร้างว่าต้องการโครงสร้างประเภทใด มีรูปร่างหน้าตาอย่างไร และที่สำคัญมีการจัดสัดส่วนพื้นที่การใช้งานตามความประสงค์ของเจ้าของโครงการ สถาปนิกจะเป็นผู้ออกแบบแปลนกำหนดขนาดต่างๆ ของโครงสร้างให้เป็นไปตามความต้องการของเจ้าของบ้าน โดยที่การก่อสร้างโครงสร้างนั้นๆ ไม่ขัดต่อข้อบัญญัติของส่วนราชการและตามพระราชบัญญัติความคุมอาคาร พ.ศ.2522 ว่าด้วยการก่อสร้างโครงสร้างนั้นๆ ตลอดจนคำนึงถึงความสวยงามและประโยชน์ในการใช้สอยต่างๆ เป็นต้น

ส่วนวิศวกรโยธาหรือวิศวกรโครงสร้างจะวิเคราะห์โครงสร้างด้วยการแบ่งโครงสร้างออกเป็นส่วนๆ เช่น งานอาคารทั่วไป จะจำแนกชิ้นส่วนของโครงสร้างเป็นพื้น คาน เสาและงานฐานราก เป็นต้น และขั้นตอนต่อมาจะทำการวิเคราะห์แต่ละชิ้นส่วน ดังกล่าว ถ้าเป็นอาคารสูง จะวิเคราะห์โครงสร้างทั้งหมดเป็นโครงสร้างข้อแข็งชุดเดียวกัน เช่น สมมุติให้พื้น คาน เสาและงานฐานรากยึดแน่นเป็นโครงสร้างเดียวกัน หรืออาจจะใช้กำแพงคอนกรีตเสริมเหล็กหรือปล่อลิฟต์อิงแนบกับโครงข้อแข็งที่ประกอบไปด้วย พื้น คานและเสา เพื่อเพิ่มความแข็งแรงให้แก่ โครงสร้าง เมื่อได้รูปแบบของโครงสร้างตามสมมุติฐานแล้ว จะต้องกำหนดขนาดของแรงที่คาดคะเนว่าจะมากระทำต่อโครงสร้างตลอดอายุการใช้งาน ซึ่งรวมไปถึงแรงที่เกิดจาธรรมชาติเป็นครั้งคราว เช่น แผ่นดินไหว ลมพายุ เป็นต้น และจะต้องกำหนดชนิดของวัสดุที่จะใช้มาทำเป็นชิ้นส่วนโครงสร้าง เช่น คอนกรีตเสริมเหล็ก คอนกรีตอัดแรง หรือเหล็กรูปพรรณ เป็นต้น

สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้าง (Structural Analysis) จะต้องอาศัยพื้นฐานความรู้มาจากแนวคิด ทฤษฎีของวิชาทฤษฎีโครงสร้าง เพื่อจะหาแรงปฏิกิริยา แผนภาพแรงเฉือน แผนภาพของโมเมนต์ดัน เพื่อจะนำเอาวิธีการต่างๆ ที่กล่าวมาทำการวิเคราะห์โครงสร้างและออกแบบโครงสร้างอาคารต่อไป ซึ่งจะนำไปสู่การประหยัดค่าใช้จ่ายและมีความปลอดภัยในชีวิตและทรัพย์สินของประชาชน และในขณะเดียวกันการวิเคราะห์โครงสร้าง มีจุดมุ่งหมายในการคาดคะเนพฤติกรรมของโครงสร้างภายใต้แรงกระทำต่างๆ โครงสร้างที่ต้องรับน้ำหนักบรรทุกหรือแรงกระทำ จะเกิดการโก่งตัวและเกิดหน่วยแรงเกิดขึ้นในองค์อาคาร ตลอดจนแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ ผลการวิเคราะห์มักออกแบบมาในรูปของโมเมนต์ดัด แรงเฉือน แรงตามแนวแกนองค์อาคาร และแรงบิดตำแหน่งต่างๆ ในองค์อาคารที่ประกอบเป็นองค์อาคาร

ในการวิเคราะห์โครงสร้างและออกแบบโครงสร้างต่างๆ นั้น จำเป็นอย่างมากที่นักศึกษาและผู้ที่สนใจต้องทราบชิ้นส่วนต่างๆของโครงสร้าง (Member of Structural) อาคาร สะพาน โครงถัก หอถังสูง และคาน เป็นต้น ซึ่งถ้าพิจารณาจากค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ณ หน้าตัดใดๆ ตลอดความยาวของชิ้นส่วนนั้น ๆ ว่า หน้าตัดใดของชิ้นส่วนมีค่าแรงแอนและโมเมนต์ดัดสูงสุด (Maximum

Shear Force and Maximum Bending Moment) และรวมไปถึงสภาพการเปลี่ยนแปลงค่าแรงเฉือนแล โมเมนดัดเป็นไปในลักษณะใด เป็นต้น ณ หน้าตัดใดๆ ของชิ้นส่วน สมารถช่วยในการพิจารณาดังกล่าวได้เป็นอย่างมากและเป็นที่นิยมใช้ในการพิจารณา โดยแผนภาพที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของค่าแรงเฉือนกับความยาวของชิ้นส่วนเราเรียกว่า “แผนภาพแรงเฉือน (Shear Force Diagram)” หรือตัวย่อ SFD ส่วนแผนภาพที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของค่าโมเมนต์ดัดกับความยาวของชิ้นส่วนของโครงสร้าง เรียกว่า “แผนภาพของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram)” หรือ BMD

ในหน่วยนี้จะกล่าวถึงการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด (Shear Force Diagram and Bending Moment Diagram)ในคานเท่านั้นโดยใช้สมการของการสมดุล การเขียนแรงตามแนวแกน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด การใช้สมการสมอนุพันธ์หาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุกแผ่ แรงเฉือน แลโมเมนต์ดัด ที่สำคัญนักศึกษาจะนำไปใช้ในการคำนวณหาการแรงเฉือนที่ปลอดภัย การคำนวณหาระยะห่างของเหล็กปลอก การคำนวณหาเหล็กคาน เสา และการคำนวณหาการโก่งตัวของโครงสร้างอาคารต่างๆ เป็นต้น นอกจากนั้นยังเป็นเครื่องมือพิจารณาถึงการเปรียบเทียบหน่วยแรงที่เกิดขึ้นจริง เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกตายตัว (Dead Load) และน้ำหนักบรรทุกจร (Live Load)

ในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยาจะเป็นการหาการสมดุลของแรงที่กระทำต่อแรงต้านและแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างโดยทั่วๆ ไปนั้นสามารถแบ่งออกเป็น 2 ชนิดใหญ่ๆ ได้แก่ โครงสร้างแบบง่าย (Determinate Structure) และโครงสร้างแบบยาก (Indeterminate Structure) ในหน่วยนี้จะกล่าวถึงการวิเคราะห์อย่างง่ายเท่านั้น สำหรับแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง มีรายละเอียด ดังนี้

3.1.1 แรงกระทำ (Active Force) หมายถึง น้ำหนักของโครงสร้างเอง หรือน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง ได้แก่ น้ำหนักบรรทุกจร เช่น น้ำหนักสิ่งของต่างๆ ที่เคลื่อนย้ายได้

3.1.2 แรงต้านตรงที่รองรับ (Support Force) หมายถึง แรงที่ทำให้เกิดความสมดุล (Equilibrium) ระหว่างแรงกระทำกับแรงที่รองรับ หรือที่รู้จักกันโดยทั่วไปที่เรียกว่าแรงปฏิกิริยา

สำหรับโครงสร้างอย่างง่าย (Determinate Structure) ใช้สมการสมดุลเพียงสมการเดียวเท่านั้น

หลักทั่วไปของแรงปฏิกิริยา เนื่องมาจากแรงกระทำต่อโครงสร้างต่างๆ เช่น คาน เราใช้กฎของสถิตศาสตร์ ดังนี้

$$\Sigma H = 0$$

$$\Sigma V = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

3.1.3 แรงลัพท์

3.1.3.1 แรงลัพท์ที่เกิดจากแรงภายนอกมากระทำนี้มีชื่อเรียกต่างๆ กันโดยมีรายละเอียด ดังนี้

1) แรงตามแนวแกน (Axial Force) หมายถึง แรงลัพธ์ตามแนวแกนที่เกิดจากแรงภายนอก

2) แรงเฉือน (Shear Force) เป็นแรงลัพธ์ในแนวตั้งฉากกับแนวที่เกิดจากแรงภายนอก

3) โมเมนต์ดัด (Bending Moment) โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากแรงภายนอก

3.3.1.2 ขนาดและทิศทางของแรงต้านภายใน คำนวณได้โดยอาศัยสมการของการสมดุล

$$\Sigma F_x = 0 \ , \ \Sigma F_y = 0 \ , \ \Sigma F_M = 0$$

ส่วนแรงต้านภายใน ใช้ความหมาย มีรายละเอียด ดังนี้

แรง F เรียกว่า แรงต้านทานตามแนวแกน (Axial Resisting Force)

แรง S เรียกว่า แรงต้านทานต่อการเฉือน (Shear Resisting Force)

แรง M เรียกว่า โมเมนต์ต้านทานต่อการดัด (Moment Resisting Moment)

3.2 แรงปฏิกิริยาและฐานรองรับ

ในการออกแบบโครงสร้างอาคาร จะต้องมีความรู้ ทักษะความชำนาญในการหาแรงปฏิกิริยาเพื่อจะนำไปใช้ในการหาแรงเฉือนสูงสุด โมเมนต์สูงสุด และนำไปออกแบบโครงสร้างต่างๆ ต่อไป สิ่งที่สำคัญจะต้องหาแรงปฏิกิริยาก่อนเสมอ นั้นก็คือสัญลักษณ์และเครื่องหมายของโครงสร้างโดยมีรายละเอียด ดังนี้

3.2.1 แบบยึดจุดต่อหมุน (Hing Support) ลักษณะการยึดหมุนแบบนี้จะไม่มีการเคลื่อนที่และมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้น2 ทางการทำงานเหมือนกับบานพับจะหมุนรอบแกนค่าของโมเมนต์ที่จุดชนิดนี้จะมีค่าเท่ากับศูนย์ จุดรองรับแบบนี้จะรับแรงได้ทั้งแนวดิ่งและแนวนอนดังแสดงในภาพที่ 3.1

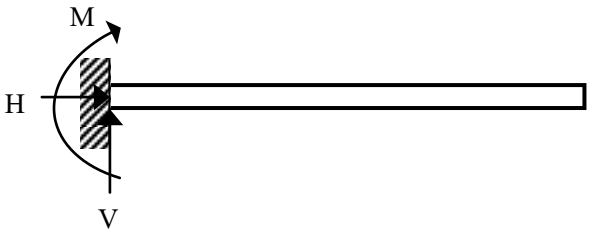
ภาพที่ 3.1 ฐานรองรับแบบยึดหมุน

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:38)

3.2.2 แบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว (Roller Support) ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้ ชนิดแบบหมุนและเคลื่อนที่แบบนี้รับแรงได้ทางดิ่งอย่างเดียว แรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นมีทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวของฐาน สัญลักษณ์ลูกล้อแสดงว่า ฐานรองรับชนิดนี้เคลื่อนตัวไปมาตามพื้นผิวเรียบที่รองรับฐาน โครงสร้างจริงที่ใช้ ได้แก่ โครงหลังคาเหล็กแบบโครงข้อหมุน หรือคานเหล็กรูปพรรณ ซึ่งวางอยู่ในลักษณะคานช่วงพาดเดี่ยว มีฐานรองรับปลายหนึ่งเป็นแบบจุดต่อหมุน ส่วนอีกปลายหนึ่งเป็นฐานรองรับแบบล้อเลื่อนเพื่อเปิดโอกาสให้คานหรือโครงข้อหมุนเคลื่อนตัวได้ตามแนวแกนของคาน ซึ่งเป็นผลมาจากการขยายตัวเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ เมื่อมีน้ำหนักบรรทุก หรือแรงภายนอกกระทำต่อโครงสร้าง องค์อาคารที่ยึดติดกับฐานรากรับแบบล้อเลื่อนจะเกิดการโก่งตัวทำมุมกับแนวเดิมขององค์อาคาร ดังแสดงในภาพที่ 3.2

ภาพที่ 3.2 ฐานรองรับแบบหมุนและเคลื่อนที่ได้ทางเดียว
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2544:54)

3.2.3 แบบยึดแน่น (Fixed Support) จุดรองรับแบบนี้จะยึดแน่นอยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ไม่ได้ จึงทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาทุกทิศทาง จึงมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้นทั้ง 2 ทิศทางและมีโมเมนต์เดียว ได้แก่ แรงปฏิกิริยาที่มีทิศทางตามแนวแกนขององค์อาคาร และแรงปฏิกิริยาที่มีทิศทางตั้งฉากกับแนวแกนขององค์อาคาร นอกจากนี้ฐานรองรับแบบยึดแน่นยังป้องกันมิให้องค์อาคารโก่งตัวทำมุมกับแนวอาคารเดิมขององค์อาคารที่จุดต่อกับฐานรองรับ จึงต้องมีคู่ควบหรือโมเมนต์ปฏิกิริยาเกิดขึ้นที่ฐานรองรับประเภทนี้ ฐานรากแบบยึดแน่นจะไม่ยอมให้เกิดการเคลื่อนตัวขององค์อาคารส่วนที่ยึดติดกับฐานรองรับ ไม่ว่าจะเป็นการเคลื่อนตัวเชิงมุมหรือการเคลื่อนตัวเชิงเส้นดังแสดงในภาพที่ 3.3

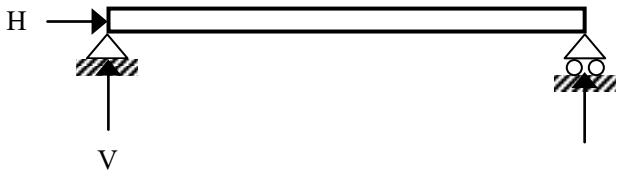


ภาพที่ 3.3 ฐานรองรับแบบยึดแน่น (Fixed Support)
ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:36)

3.3 ประเภทของคาน (Beam)

ชนิดของคานสามารถแบ่งตามที่รองรับหรือแรงปฏิกิริยาได้ ดังนี้

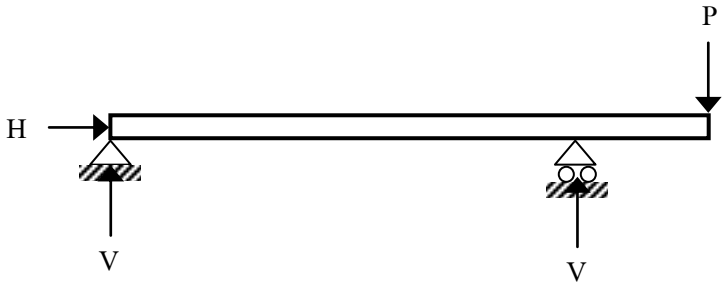
3.3.1 คานอย่างง่าย (Simple Beam) คานชนิดนี้จะรองรับด้วยลูกกลิ้งหรือสลักยึดที่ตำแหน่งของปลายคานทั้งสองข้าง และแรงปฏิกิริยาจะกระทำที่ปลายคานนั้นตั้งฉากกับคานดังแสดงในภาพที่ 3.4



ภาพที่ 3.4 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

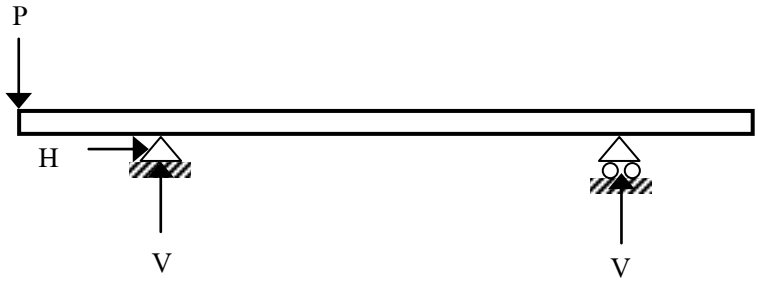
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

3.3.2 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย (Simple Beam with Overhang) คานชนิดนี้จะมีปลายด้านใดด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นออกไปจากจุดรองรับ ดังแสดงในภาพที่ 3.5 ถึง 3.7



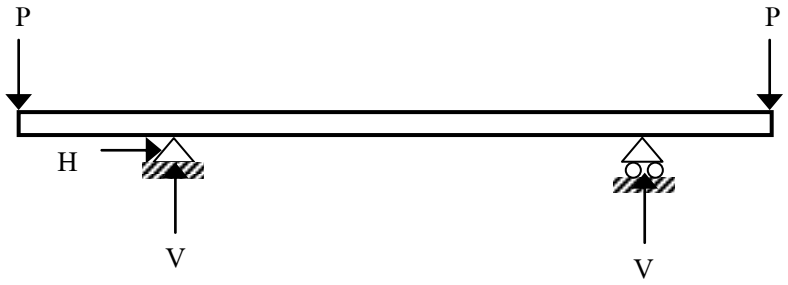
ภาพที่ 3.5 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายที่มา

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546:40)



ภาพที่ 3.6 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลาย

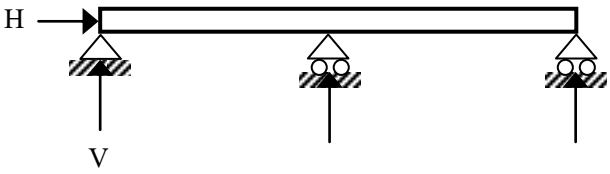
ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535: 68)



ภาพที่ 3.7 คานอย่างง่ายมีน้ำหนักกระทำที่ปลายสองข้าง

ที่มา : สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2536:39)

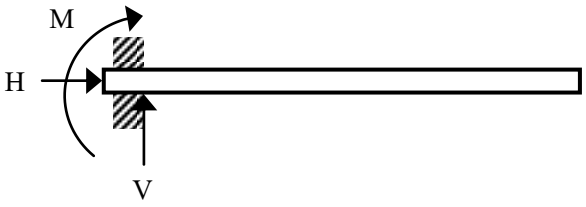
3.3.3 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam) เป็นคานที่มีจุดรองรับมากกว่า 2 จุดรองรับขึ้นไป ดังแสดงในภาพที่ 3.8



ภาพที่ 3.8 คานต่อเนื่อง (Continuous Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

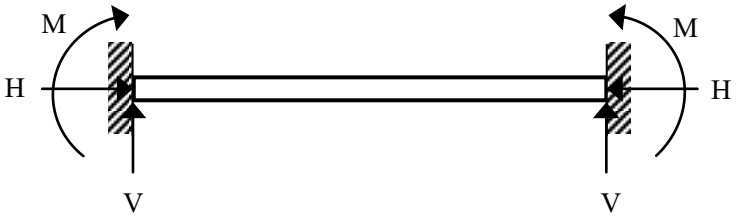
3.3.4 คานยื่น (Cantilever Beam) เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นถูกยึดแน่นฝังในตัวรองรับอย่างถาวร และจะต้องมีปลายด้านหนึ่งไม่สามารถเลื่อนตำแหน่งหรือหมุนได้ ดังแสดงในภาพที่ 3.9



ภาพที่ 3.9 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : เด่นชัย ด่านวรรณกิจ (2546:67)

3.3.5 คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam) เป็นคานที่มีปลายสองข้างยึดรั้งไม่สามารถหมุนได้ ดังแสดงในภาพที่ 3.10



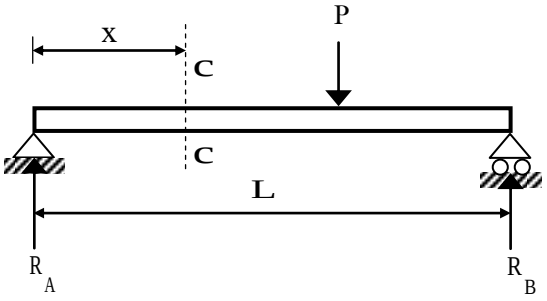
ภาพที่ 3.10 คานปลายยึดรั้ง (Fixed Beam)

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:103)

3.4 คำจำกัดความของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

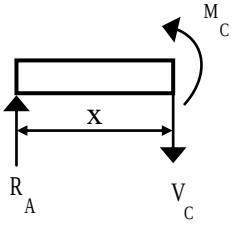
จากการพิจารณาถึงแรงจากน้ำหนักบรรทุกภายนอก และแรงต้านทานภายใน ณ หน้าตัดใด หน้าตัดหนึ่งของคานก็จะเกิดแรงเฉือน และโมเมนต์ดัดเกิดขึ้นในขณะเดียวกัน ก็จะเกิดความเค้นเกิดขึ้นในคาน ถ้ามีความเค้น (Stress) เกิดขึ้นมากๆ ก็จะทำให้คานเกิดการวิบัติหรือเสียหายได้ ดังนั้นจึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องคำนวณหาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้น โดยใช้สมการของการสมดุลทางสถิตศาสตร์ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

3.4.1 แรงเฉือน (Shearing Force) หมายถึง แรงภายในและภายนอกที่กระทำให้คานถูกเฉือนขาดในแนวดิ่ง ดังแสดงในภาพที่ 3.11



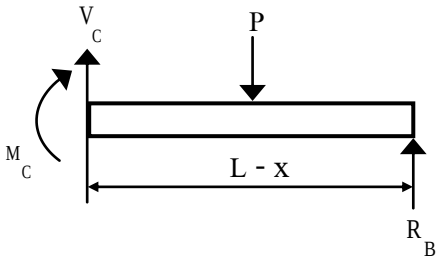
ภาพที่ 3.11 แรงเฉือน (Shearing Force)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2522:33)



ภาพที่ 3.12 ภาพตัด c-c แรงเฉือน (Shearing Force)

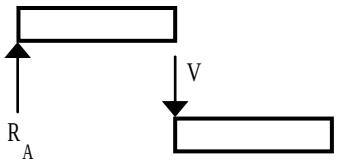
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2552:33)



ภาพที่ 3.13 ภาพตัด c-c แรงเฉือน (Shearing Force)

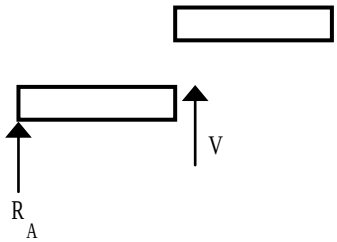
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2528:33)

สำหรับแรงเฉือนดังแสดงในภาพที่ 3.14 แรงเฉือนเป็นบวก และแรงเฉือนลบ ดังแสดงในภาพที่ 3.15 แรงเฉือนเป็นลบ



ภาพที่ 3.14 แรงเฉือนเป็นบวก

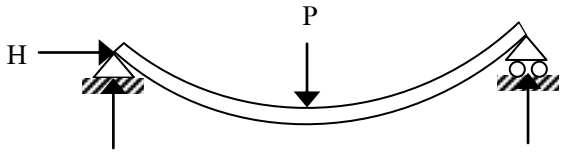
ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:110)



ภาพที่ 3.15 แรงเฉือนเป็นลบ

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:110)

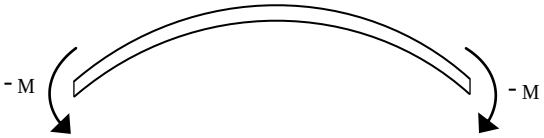
3.4.2 โมเมนต์ดัด (Bending Moment) หมายถึง โมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงเฉือนที่กระทำกับคานทำให้คานเกิดการโค้งงอถ้าโมเมนต์ดัดกระทำให้คานโก่งลงโมเมนต์จะเป็นบวก และกระทำให้โมเมนต์ดัดโก่งขึ้นโมเมนต์จะเป็นลบ ดังแสดงในภาพที่ 3.16



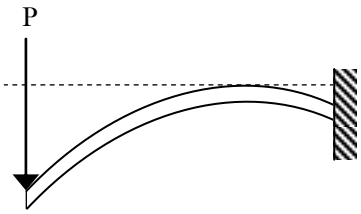
ภาพที่ 3.16 โมเมนต์ดัด (Bending moment)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2528:28)

ภาพที่ 3.17 โมเมนต์เป็นบวก
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2528:28)



ภาพที่ 3.18 โมเมนต์เป็นลบ
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2528:28)



ภาพที่ 3.19 โมเมนต์เป็นลบ
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2544:51)

การกำหนดเครื่องหมายโมเมนต์ดัด (BM) โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ถ้าโมเมนต์ดัดทำให้คานโค้งลง ให้ค่าเป็นบวก (+)

ถ้าโมเมนต์ดัดทำให้คานโค้งขึ้น ให้ค่าเป็นบวก (–)

3.4.3 น้ำหนักบรรทุก (Load) หมายถึง แรงที่ก่อให้เกิดหน่วยแรง (Stress) หรือความเครียดในโครงสร้าง การแบ่งน้ำหนักบรรทุกอาจแบ่งได้เป็นน้ำหนักบรรทุกโดยตรง (Direct Load) เช่น น้ำหนักบรรทุกตัวโครงสร้าง น้ำหนักของผู้คนบนโครงสร้าง หรือแรงลมที่ประทะโครงสร้าง และน้ำหนักบรรทุกทางอ้อม (Indirect Load) เช่น แรงที่เกิดจาแรงแผ่นดินไหว ความแตกต่างของอุณหภูมิที่ผิวด้านนอกและผิวด้านในขององค์อาคาร หรือการทรุดตัวไม่เท่ากันของฐานราก ซึ่งล้วนแต่ก่อให้เกิดหน่วยแรงและความเครียดขึ้นในโครงสร้างนั้น นอกจากจะแบ่งน้ำหนัก

บรรทุกตามลักษณะของการกระทำที่กล่าวมาแล้วนั้น ยังอาจแบ่งตามการเคลื่อนตัวหรือโยกย้ายของโครงสร้าง รายละเอียด ดังนี้

3.4.3.1 น้ำหนักบรรทุกคงที่ (Dead Load) ได้แก่ น้ำหนักของโครงสร้างเอง เช่น น้ำหนักเสา พื้น คาน เป็นต้น

3.4.3.2 น้ำหนักบรรทุกจร (Live Load) น้ำหนักที่กระทำบนโครงสร้างเคลื่อนที่ได้ เช่น น้ำหนักโต๊ะเก้าอี้ภายในห้องเรียน น้ำหนักชั้นวางหนังสือในห้องสมุด น้ำหนักของรถยนต์วิ่งบนสะพาน เป็นต้น

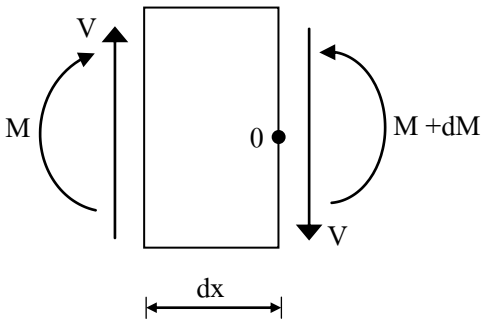
3.4.3.3 น้ำหนักกระแทก (Impact Load) เช่น น้ำหนักผู้คนที่เชียร์กีฬาที่อยู่บนอัฐจันทร์อาจจะกระโดดหรือมีการกระทืบเท้า แรงที่กระแทกมาจากน้ำหนักของตัวผู้บุคคลนั้น และน้ำหนักที่กระทำซ้ำๆ ในทิศทางกลับกัน (Fatigue Load) เช่น เครื่องจักร เครื่องยันต์ เครื่องทำความเย็นที่ติดตั้งบนโครงสร้าง จะก่อให้เกิดแรงสั่นสะเทือนซึ่งมีจังหวะของการออกแรงกระทำต่อโครงสร้างในทิศทางหนึ่งแล้วเกิดการผ่อนคลายแรงนั้น จากนั้นจะมีแรงกระทำอีกในทิศทางตรงข้ามกับแรงแรก อาจทำให้โครงสร้างเสียหายได้ ถึงแม้ว่าขนาดของแรงนั้นจะไม่มากนักก็จะทำให้เกิดความเสียหายแก่โครงสร้างได้

3.4.3.4 แรงปฏิกิริยา (Reaction) เมื่อมีน้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง ย่อมต้องเกิดแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงสร้างเพื่อสร้างสถานสภาพสมดุลของแรง ขนาดของแรงปฏิกิริยาจะเท่ากับแรงกระทำแต่มีทิศทางตรงกันข้าม แรงปฏิกิริยาอาจอยู่ในรูปควบคู่กันก็ได้

3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (W) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ (M) ในคานตรง

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (Weight) แรงเฉือน (Shear Force) และโมเมนต์ (Bending Moment) ในคานตรง จะแบ่งได้ 2 กรณี รายละเอียด ดังนี้

กรณีที่ 1 พิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ (Element) ของคานที่มีความยาว dx กระทำตลอดความของคาน dx ดังแสดงในภาพที่ 3.20



ภาพที่ 3.20 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:167)

ด้านซ้ายมือของชิ้นส่วนขนาดเล็ก (Element) จะมีแรงเฉือน V (Shear Force) และโมเมนต์ M (Bending Moment) ที่ด้านขวามือเนื่องจากไม่มีน้ำหนัก (Load) กระทำในช่วง dx (Shear Force) ก็ยังมีค่าเท่าเดิมคือ V แต่ โมเมนต์ M (Bending Moment) จะมีค่าเปลี่ยนไปเนื่องจากระยะเปลี่ยน ให้มีค่าเป็น M+dM ชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) นี้สมดุล สามารถหาโมเมนต์ (Take Moment รอบจุด O จะได้

$$(M+dM) - M - Vdx = 0$$

แรงปฏิกิริยา $$\frac{dM}{dx} = V \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

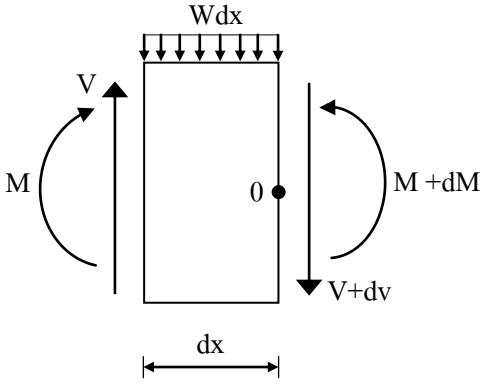
นั้นคือ อัตราการเปลี่ยนของโมเมนต์ (Bending Moment) เทียบกับ x จะเท่ากับแรงเฉือน (Shear Force)

$$\int_{x1}^{x2} dM = \int_{x1}^{x2} Vdx$$

$$M_2 - M_1 = \int_{x1}^{x2} Vdx$$

ดังนั้นคือ ค่าของโมเมนต์ (Bending Moment) ที่เปลี่ยนเป็นระยะ x_1 ถึง x_2 เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ (Graph) ของแรงเฉือน (Shear Force) ในช่วงเดียวกันนั้น

กรณีที่ 2 ถ้ามีน้ำหนักแผ่สม่ำเสมอ W (Uniform Distribution Load) ในช่วง dx ด้านซ้ายมือของชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) มีแรงเฉือน V (Shearing Force) และโมเมนต์ M (Bending Moment) ด้านขวามือของ ชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) มีแรงเฉือน (Shearing Force) V+Dv และโมเมนต์ M (Bending Moment) M+dM ชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) นี้สมดุล สามารถหาโมเมนต์ (Take Moment รอบจุด O จะได้ ดังแสดงในภาพที่ 3.21



ภาพที่ 3.21 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:167)

$$(M+dM) - M - Vdx+wdx(\frac{dx}{2}) = 0$$

ตัดทิ้ง $W\frac{dx^2}{2}$ เพราะน้อยมาก

$$\text{ดังนั้น } \frac{dM}{dx} = V \text{ เหมือนกันกับ (4.1)}$$

$$\text{ถ้าคิดผลรวมของแรง} = 0$$

$$\text{นั้นคือ } V-(V+dV)-Wdv = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = -W \text{ .....(3.2)}$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนของ (Shearing Force) เทียบกับ x จะเท่ากับ Intensity of Loading แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม

ค่าของโมเมนต์ (Bending Moment) ที่เปลี่ยนเป็นระยะ x_1 ถึง x_2 เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ (Graph) ของแรงเฉือน ในช่วงเดียวกันนั้น ดังนี้

$$\therefore \int_{x1}^{x2} dV = -\int_{x1}^{x2} Wdx$$

$$V_2 - V_1 = \int_{x1}^{x2} Wdx$$

$$V_2 - V_1 = \int_{x1}^{x2} Wdx$$

จากสมการที่ (3.1) และ (3.2) จะได้

$$\therefore \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -W \text{ .....(3.4)}$$

3.6 ขั้นตอนการสร้าง แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคาน

3.6.1 คำนวณแรงปฏิกิริยาจากสมการของสภาพสมดุล

3.6.2 คำนวณแรงเฉือนที่กระทำต่อส่วนตัดของคานแต่ละช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ

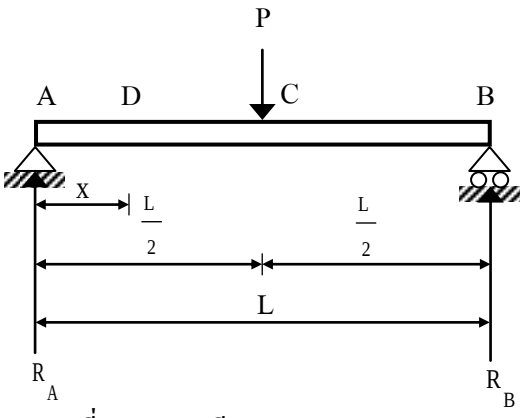
3.6.3 เขียนแผนภาพแรงเฉือน โดยพิจารณาความลาดชันที่จุดหนึ่งๆ

3.6.4 หาตำแหน่งที่แรงเฉือนเป็นศูนย์

3.6.5 คำนวณโมเมนต์ที่กระทำต่อส่วนตัดของคานแต่ละช่วงและจะต้องคำนวณค่าของโมเมนต์ดัดที่จุดซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ และจุดซึ่งแรงเฉือนเป็นศูนย์

3.6.6 เขียนแผนภาพโมเมนต์ให้ผ่านจุดกระทำของโมเมนต์ดัดที่คำนวณไว้ในขั้นตอนที่ 5 โดยพิจารณาความลาดชันที่จุดหนึ่งๆ

ตัวอย่างที่ 3.1 คานมีแรงแบบจุดกระทำตรงกลาง จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.22



ภาพที่ 3.22 คานมีแรงแบบจุดกระทำตรงกลาง

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:169)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P}{2} \ (\uparrow^+)$

แรงปฏิกิริยา $R_B = \frac{P}{2} \ (\uparrow^+)$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

$R_A = \frac{P}{2} \ (\uparrow^+)$

$R_B = \frac{P}{2} \ (\uparrow^+)$

ในช่วง AC $V = +\frac{P}{2}$

พอผ่านจุด C $V = +\frac{P}{2} - P$

$= -\frac{P}{2}$ และมีค่าคงที่เช่นนี้ตลอดช่วง AC

ถ้าคิดด้านซ้ายมือ แรงเฉือนที่จุด B $= -\frac{P}{2}$ เพราะแรงปฏิกิริยาที่ B เฉือนวัสดุทวนเข็มนาฬิกา

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

$$\text{BM ที่จุด D} = M_X = +\frac{P}{2} \times x$$

จะได้กราฟเส้นตรงเริ่มจาก $M_A = 0 \quad (\text{ที่ } x = 0)$

$$\text{ถึง } M_C \left(\text{ที่ } x = \frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2} \times \frac{L}{2}$$

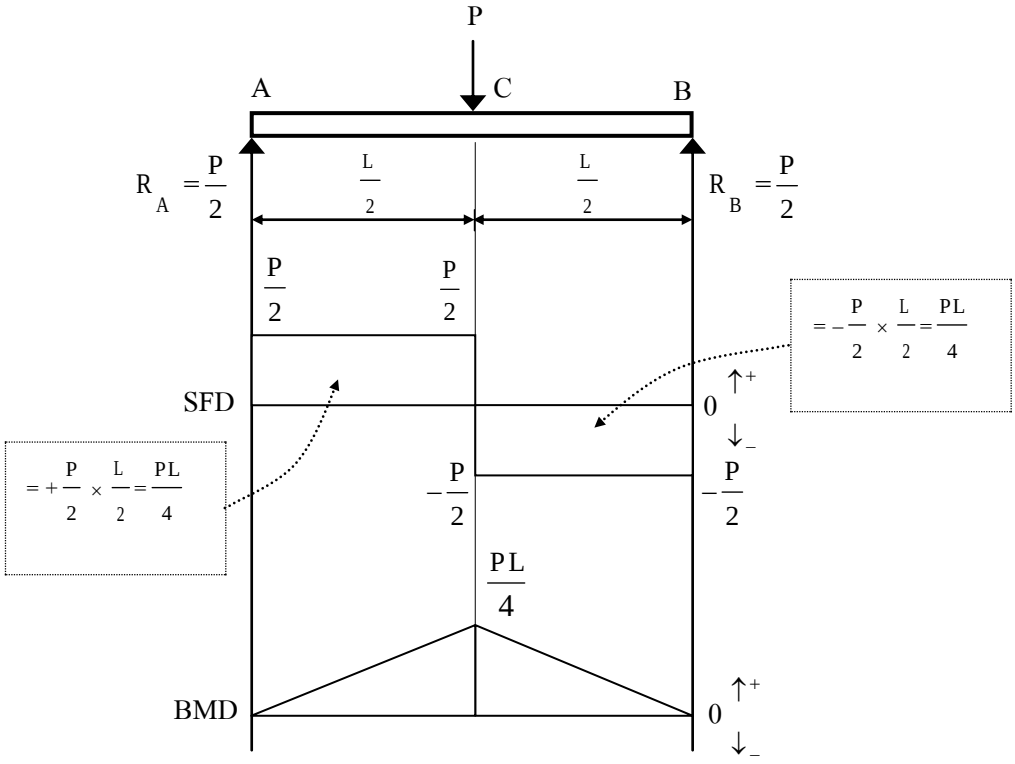
$$= \frac{PL}{4}$$

ถ้าคิดทางด้านขวามือจะได้กราฟเส้นตรงเช่นกัน เริ่มจาก M_B

$$M_B = 0 \quad \text{ถึง } M_C = \frac{PL}{4}$$

โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\therefore$ Mmax $= \frac{PL}{4}$ (เกิดขึ้นตรงกลางใต้แรงที่กระทำ)

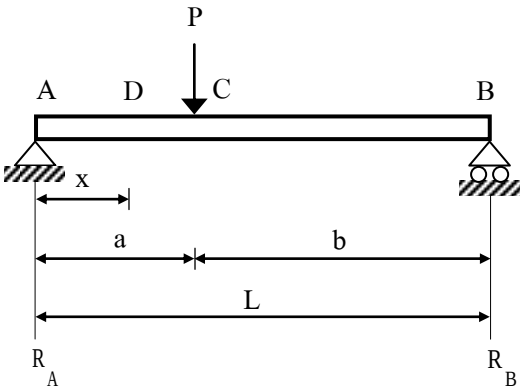
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ $-\frac{P}{2}$ และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{PL}{4}$ **ตอบ**



ภาพที่ 3.23 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2552)

ตัวอย่างที่ 3.2 คานมีแรงแบบจุดกระทำแต่ไม่อยู่ตรงกลาง จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.24



ภาพที่ 3.24 คานมีแรงแบบจุดกระทำแต่ไม่อยู่ตรงกลาง

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546:27)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{Pb}{L} (\uparrow^+)$

แรงปฏิกิริยา $R_B = \frac{Pa}{L} (\uparrow^+)$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

$R_A = \frac{P}{2} (\uparrow^+)$

$R_B = \frac{P}{2} (\uparrow^+)$

ในช่วง AB $X < a$

$V_X = \frac{Pb}{L}$ (ค่าคงที่ตลอด AC)

ในช่วง CB $X > a$

$V_X = \frac{Pb}{L} - P$

$= P(\frac{b - L}{L})$

$$\therefore \quad V_X = -\frac{Pa}{L} \quad \text{(ถ้าคิดทางขวามือก็จะได้ค่าเดียวกัน)}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

$$\text{AC ที่จุด C} = M_X \text{ (ที่D)} = +\frac{Pbx}{L}$$

$$\text{จะได้กราฟเส้นตรงเริ่มจาก } M_D = 0 \quad (\text{ที่ } x = 0)$$

$$\text{ถึง } M_C \text{ (ที่ } x = a) = \frac{Pab}{L}$$

$$\text{ในช่วง CB} \qquad M_X = \frac{Pbx}{L} - P(x-a), \quad (x>a)$$

$$= Px\left(\frac{b}{L} - 1\right) + Pa$$

$$= Px\left(\frac{b-1}{L}\right) + Pa$$

$$= -\frac{Pax}{L} + Pa$$

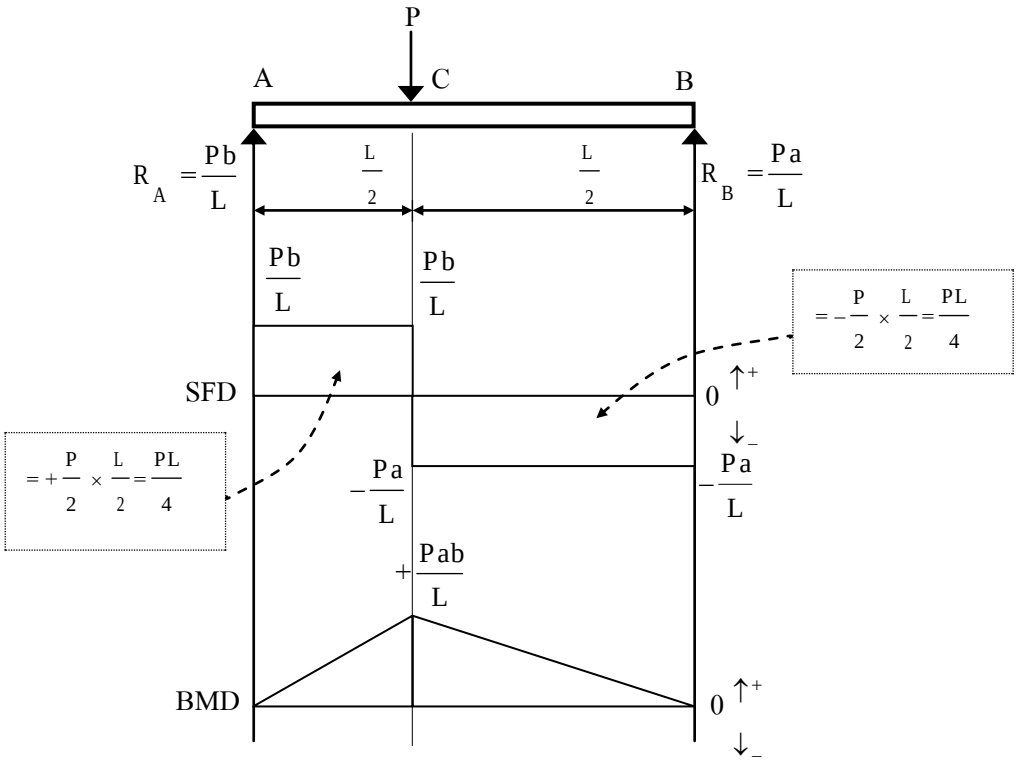
$$= -\frac{Pa}{L}(1-x)$$

จะได้กราฟเส้นตรงที่ $x = 1$, $M_B = 0$ และที่ $x = a$, $= M_C = \frac{Pab}{L}$

โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\therefore \quad Mmax = \frac{Pab}{L}$ (เกิดขึ้นตรงจุด D)

ข้อสังเกต ในช่วงระหว่าง CB นี้ถ้าคิดจากขวามือไปยังซ้ายมือก็จะได้ผลลัพธ์ เช่น เดียวกัน แต่ง่ายกว่า

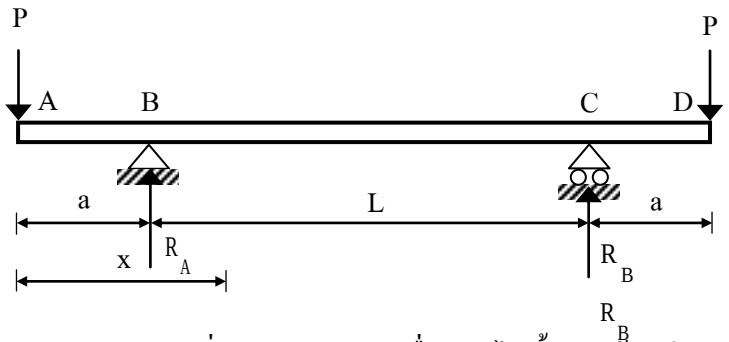
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ $\frac{Pb}{L}$ หรือ $\frac{Pa}{L}$ และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{Pab}{L}$ **ตอบ**



ภาพที่ 3.25 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.3 คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน มีแรงแบบจุดเท่ากันกระทำที่ปลายสองข้าง จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.26



ภาพที่ 3.26 คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน

ที่มา : บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545:42)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

แรงปฏิกิริยา $R_A = P(\uparrow^+)$

แรงปฏิกิริยา $R_B = P(\uparrow^+)$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

$$R_A = \frac{P}{2}\ (\uparrow^+)$$

$$R_B = \frac{P}{2}\ (\uparrow^+)$$

ในช่วง AB V คงที่ $= -P$

ในช่วง BC V คงที่ $= -P+P = 0$

ในช่วง CD V คงที่ $= +P$

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

ช่วง AB กราฟของ BM เส้นตรงเริ่มจากโมเมนต์

$M_A = 0$ ถึง $M_B = -Pa$

ในช่วง BC $M_X = -Px+P(x-a)$

$= -Pa$ (จึงมีค่าคงที่ถึงจุด C)

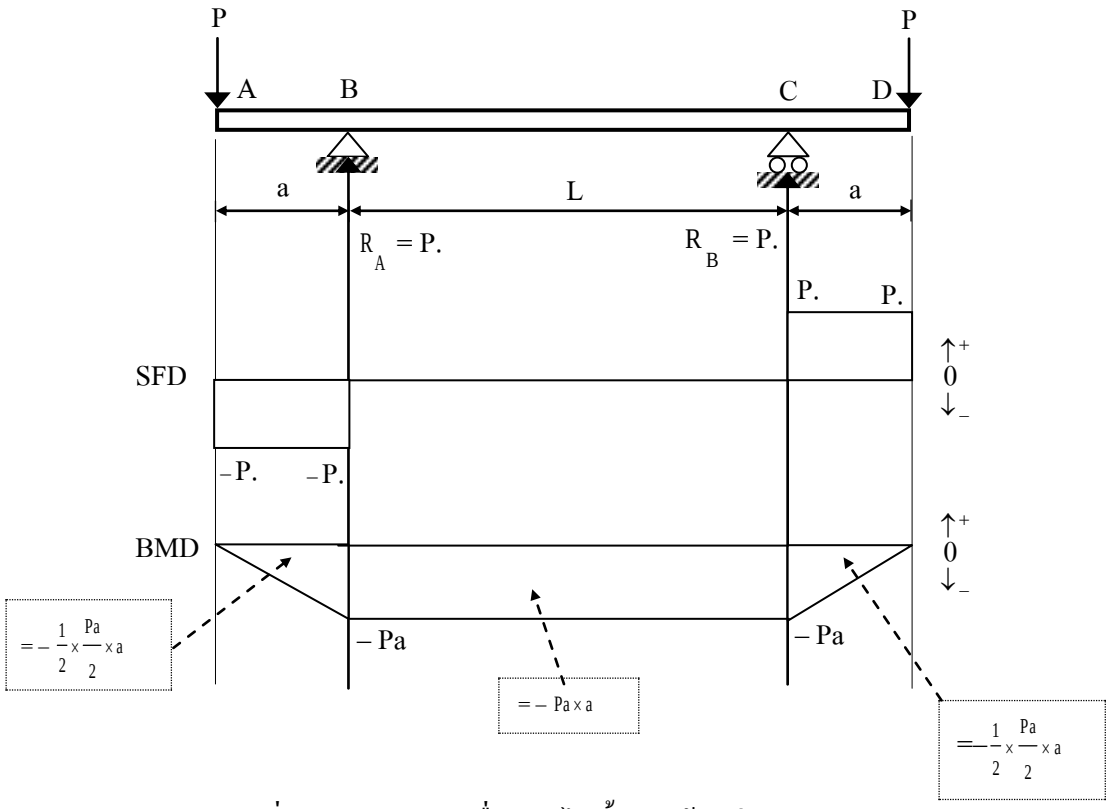
ช่วง CD กราฟของ BM เส้นตรงเริ่มจากโมเมนต์

$M_C = -Pa$ ถึง $M_D = 0$

โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\therefore$ $M_{max} = -Pa$ (เกิดขึ้นระหว่างจุด A ถึง B)

ข้อสังเกต ในช่วง BMD มีค่าคงที่ในช่วง BC คือระหว่างจุดรองรับ

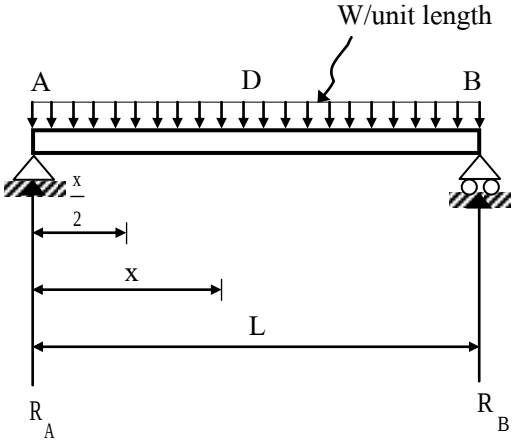
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ $R_A = R_B$ เท่ากับ P และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $-Pa$ **ตอบ**



ภาพที่ 3.27 คานมีปลายยื่นออกไปทั้งสองข้างเท่ากัน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2552:54)

ตัวอย่างที่ 3.4 คานอยู่ภายใต้แรงกระจายสม่ำเสมอ มีแรงแบบจุดเท่ากันกระทำที่ปลายสองข้าง จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.28



ภาพที่ 3.28 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

$$\text{แรงปฏิกิริยา} \quad R_A = \frac{WL}{2} (\uparrow^+)$$

$$\text{แรงปฏิกิริยา} \quad R_B = \frac{WL}{2} (\uparrow^+)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

$$R_A = \frac{WL}{2} (\uparrow^+)$$

$$R_B = \frac{WL}{2} (\uparrow^+)$$

$$\text{SFD ที่จุด A} = V_X$$

$$= \frac{WL}{2} - Wx$$

นั้นคือ V_X เป็นปฏิภาคโดยตรงกับ x

$$\text{ที่ } x = 0 \quad V_B = \frac{WL}{2}$$

$$\text{ที่ } x = 1 \quad V_C = -\frac{WL}{2}$$

$$\text{ที่ } x = \frac{1}{2} \quad V_D = 0$$

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

$$M_X = \frac{WL}{2}.x - Wx.\frac{x}{2}$$

$$= \frac{WL}{2}.x - \frac{wx^2}{2}$$

กราฟของ BM จะเป็น Parabola รายละเอียด ดังนี้

$$\text{ที่ } x = 0 \quad M_B = 0$$

$$\text{ที่ } x = \frac{1}{2} \quad M_D = \frac{WL}{2}.\frac{L}{2} - \frac{WL^2}{2}$$

$$= \frac{WL^2}{8}$$

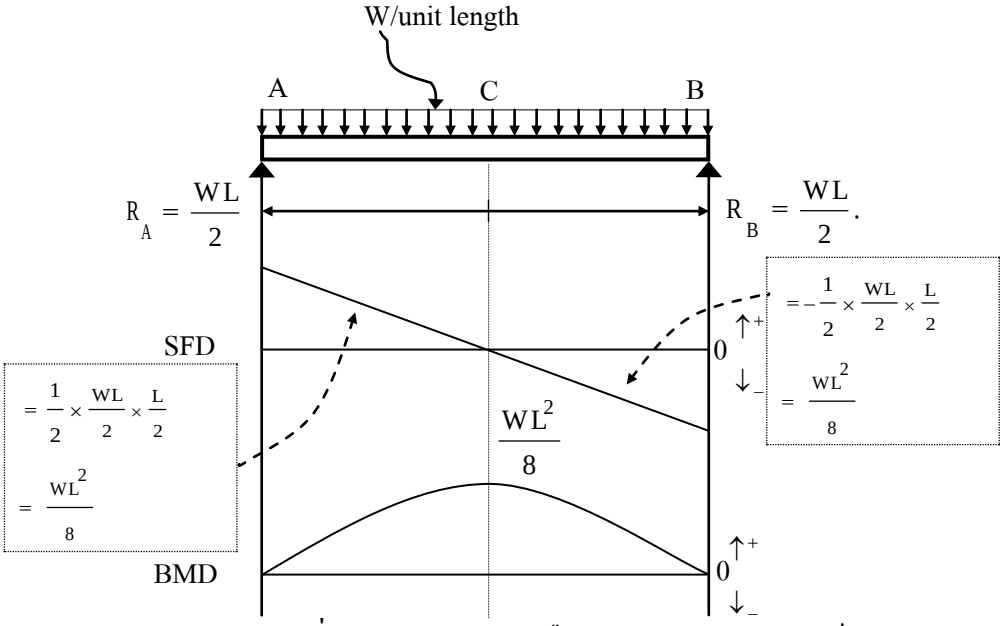
$$\text{ที่ } x = 1 \quad M_C = 0$$

โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\therefore$ $M_{max} = \frac{WL^2}{8}$ (เกิดขึ้นระหว่างจุด A ถึง B)

ข้อสังเกต 1. โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ Mmax เกิดขึ้นตรงกลางมีค่าเท่ากับ $\frac{WL^2}{8}$ และตรงที่จุดที่ให้

2. จุดที่ค่าโมเมนต์สูงสุด Mmax (ที่จุด D) ค่าของ SF = 0

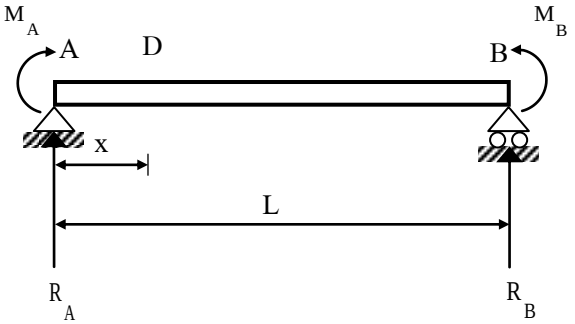
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ $R_A = R_B$ เท่ากับ $\frac{WL}{2}$ ($\uparrow^+$) และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{WL^2}{8}$ **ตอบ**



ภาพที่ 3.29 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.5 คานมีโมเมนต์ตาม M_A ที่จุด A และโมเมนต์ตาม M_B ที่จุด B จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.30



ภาพที่ 3.30 คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับ

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:170)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

$$\text{แรงปฏิกิริยา} \quad R_A = \frac{M_B - M_A}{L} \ (\uparrow^+)$$

$$\text{แรงปฏิกิริยา} \quad R_B = \frac{M_B - M_C}{L} \ (\uparrow^+)$$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

หาโมเมนต์รอบจุด C $R_A .L + M_A = M_B$

$$R_A = \frac{M_B - M_A}{L} \ (\uparrow^+)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$R_B = \frac{M_A - M_B}{L} \ (\uparrow^+)$$

$$-R_A = \frac{M_A - M_B}{L} \ (\uparrow^+)$$

$$\text{แรงเฉือน (Shear Force)} = R_A = \frac{M_A - M_B}{L}$$

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

$$M_x = M_A + R_A . x = M_A + \frac{M_B - M_A}{L} . x = \frac{M_A (L - x)}{L} + \frac{M_B .x}{L}$$

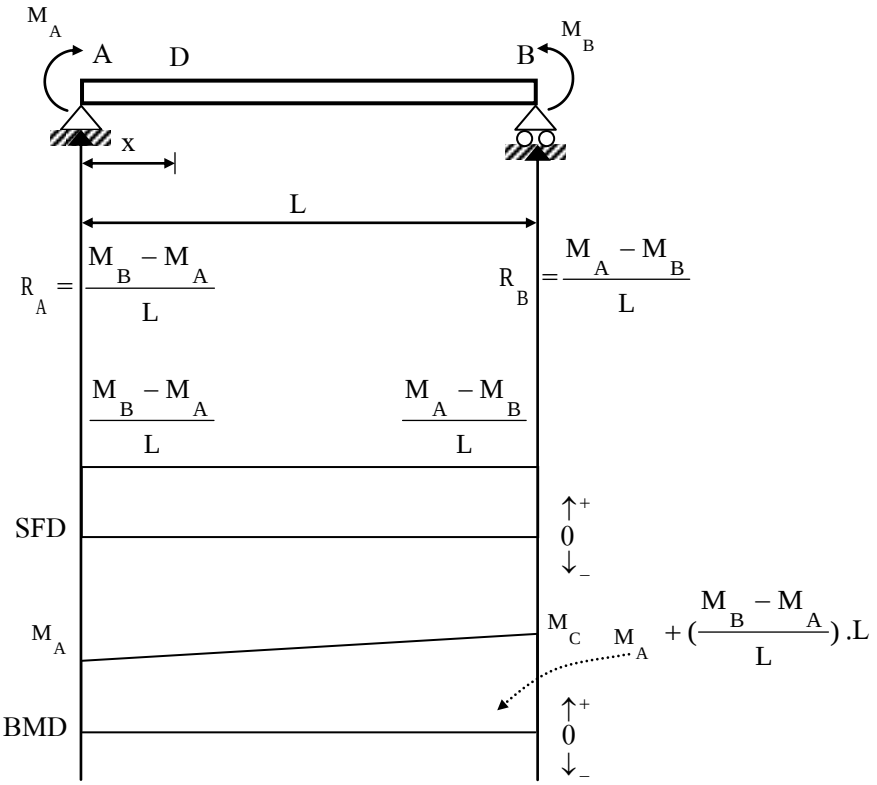
M เป็นปฏิภาคโดยตรงกันกับ x จะได้กราฟเส้นตรง

ที่ $x = 0 \quad M = M_A$

ที่ $x = 1 \quad M = M_B$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ $\frac{M_B - M_A}{L} (\uparrow^+)$,หรือ **ตอบ**

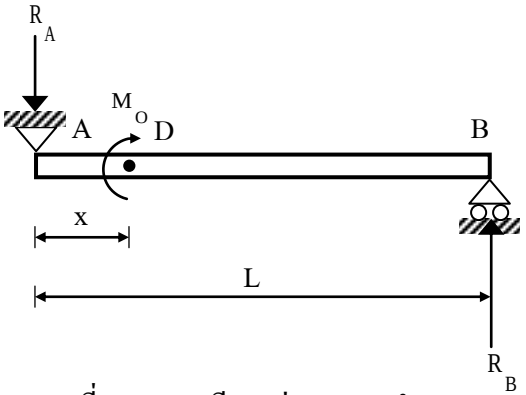
R_B เท่ากับ $\frac{M_A - M_B}{L} \ (\uparrow^+)$ และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{M_A (L - x)}{L} + \frac{M_B .x}{L}$



ภาพที่ 3.31 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:173)

ตัวอย่างที่ 3.6 คานมีแรงคู่ควบ M_O กระทำที่ยะ x จาก A แรงปฏิกิริยาที่ A และ B จะต้องเท่ากันและกระทำตรงกันข้ามกัน เพื่อทำให้เกิดแรงคู่ควบต้าน M_O จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.32



ภาพที่ 3.32 คานมีแรงคู่ควบกระทำ

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:180)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

$$M_O = R_A .L \text{ หรือ } R_B .L$$

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{M_O}{L} (\uparrow^+)$

แรงปฏิกิริยา $R_B = \frac{M_O}{L} (\uparrow^+)$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

หาโมเมนต์รอบจุด C $R_A .L + M_A = M_B$

SF มีค่าเท่ากันตลอด $-R_A = -\frac{M_O}{L}$

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

ช่วงระหว่าง BD (x<a) $M_x = -R_A . x$

$$= -\frac{M_O}{L} .x$$

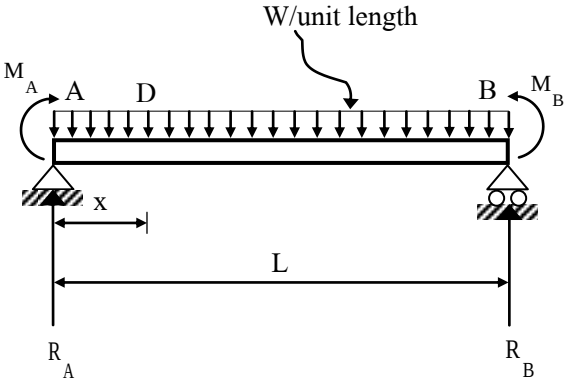
ช่วงระหว่าง DC (x>a) $M_x = -R_A . x + M_O$

$$= M_o (1 - \frac{.x}{L})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A และ R_B เท่ากับ $\frac{M_O}{L} (\uparrow^+)$ **ตอบ**

และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับช่วงระหว่าง (x<a) $M_x \; M_o (1 - \frac{.x}{L})$ และ (x<a) $M_x - \frac{M_O}{L} .x$

ตัวอย่างที่ 3.7 คานมีโมเมนต์ตาม M_A ที่จุด A และโมเมนต์ตาม M_B ที่จุด B จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.33



ภาพที่ 3.33 คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับและน้ำหนักลงสม่ำเสมอ

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546:31)

วิธีทำ

ขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}(\circlearrowleft)^{-}$

(Take Moment รอบ B และ A)

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{WL}{2} - \frac{1}{L}(M_A - M_B)$

แรงปฏิกิริยา $R_B = \frac{WL}{2} + \frac{1}{L}(M_A - M_B)$

จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งดังภาพที่ 3.34

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

โมเมนต์สูงสุด $M_x = R_A.x + M_A - \frac{Wx^2}{2}$

$R_A = \frac{M_B - M_A}{L} \ (\uparrow^{+})$

$= \frac{WLx}{2} - \frac{x}{L}(M_A - M_B) + M_A - \frac{Wx^2}{2}$

$= \frac{WL}{2}(L - x) + \frac{M_B}{L}(L - x) + M_C.\frac{x}{L}$

จะได้กราฟเป็นเส้นโค้งดังภาพที่ 3.34

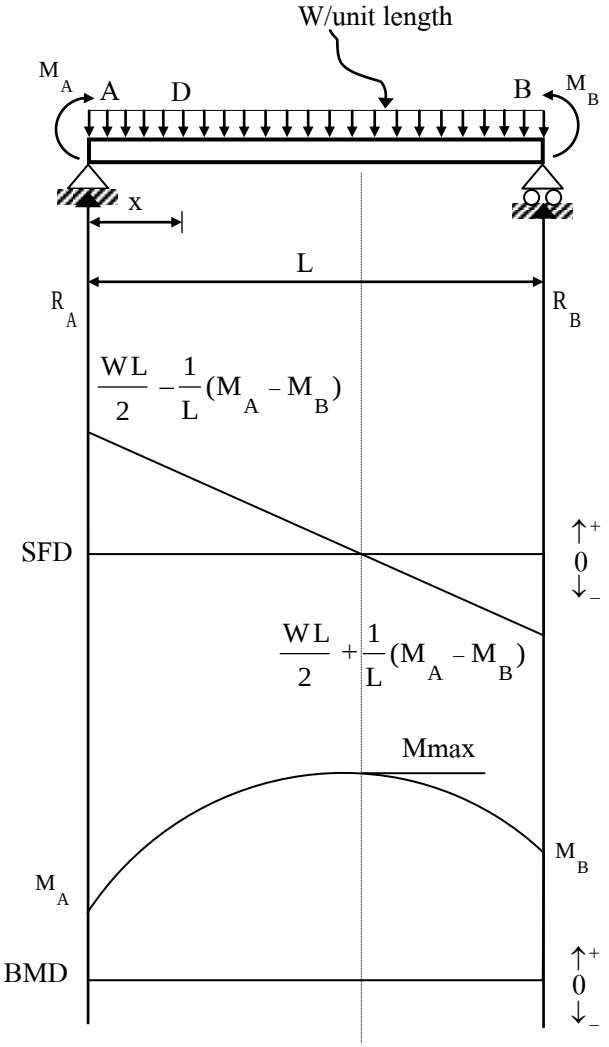
สำหรับแผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ (Bending Moment Diagram)สามารถหาได้จากวิธีแยกแรงออก ดังนี้

1) ถ้าคานอยู่ภายใต้น้ำหนักแผ่สม่ำเสมอ อย่างเดียวจะได้กราฟของโมเมนต์ (Bending Moment) เป็นพาราโบรา (Parabola) ก็สามารถทำได้

2) ถ้าคานอยู่ภายใต้โมเมนต์ M_A และ M_B เท่านั้นจะได้แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ (Bending Moment Diagram) ก็สามารถทำได้

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ $\frac{WL}{2} - \frac{1}{L}(M_A - M_B)\ (\uparrow^+)$ **ตอบ**

R_B เท่ากับ $\frac{WL}{2} + \frac{1}{L}(M_A - M_B)\ (\uparrow^+)$ และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{WL}{2}(L-x) + \frac{M_B}{L}(L-x) + M_C \cdot \frac{x}{L}$



ภาพที่ 3.34 คานมีโมเมนต์ที่จุดรองรับและน้ำหนักลงสม่ำเสมอ

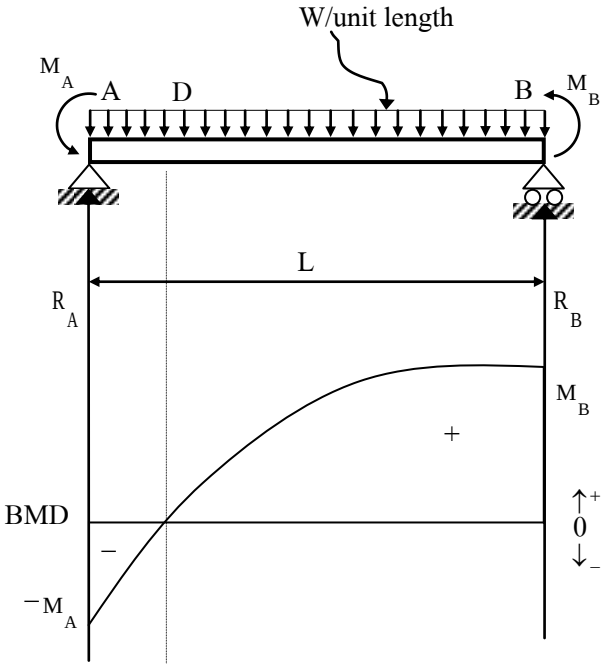
ที่มา : บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545:53)

ข้อสังเกต ถ้ากลับทิศทางโมเมนต์ที่ปลายตัวหนึ่งหรือกลับทิศทางของโมเมนต์ที่ปลายทั้งสองตัว จะได้แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ (Bending Moment Diagram) ดังนี้

R_B เท่ากับ $\frac{WL}{2} + \frac{1}{L}(M_A - M_B)$ $(\uparrow^+)$ และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{WL}{2}(L - x)$

$$+\frac{M_B}{L}(L - x) + M_C \cdot \frac{x}{L}$$

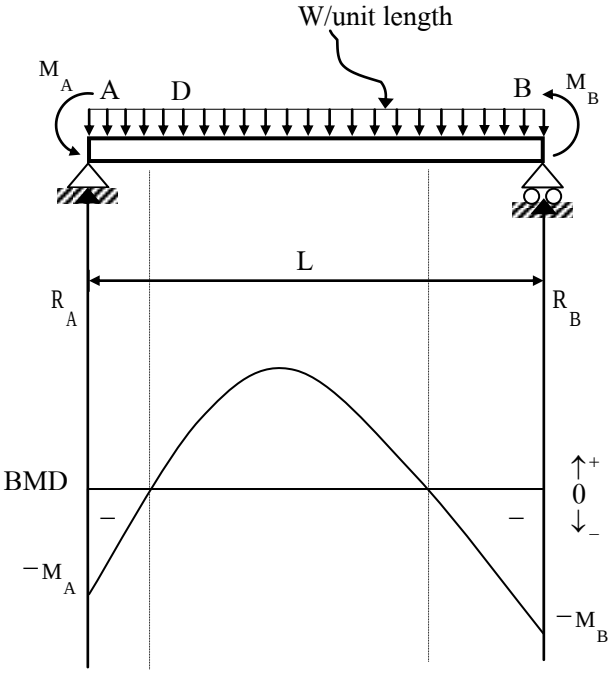
กรณีที่ 1 $-M_A$ และ $+M_B$



ภาพที่ 3.35 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่มา : สมนึก กุลประภา. (2535:39)

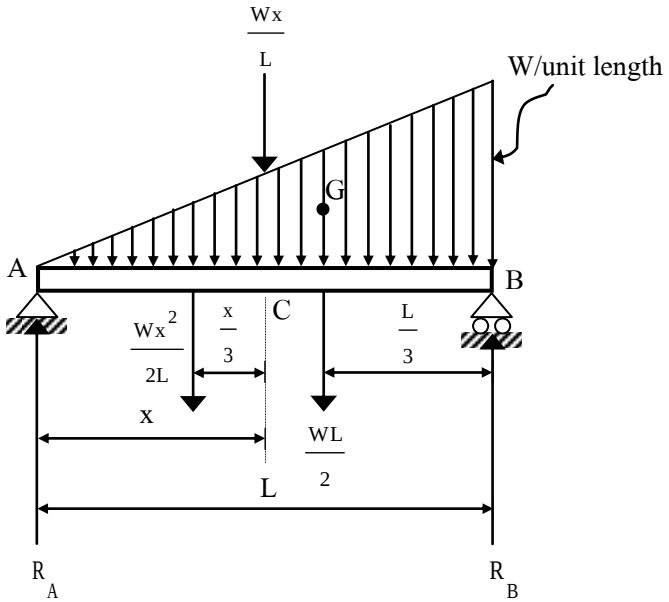
กรณีที่ 2 $-M_A$ และ $-M_B$



ภาพที่ 3.36 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่มา : สมนึก กุลประภา. (2535:40)

ตัวอย่างที่ 3.8 คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.37



ภาพที่ 3.37 คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:183)

วิธีทำ

ในการพิจารณาความยาว L อยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจากแรง = 0 ที่จุด A ถึงค่าแรง = W/unit length ที่จุด B

ดังนั้นแรงทั้งหมดตลอดความยาว L หาได้จากพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม มีค่าเท่ากับ = $\frac{1}{2} \times W \times L = \frac{Wx}{2}$ กระทำที่จุดเซนต์ทรอย (Centroid)ของพื้นที่สามเหลี่ยมจุด G ห่างจากปลาย B = $\frac{L}{3}$

สำหรับขั้นตอนในการหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาแรงปฏิกิริยา (R)

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}(\ )^{-}$

(Take Moment รอบ B และ A)

แรงปฏิกิริยา $R_A .L = \frac{WL}{2} . \frac{L}{3}$

$\therefore \quad R_A = \frac{WL}{6} (\uparrow^{+})$

$R_B = \frac{WL}{2} - \frac{WL}{6} (\uparrow^{+})$

$\therefore \quad R_B = \frac{WL}{3} (\uparrow^{+})$

พิจารณาจุด C ระยะ x จากปลาย A

แรงกระทำที่จุด C = $\frac{Wx}{L}$

แรงทั้งหมดจากจุด A ถึงจุด C = พื้นที่สามเหลี่ยม

$= \frac{1}{2} . \frac{Wx}{L} .x$

$= \frac{Wx^2}{2L}$

แรงกระทำที่จุดจุดเซนต์ทรอย (Centroid) ห่างจากจุด C = $\frac{x}{3}$

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือน (Shear Force)

แรงเฉือนที่จุด C = V_x

แรงเฉือนที่จุด C = $\frac{WL}{6} - \frac{Wx^2}{2L}$

กราฟระหว่าง V_x กับ x เป็นเส้นโค้ง

ที่ x = 0 $V_A = \frac{WL}{6}$

ที่ x = 1 $V_A = -\frac{WL}{3}$

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ (Bending Moment)

$$M_x = \frac{WL}{6} \cdot x - \frac{Wx^2}{2L} \cdot \frac{x}{3}$$

$$= \frac{WLx}{6} - \frac{Wx^3}{6L}$$ ได้กราฟเป็นเส้นตรง

แทนค่า โมเมนต์ (Bending Moment) สูงสุด SF = 0 ฯนั้นคือจะเกิดขึ้นเมื่อ

$$\frac{WL}{6} - \frac{Wx^2}{2L} = 0$$

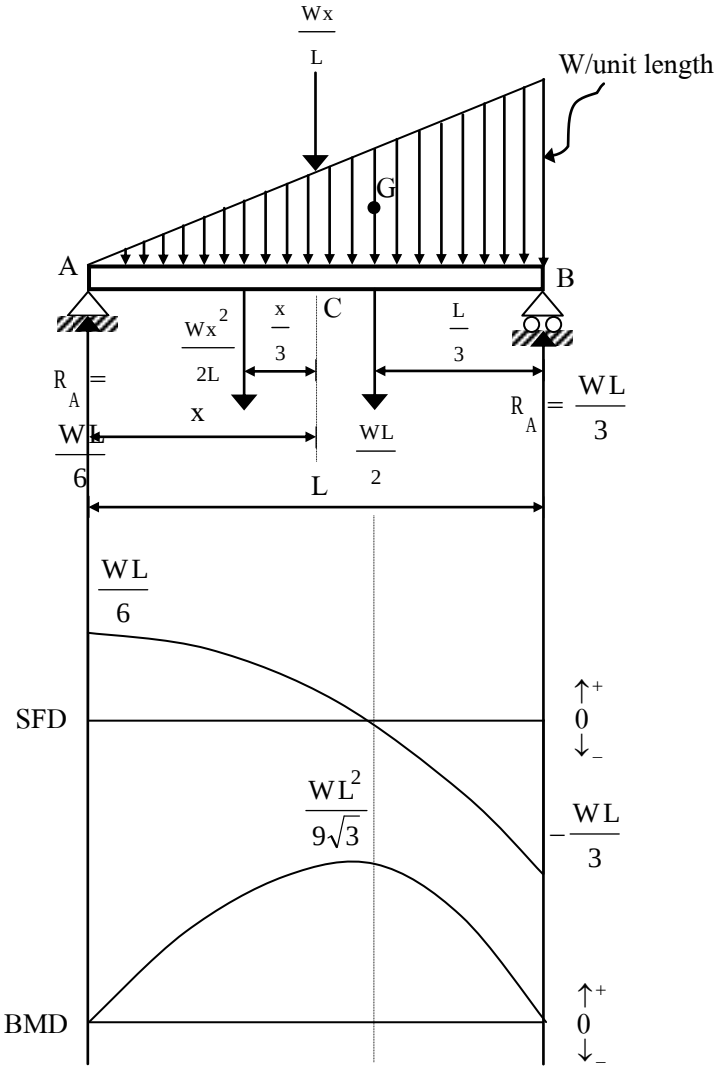
$$x = \sqrt{\frac{L}{3}}$$

$$= \frac{WL}{6} \cdot \sqrt{\frac{L}{3}} - \frac{W}{6L} \cdot \frac{L^3}{3\sqrt{3}}$$

โมเมนต์สูงสุด $\therefore$ $Mmax = \frac{WL^2}{9\sqrt{3}}$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ $\frac{WL}{6}$ ($\uparrow^+$) , R_B เท่ากับ $\frac{WL}{3}$ **ตอบ**

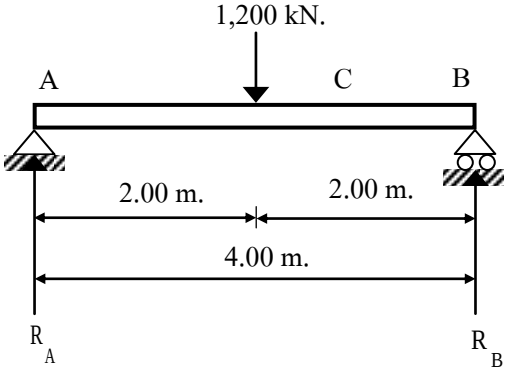
และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ $\frac{WL^2}{9\sqrt{3}}$



ภาพที่ 3.38 คานอยู่ภายใต้แรงกระจายที่เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:185)

ตัวอย่างที่ 3.9 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุด โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.39



ภาพที่ 3.39 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:65)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4 - 1{,}200 \times 2.00 = 0$$

$$R_A \times 4 - 2{,}400 = 0$$

$$R_A \times 4 = 2.400$$

$$= \frac{2{,}400}{4}$$

$$\therefore \quad R_A = 600 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4 + 1{,}200 \times 2.00 = 0$$

$$-R_B \times 4 + 2{,}400 = 0$$

$$2{,}400 = R_B \times 4$$

$$\frac{2{,}400}{4} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 600 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 600 kN.

$$600 + R_B - 1{,}200 = 0$$

$$R_B - 600 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 600 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

จุด A	SFA_L	=	0	=	0
	SFA_R	=	+600	=	+600 kN.
จุด C	SFC_L	=	+600	=	+600 kN.
	SFC_R	=	+600 – 600	=	– 600 kN.
จุด B	SFB_L	=	+600 – 600	=	– 600 kN.
	SFB_R	=	+600 –1,200 + 600	=	0

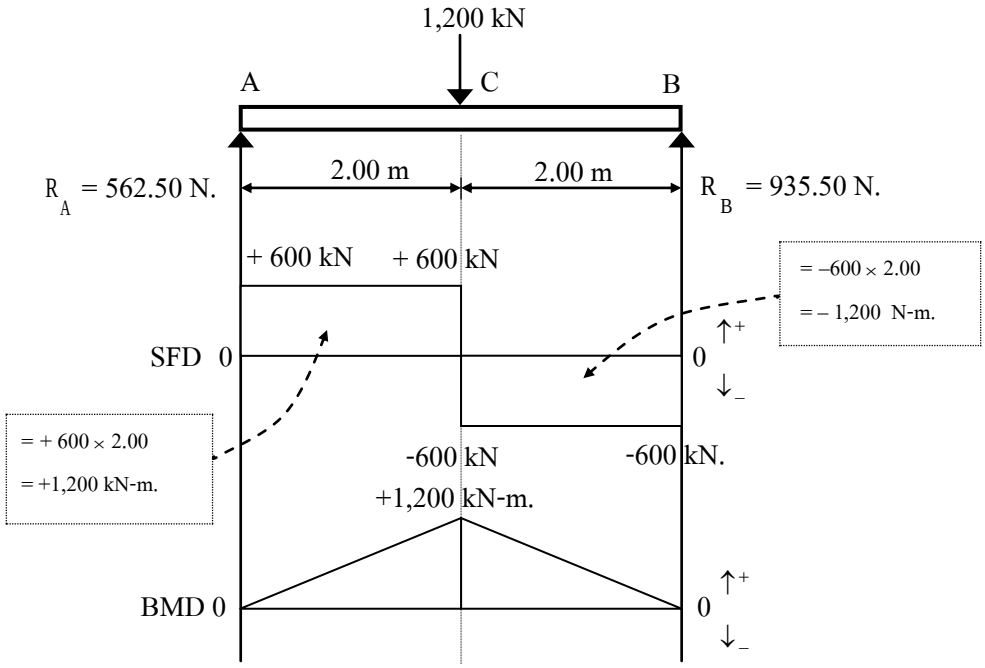
การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$ $^{+}(\circlearrowleft)^{-}$

จุด A BMA = $+600 \times 0$ = 0

จุด C BMC = $+600 \times 2.00$ = +1,200 kN-m.

จุด B BMB = $+600 \times 2.00 - 1,200 \times 2.00$ = 0

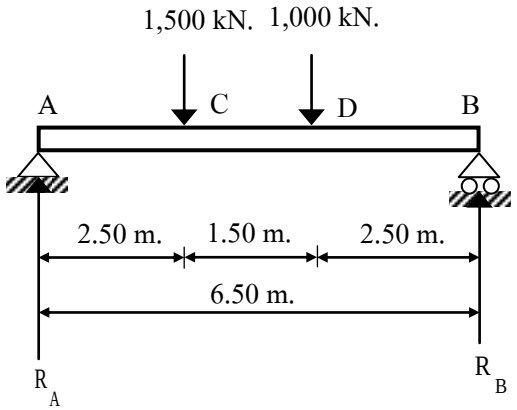
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 600 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 600 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.40 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.10 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน โดยไม่คิดน้ำหนักของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.41



ภาพที่ 3.41 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:129)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.50 - 1,500 \times 4.00 - 1,000 \times 2.50 = 0$$

$$R_A \times 6.50 - 8,500 = 0$$

$$R_A \times 6.50 = 8,500$$

$$R_A = \frac{8,500}{6.50}$$

$$\therefore \quad R_A = 1307.69 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 6.50 + 1,500 \times 2.50 + 1,000 \times 4.00 = 0$$

$$-R_B \times 6.50 + 7,750 = 0$$

$$7,750 = R_B \times 6.50$$

$$\frac{7,750}{6.50} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 1,192.30 \text{ kN} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1,500 - 1,000 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,307.69 kN.

$$1,307.69 + R_B - 1,500 - 1,000 = 0$$

$$R_B - 1,192.30 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1,192.30 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

จุด A $SFA_L = 0 = 0$

$SFA_R = +1,307.69 = +1,307.69$ kN.

จุด C $SFC_L = +1,307.69 = +1,307.69$ kN.

$SFC_R = +1,307.69 - 1,500 = -192.30$ kN.

จุด D $SFD_L = +1,307.69 - 1,500 = -192.30$ kN.

$SFD_R = +1,307.69 - 1,500 - 1,000 = -1,192.30$ kN.

จุด B SFB_L = +1,307.69 – 1,500 – 1,000 = –1,192.30 kN.

SFB_R = +1,307.69 – 1,500 – 1,000 +1,192.30 = 0

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$ $^{+}(\ )^{-}$

จุด A BMA = +1,307.69 ×0 = 0

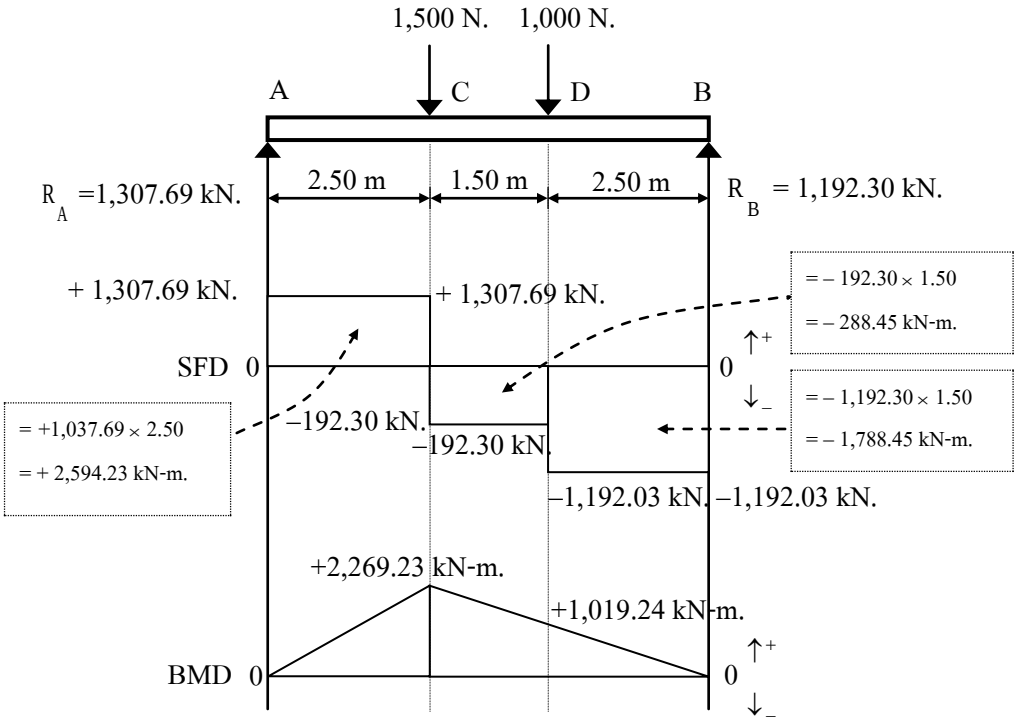
จุด C BMC = +1,307.69 ×2.50 = +3,269.23 N-m.

จุด D BMD = +1,307.69 ×2.50 – 1,500×1.50 = +1,019.24 N-m.

จุด B BMB = +1,307.69 ×6.50 – 1,500×4.00 = 0

– 1,000×2.50

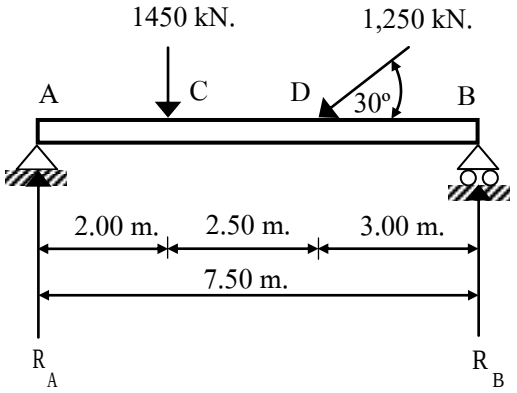
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 1,307.69 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 3,269.23 N-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.42 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

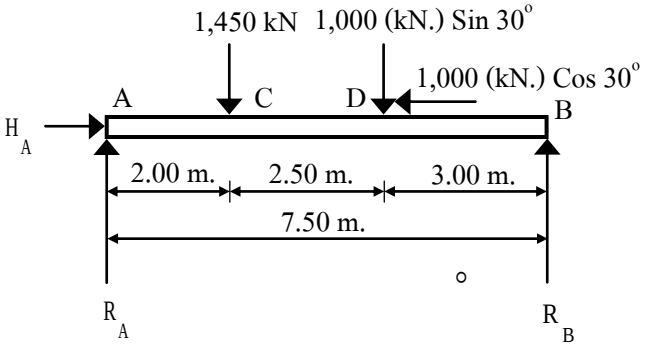
ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.11 จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ของคานโดยไม่คิดน้ำหนักของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.43 และ 3.44



ภาพที่ 3.43 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)



ภาพที่ 3.44 การเขียน Free Body Diagram

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 7.50 - 1450 \times 5.50 - 1{,}000 \sin 30° \times 3.00 = 0$$

$$R_A \times 7.50 - 7{,}975 - 1{,}500 = 0$$

$$R_A \times 7.50 - 9{,}475 = 0$$

$$R_A = \frac{9{,}475.}{7.50}$$

$$\therefore \quad R_A = 1{,}263.33 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 7.50 + 1{,}450 \times 2.00 + 1{,}000 \sin 30° \times 4.50 = 0$$

$$-R_B \times 7.50 + 2{,}900 + 2{,}250 = 0$$

$$-R_B \times 7.50 + 5{,}150 = 0$$

$$5{,}150 = R_B \times 7.50$$

$$\frac{5{,}150}{7.50} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 686.67 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0 \overset{+}{\rightarrow}$

$$+ H_A - 1{,}000 \cos 30^{\circ} = 0$$

$$+ H_A - 866.03 = 0$$

$$\therefore \quad H_A = 866.03 \text{ kN. } (\overset{+}{\rightarrow})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + RB - 1{,}450 - 500 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,263.33 kN.

$$1{,}263.33 + R_B - 1{,}450 - 500 = 0$$

$$R_B - 686.67 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 686.67 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

จุด A $SFA_L = 0$

$SFA_R = +1{,}263.33 = +1{,}263.33$ kN.

จุด C $SFC_L = +1{,}263.33 = +1{,}263.33$ kN.

$SFC_R = +1{,}263.33 - 1{,}450 = +186.67$ kN.

จุด D $SFD_L = +1{,}263.33 - 1{,}450 = +186.67$ kN.

$SFD_R = +1{,}263.33 - 1{,}450 - 500 = -686.67$ kN.

จุด B $SFB_L = +1{,}263.33 - 1{,}450 - 500 = -686.67$ kN.

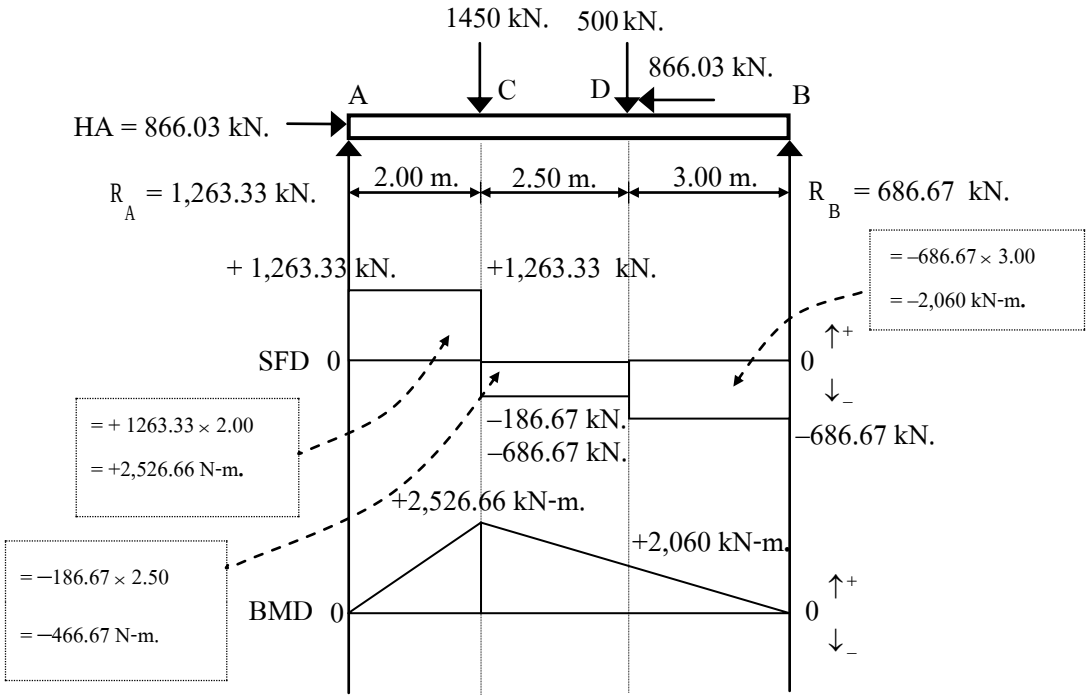
$SFB_R = +1{,}263.33 - 1{,}450 - 500 + 686.67 = 0$

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

จุด A	BMA	=	+1,263.33 × 0		=	0
จุด C	BMC	=	+1,263.33 × 2.00		=	+2,526.66 kN-m.
จุด D	BMD	=	+1,263.33 × 4.50 –1,450 × 2.50		=	+2,060 kN-m.
จุด B	BMB	=	+1,263.33 × 4.50 – 1,450 × 5.50		=	0
			– 500 × 3.00			

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 1,263.33 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 2,526.66 kN-m. **ตอบ**

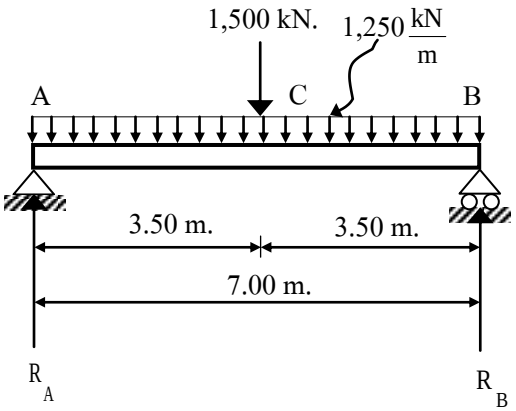
และ H_A = 866.03 kN.



ภาพที่ 3.45 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.12 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงเฉือนและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.46



ภาพที่ 3.46 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้ (2553:130)

วิธีทำ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$R_A \times 7.00 - 1{,}500 \times 3.50 - 1{,}250 \times 7.00 \times \frac{7.00}{2} = 0$$

$$R_A \times 7.00 - 5{,}250 - 30{,}625 = 0$$

$$R_A \times 7.00 - 35{,}875 = 0$$

$$R_A \times 7.00 = 35{,}875$$

$$R_A = \frac{35{,}875}{7.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 5{,}125 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$-R_B \times 7.00 + 1{,}500 \times 3.50 + 1{,}250 \times 7.00 \times \frac{7.00}{2} = 0$$

$$-R_B \times 7.00 + 5{,}250 + 30{,}625 = 0$$

$$-R_B \times 7.00 + 35{,}875 = 0$$

$$-R_B \times 7.00 = -35{,}875$$

$$R_B = \frac{35{,}875}{7.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 5{,}125 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}500 - 1{,}250 \times 7.00 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 5,125 kN.

$$5{,}125 + R_B - 1{,}500 - 1{,}250 \times 7.00 = 0$$

$$R_B - 5{,}125 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 5{,}125 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

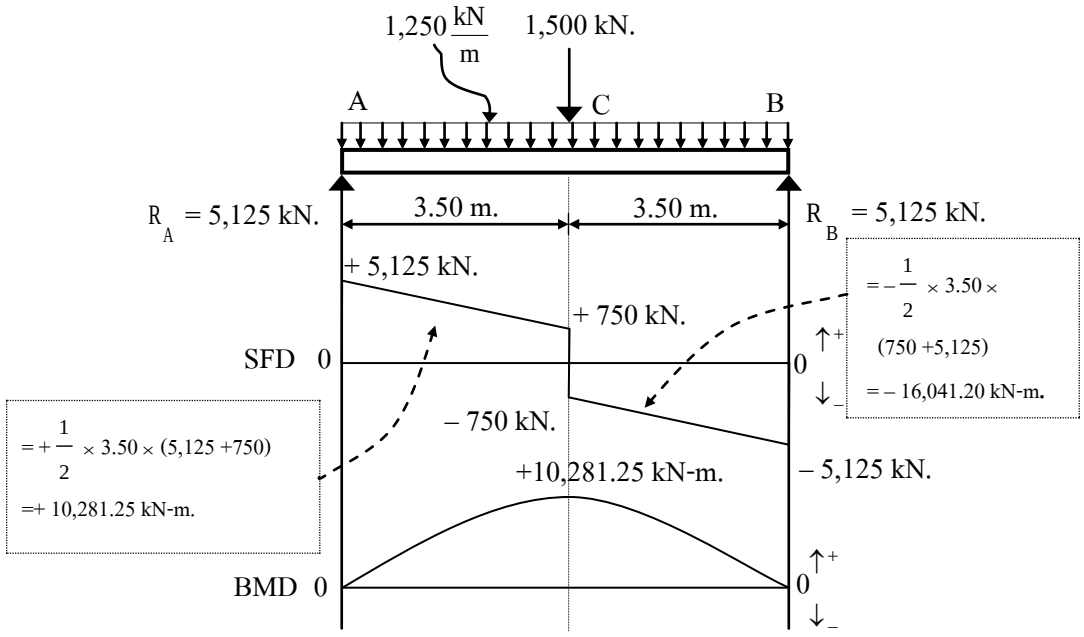
การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

จุด A	SFA_L	= 0	=	0
	SFA_R	= +5,125	=	+ 5,125 kN.
จุด C	SFC_L	= $+5{,}125 - 1{,}250 \times 3.50$	=	+ 750 kN.
	SFC_R	= $+5{,}125 - 1{,}250 \times 3.50 - 1{,}500$	=	– 750 k N.
จุด B	SFB_L	= $+5{,}125 - 1{,}250 \times 7.00 - 1{,}500$	=	– 5,125 kN.
	SFB_R	= $+5{,}125 - 1{,}250 \times 7.00 - 1{,}500 + 5{,}125$	=	0

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0 \ {}^{+}\circlearrowright{}^{-}$

จุด A	BMA	= $+5{,}125 \times 0$	=	0
จุด C	BMC	= $+5{,}125 \times 3.50 - 1{,}250 \times 3.50 \times \frac{3.50}{2}$	=	+10,281.25 kN-m.
จุด B	BMB	= $+5{,}125 \times 7.00 - 1{,}250 \times 7.00 \times \frac{7.00}{2}$ $- 1{,}500 \times 3.50$	=	0

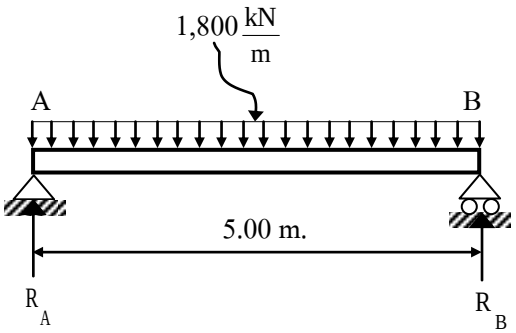
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 7,012.29 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 10,281.25 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.47 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.13 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงเฉือนและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.48



ภาพที่ 3.48 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : R.C. Hibbeler. (1994:111)

วิธีทำ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1{,}800 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 22,500 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 22,500$$

$$R_A = \frac{22,500}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 4,500 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^+\circlearrowleft^-$

$$-R_B \times 5.00 + 1,800 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 22,500 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 = -22,500$$

$$R_B = \frac{22,500}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4,500 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 1,800 \times 5.00 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 4,500 kN.

$$4,500 + R_B - 1,800 \times 5.00 = 0$$

$$R_B - 4,500 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 4,500 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

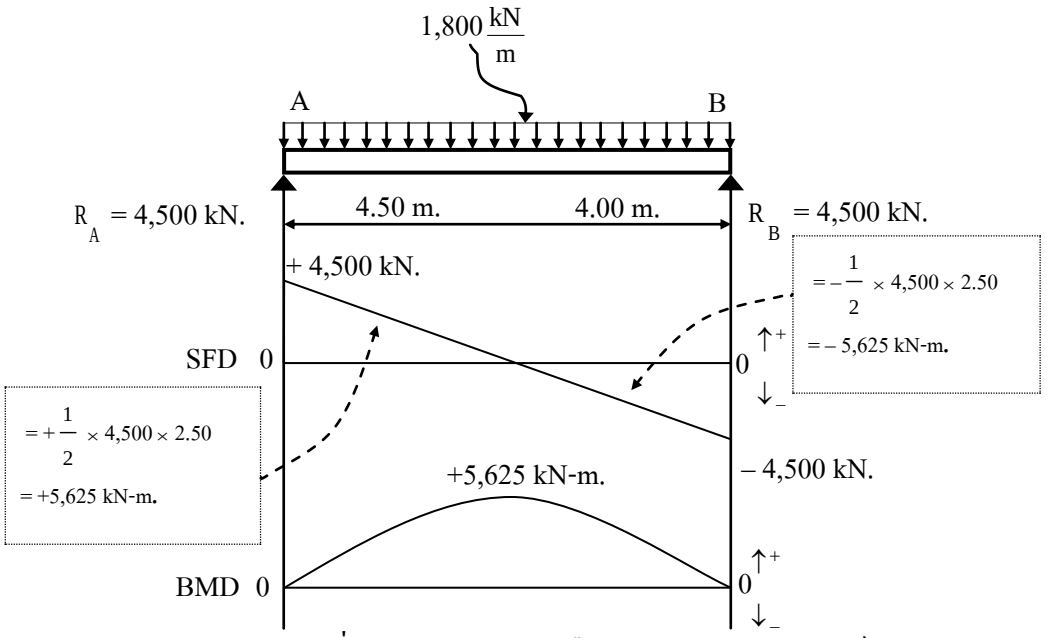
การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

จุด A	SFA_L	= 0	=	0
	SFA_R	= +4,500	=	+ 6,937.71 N.
จุด B	SFB_L	= +4,500 – 1,800 × 5.00	=	– 7,010.29 N.
	SFB_R	= +4,500 – 1,800 × 5.00 +4,500	=	0

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$ $^+\circlearrowleft^-$

จุด A	BMA	= +4,500 × 0	=	0
จุด C	BMmac	= $+4,500 \times 2.50 - 1,800 \times 2.50 \times \frac{2.50}{2}$	=	+5,625 kN-m.
จุด B	BMB	= $+4,500 \times 5.00 - 1,800 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2}$	=	0

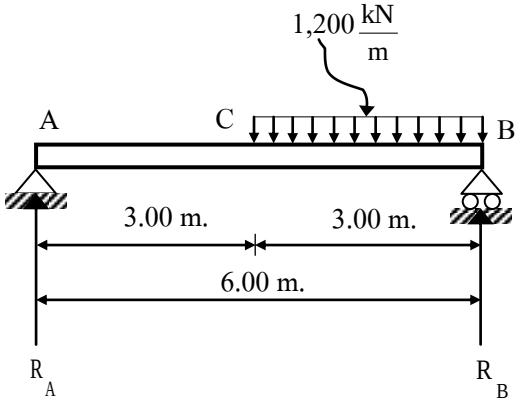
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 4,500 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 5,625 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.49 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.14 คานอยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาแรงเฉือนและโมเมนต์ สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.50



ภาพที่ 3.50 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : R.C. Hibbeler. (1994:114)

วิธีทำ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1{,}200 \times 3.00 \times \frac{3.00}{2} = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 5{,}400 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 5{,}400 = 0$$

$$R_A \times 6.00 = 5{,}400$$

$$R_A = \frac{5{,}400}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 900 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^+\circlearrowright^-$

$$-R_B \times 6.00 + 1{,}200 \times 3.00 \times \left[\frac{3.00}{2.00} + 3.00\right] = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 16{,}200 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -16{,}200$$

$$R_B = \frac{16{,}200}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}700 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 1{,}200 \times 3.00 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 900 kN.

$$900 + R_B - 1{,}200 \times 3.00 = 0$$

$$R_B - 2{,}700 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}700 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

จุด A	$SFA_L = 0$		$= 0$
	$SFA_R = +900$		$= +900$ kN.
จุด C	$SFC_L = +900$		$= +900$ kN.
	$SFC_R = +900$		$= +900$ kN.
จุด B	$SFB_L = +900 - 1{,}200 \times 3.00$		$= -2{,}700$ kN.
	$SFB_R = +900 - 1{,}200 \times 3.00 + 2{,}700$		$= 0$

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$ $^+\circlearrowright^-$

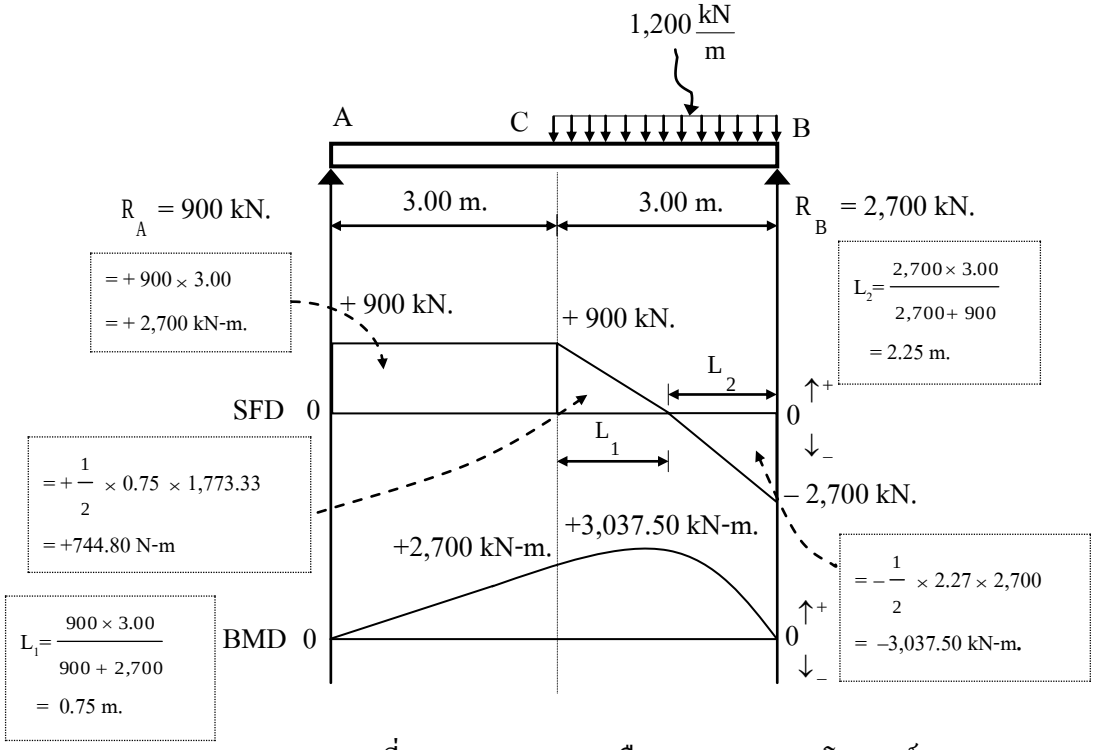
จุด A BMA = $+900 \times 0$ = 0

จุด C BMC = $+900 \times 3.00$ = +2,700 N-m.

จุด B BMB = $+900 \times 6.00 - 1{,}200 \times 3.00 \times \frac{3.00}{2}$ = 0

จุด Mmax = $+900 \times 3.75 - 1{,}200 \times 0.75 \times \frac{0.75}{2}$ = +3,037.50 kN-m.

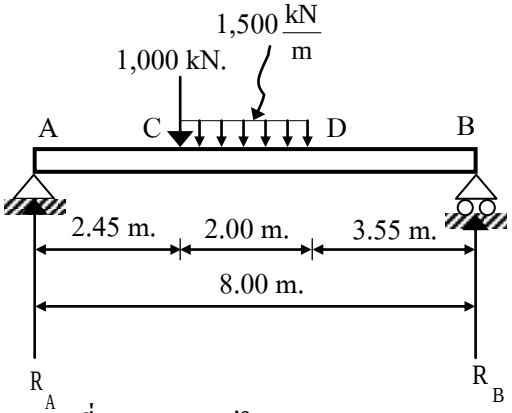
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 2,700 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 3,037.50 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.51 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.15 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.52



ภาพที่ 3.52 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$+R_A \times 8.00 - 1{,}000 \times 5.55 - 1{,}500 \times 2.00 \times \left[\frac{2.00}{2} + 3.55\right] = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 5{,}550 - 13{,}650 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 19{,}200 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = 19{,}200$$

$$R_A = \frac{19{,}200}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 2{,}400 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 1{,}000 \times 2.45 + 1{,}500 \times 2.00 \times \left[\frac{2.00}{2} + 2.45\right] = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 2{,}450 + 10{,}750 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 12.800 = 0$$

$$\frac{12{,}800}{8.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}600 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}000 - 1{,}500 \times 2.00 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 2,400 kN.

$$+2{,}400 + R_B - 1{,}000 - 1{,}500 \times 2.00 = 0$$

$$+2{,}400 + R_B - 4{,}000 =$$

$$R_B - 1{,}600 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}600 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

จุด A $SFA_L = 0$

$SFA_R = +2{,}400 = +2{,}400$ kN.

จุด C $SFC_L = +2{,}400 = +2{,}400$ kN.

$SFC_R = +2{,}400 = +2{,}400$ kN.

จุด D $SFD_L = ++2{,}400 - 1000 = -1{,}400$ kN.

$SFD_R = +2{,}400 - 1000 - 1{,}500 \times 2.00 = -1{,}600$ kN.

จุด B $SFB_L = +2{,}400 - 1000 - 1{,}500 \times 2.00 = -1600$ kN.

$SFB_R = +2{,}400 - 1000 - 1{,}500 \times 2.00 + 1{,}600 = 0$

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0 \ {}^{+}\circlearrowleft{}^{-}$

จุด A $BMA = +2{,}400 \times 0 = 0$

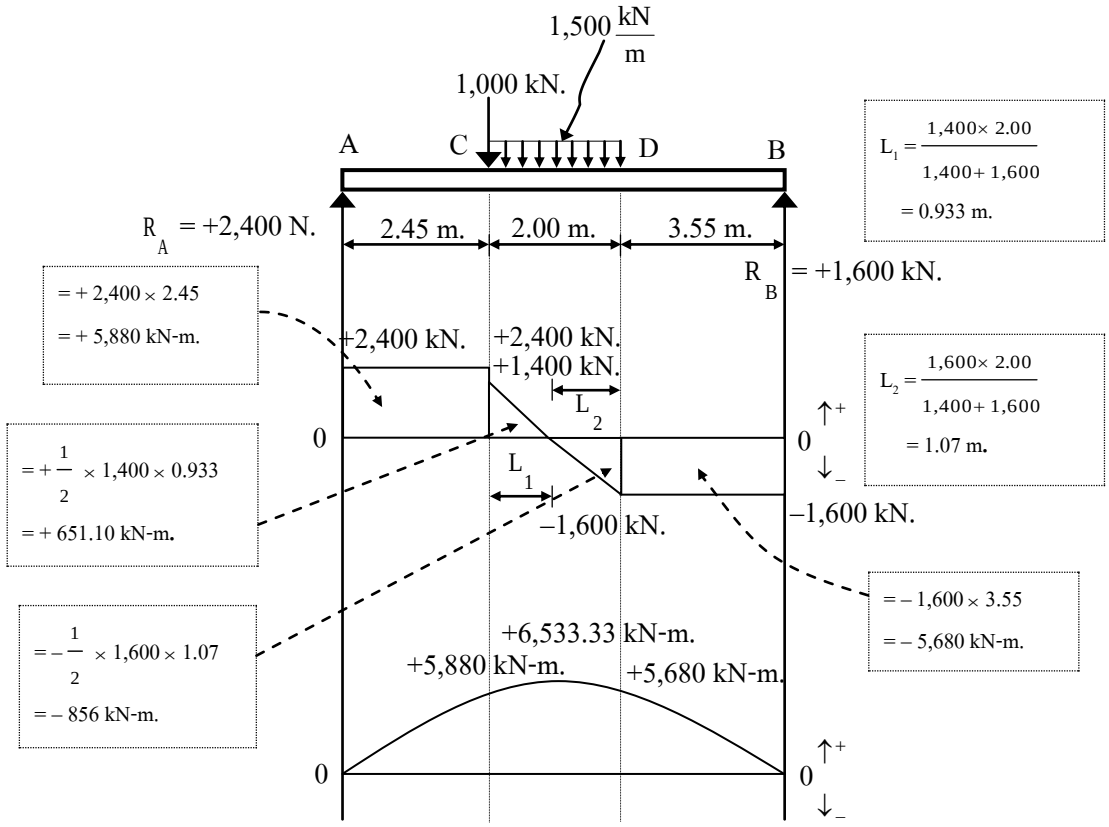
จุด C $BMC = +2{,}400 \times 2.45 = +5{,}880$ kN-m.

จุด D $BMD = +2{,}400 \times 4.45 - 1{,}000 \times 2.00 - 1{,}500 \times 2.00 \times \frac{2.00}{2} = +5{,}680$ kN-m.

จุด B $BMB = +2{,}400 \times 8.00 - 1{,}000 \times 5.55 - 1{,}500 \times 2.00 \times \left[\frac{2.00}{2} + 3.55\right] = 0$

$Mmax = +2{,}400 \times 3.383 - 1{,}000 \times 0.933 - 1{,}500 \times 0.933 \times \frac{0.933}{2} = 6{,}533.33$ kN-m.

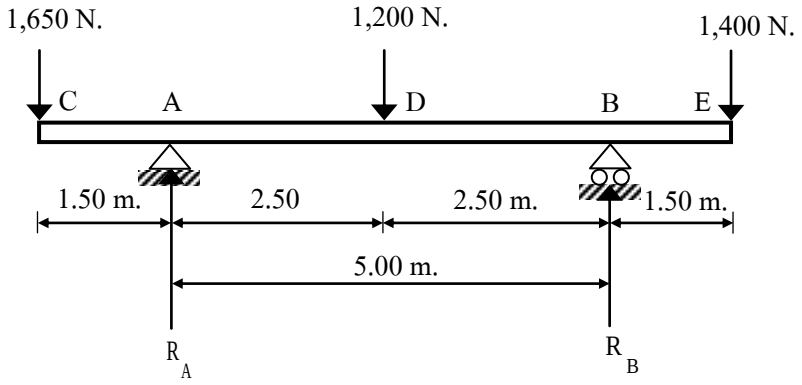
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 2,400 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 6,533.33 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.53 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.16 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.54



ภาพที่ 3.54 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : วทัชภพ เดชพันธ์ (2545:126)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}(\circlearrowleft)^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1,650 \times 6.50 - 1,200 \times 2.50 = 0$$

$$+1,400 \times 1.50$$

$$R_A \times 5.00 - 10,720 - 3,000 + 2,100 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 11,625 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - = 11,625$$

$$R_A = \frac{11,625}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 2,325 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}(\circlearrowleft)^{-}$

$$- R_B \times 5.00 - 1,650 \times 1.50 + 1,200 \times 2.50 = 0$$

$$+1,400 \times 6.50$$

$$-R_B \times 5.00 - 2,475 + 3,000 + 9,100 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 9,625 = 0$$

$$\frac{9,625}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 1,925 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + RB - 1,650 - 1,200 - 1,400 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 2,325 kN.

$$+2,325 + R_B - 1,650 - 1,200 - 1,400 = 0$$

$$R_B - 1,925 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1,925 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

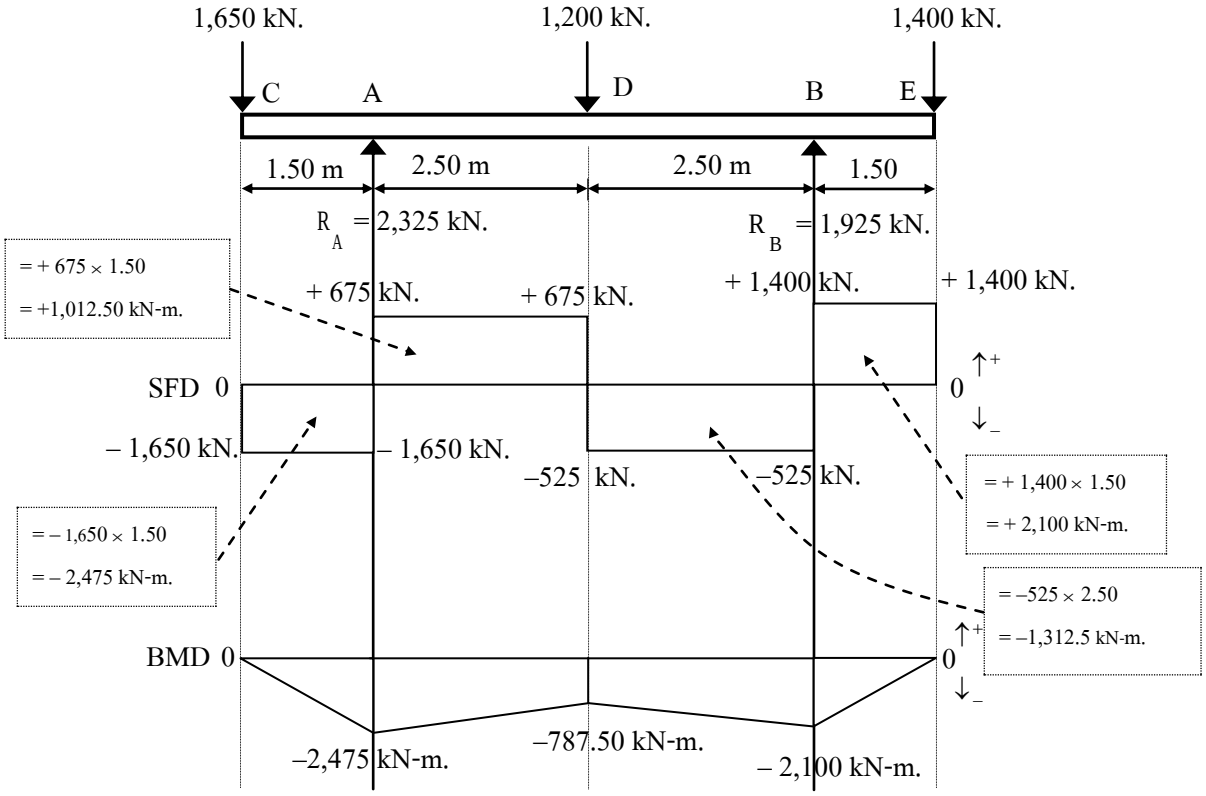
จุด C	SFC_L	=	0	=	0
	SFC_R	=	– 1,650	=	– 1,650 kN.
จุด A	SFA_L	=	– 1,650	=	– 1,650 kN.

	SFA_R	=	$-1,650+2,325$	=	$+675$	kN.
จุด D	SFD_L	=	$-1,650+2,325$	=	$+675$	kN.
	SFD_R	=	$-1,650+2,325-1,200$	=	-525	kN.
จุด B	SFB_L	=	$-1,650+2,325-1,200$	=	-525	kN.
	SFB_R	=	$-1,650+2,325-1,200+1,925$	=	$+1,400$	kN.
จุด E	SFE_L	=	$-1,650+2,325-1,200+1,925$	=	$+1,400$	k N.
	SFE_R	=	$-1,650+2,325-1,200+1,925-1,400$	=	0	

การหาโมเมนต์ $\Sigma M=0$ $^{+}(\circlearrowleft)^{-}$

จุด C	BMC	=	$-1,650\times 0$	=	0	
จุด A	BMA	=	$-1,650\times 1.50$	=	$-2,475$	kN-m.
จุด D	BMD	=	$-1,650\times 4.00+2,325\times 2.50$	=	-787.50	kN-m.
จุด B	BMB	=	$-1,650\times 6.50+2,325\times 5.00-1,200\times 2.50$	=	$-2,100$	kN-m.
จุด E	BME	=	$-1,650\times 8.00+2,325\times 6.50-1,200\times 4.00$	=	0	
			$+1,925\times 1.50$			

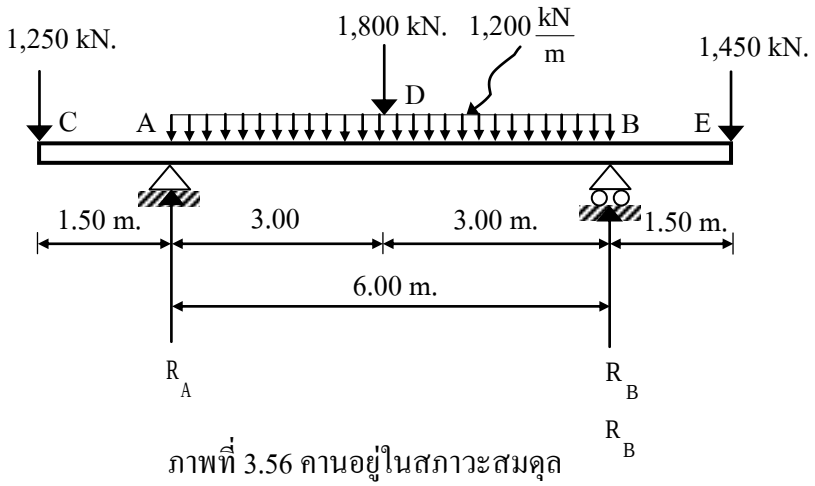
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 1,650 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 2,475 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.55 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.17 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.56



ภาพที่ 3.56 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545:127)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1,800 \times 3.00 - 1,250 \times 7.50 = 0$$

$$- 1,200 \times 6.00 \times \frac{6,00}{2.00} + 1,450 \times 1.50$$

$$R_A \times 6.00 - 5,400 - 9,375 - 21,600 + 2,175 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 34,200 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - = 34,200$$

$$R_A = \frac{34,200}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 5,700 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$- R_B \times 6.00 + 1,800 \times 3.00 + 1,200 \times 6.00 \times \frac{6,00}{2.00} = 0$$

$$+ 1,450 \times 7.50 - 1,250 \times 1.50$$

$$- R_B \times 6.00 + 5,400 + 21,600 + 10,875 - 1,875 = 0$$

$$- R_B \times 6.00 + 36,00 = 0$$

$$\frac{36,000}{6.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 6,000 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_B - 1,250 - 1,800 - 1,450 + 1,200 \times 6.00 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 5,700 kN.

$$5,700 + R_B - 1,250 - 1,800 - 1,450 + 1,200 \times 6.0 = 0$$

$$R_B - 6,000 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 6,000 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

จุด C	SFC_L	=	0	= 0
	SFC_R	=	$-1,250$	= $-1,250$ kN.
จุด A	SFA_L	=	$-1,250$	= $-1,250$ kN.
	SFA_R	=	$-1,250 + 5,700$	= $-4,450$ kN.
จุด D	SFD_L	=	$-1,250 + 5,700 - 1,200 \times 3.00$	= +850 kN.
	SFD_R	=	$-1,250 + 5,700 - 1,800 - 1,200 \times 3.00$	= –950 kN.
จุด B	SFB_L	=	$-1,250 + 5,700 - 1,800 - 1,200 \times 6.00$	= –4,550 kN.
	SFB_R	=	$-1,250 + 5,700 - 1,800 - 1,200 \times 6.00 + 6,000$	= +1,450 kN.
จุด E	SFE_L	=	$-1,250 + 5,700 - 1,800 - 1,200 \times 6.00 + 6,000$	= +1,400 k N.
	SFE_R	=	$-1,250 + 5,700 - 1,800 - 1,200 \times 6.00 + 6,000 - 1,450$	= 0

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$

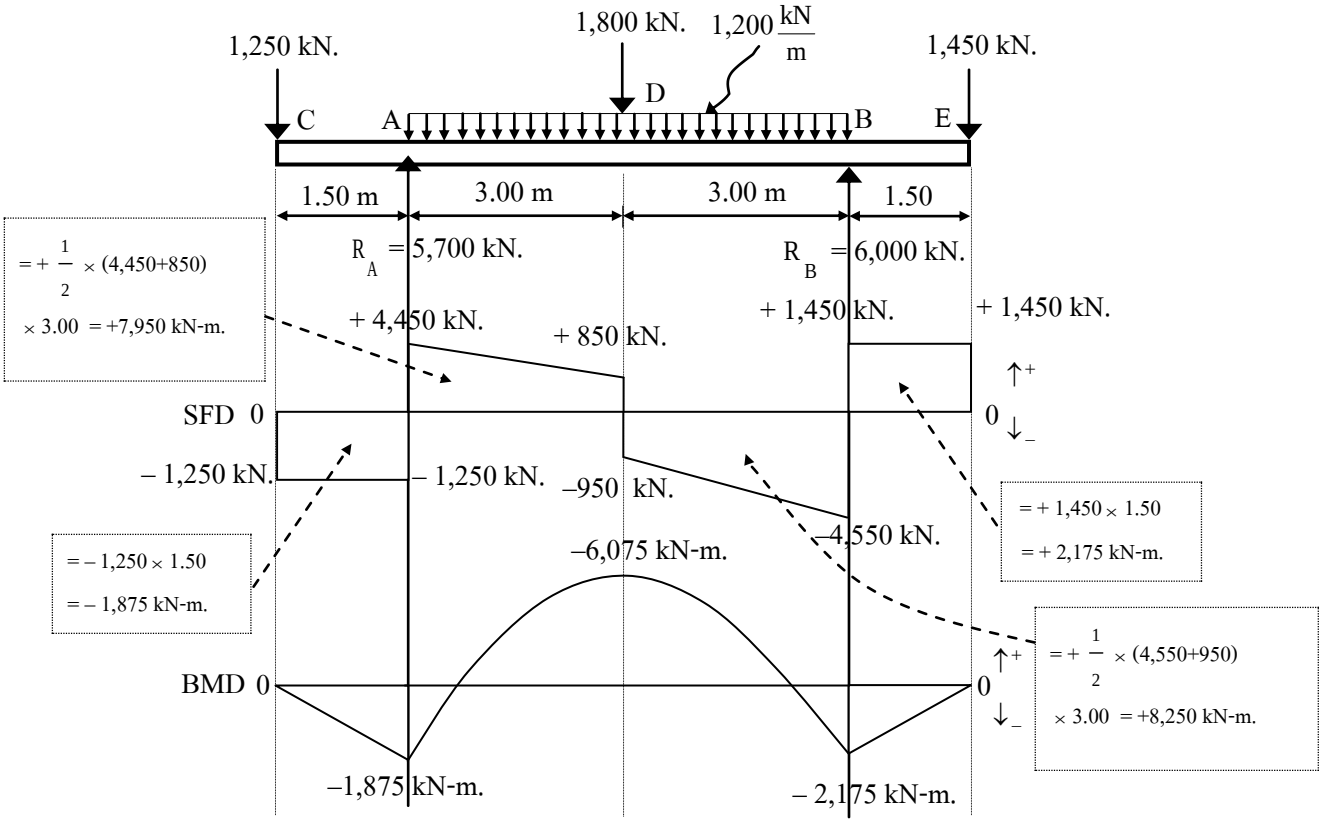
จุด C	BMC	=	$-1,250 \times 0$	= 0
จุด A	BMA	=	$-1,250 \times 1.50$	= $-1,875$ kN-m.
จุด D	BMD	=	$-1,250 \times 4.50 + 5,700 \times 3.00 - 1,200 \times 3.00 \times \frac{3.00}{2}$	= + 6,075 kN-m.
จุด B	BMB	=	$-1,250 \times 7.50 + 5,700 \times 6.00 - 1,200 \times 6.00 \times \frac{6.00}{2} - 1,800 \times 3.00$	= $-2,185$ kN-m.

จุด E BME = $-1{,}250 \times 9.00 + 5{,}700 \times 7.50 = 0$

$$-1{,}200 \times 6.00 \times \left(\frac{6.00}{2} + 1.5\right)$$

$$-1{,}800 \times 4.50 + 6000 \times 1.50$$

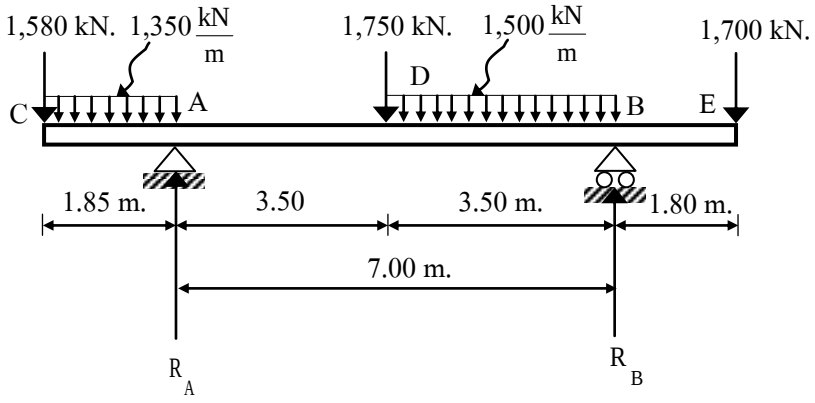
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 4,550 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 6,075 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.57 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.18 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.58



ภาพที่ 3.58 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545:126-127)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}(\circlearrowright)^{-}$

$$R_A \times 7.00 - 1,580 \times 8.85 - 1,750 \times 3.50 + 1,700 \times 1.80 = 0$$

$$-1,350 \times 1.85 \times (\frac{1.85}{2} + 7.00) - 1,500 \times 3.50 \times \frac{3.50}{2}$$

$$R_A \times 7.00 - 13,983 - 6,125 + 3,060 - 19,792 - 9,188 = 0$$

$$R_A \times 7.00 - 46,028 = 0$$

$$R_A \times 7.00 - = 46,028$$

$$R_A = \frac{46,028}{7.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 6,575 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}(\circlearrowright)^{-}$

$$-R_B \times 7.00 - 1,580 \times 1.85 + 1,750 \times 3.50 + 1,700 \times 8.80 = 0$$

$$-1,350 \times 1.85 \times (\frac{1.85}{2}) + 1,500 \times 3.50 \times (\frac{3.50}{2} + 3.50)$$

$$-R_B \times 7.00 - 2,923 + 6,125 + 14,960 - 2,310.20 + 27,563 = 0$$

$$-R_B \times 7.00 + 43,414.80 = 0$$

$$\frac{43,414.80}{7.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 6,202 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_B - 1{,}580 - 1{,}750 - 1{,}700 - 1{,}350 \times 1.85 - 1{,}500 \times 3.50 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 6,575 kN.

$$6{,}575.50 + R_B - 1{,}580 - 1{,}750 - 1{,}700 - 1{,}350 \times 1.85 - 1{,}500 \times 3.50 = 0$$

$$R_B - 6{,}202 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 6{,}202 \text{ kN.} \ (\uparrow^+)$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

จุด C	SFC_L	=	0	=	0
	SFC_R	=	$-1{,}580$	=	$-1{,}580$ kN.
จุด A	SFA_L	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85$	=	$-4{,}078$ kN.
	SFA_R	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575$	=	$+2498$ kN.
จุด D	SFD_L	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575$	=	+2498 kN.
	SFD_R	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575 - 1{,}750$	=	–748 kN.
จุด B	SFB_L	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575 - 1{,}750 - 1{,}500 \times 3.50$	=	–4,502.50 kN.
	SFB_R	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575 - 1{,}750 - 1{,}500 \times 3.50 + 6{,}202$	=	+1,700 kN.
จุด E	SFE_L	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575 - 1{,}750 - 1{,}500 \times 3.50 + 6{,}202$	=	+1,700 k N.
	SFE_R	=	$-1{,}580 - 1{,}350 \times 1.85 + 6{,}575 - 1{,}750 - 1{,}500 \times 3.50 + 6{,}202 - 1{,}700$	=	0

การหาโมเมนต์ $\Sigma M = 0$

จุด C	BMC	=	$-1{,}580 \times 0$	=	0
จุด A	BMA	=	$-1{,}580 \times 1.85 - 1{,}350 \times 1.85 \times \frac{1.85}{2}$	=	–5,234 kN-m.
จุด D	BMD	=	$-1{,}580 \times 5.35 + 6{,}575 \times 3.50 - 1{,}350 \times 1.85 \times (\frac{1.85}{2} + 3.50)$	=	+3,509 kN-m.

จุด B BMB = $-1{,}580\times 8.85 - 1{,}350\times 1.85\times(\frac{1.85}{2}+7.00)$ = –3,060 kN-m.

$-1{,}750\times 3.50 - 1{,}500\times 3.50\times(\frac{3.50}{2})$

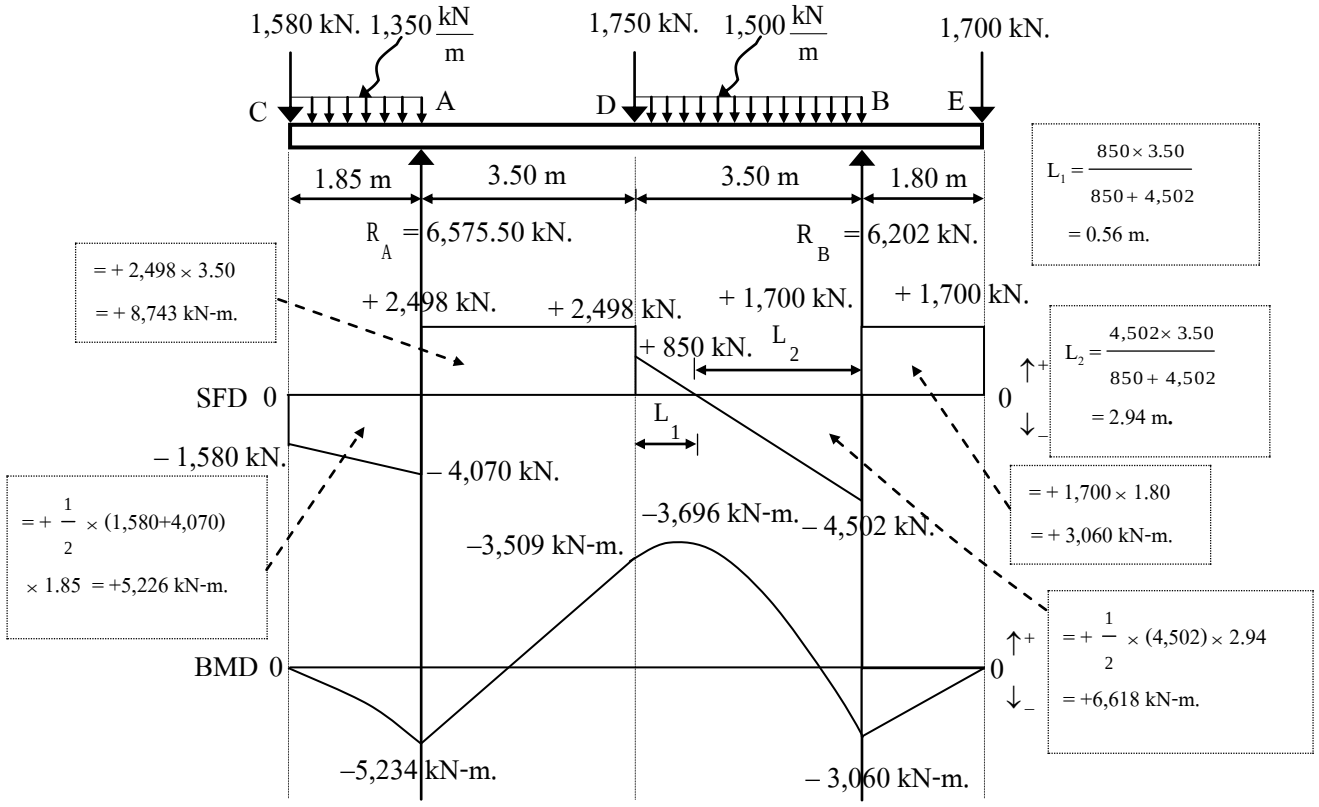
$+6{,}575\times 7.00$

จุด E BME = $-1{,}580\times 10.65 - 1{,}350\times 1.85\times(\frac{1.85}{2}+8.80)$ = 0

$-1{,}750\times 5.30 - 1{,}500\times 3.50\times(\frac{3.50}{2}+1.80)$

$+6{,}202\times 1.80$

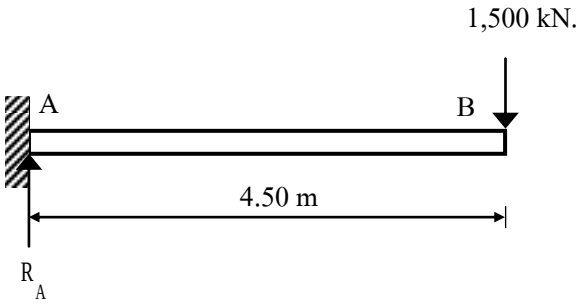
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 6575 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 5,234 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.59 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.19 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคานยื่น เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.60



ภาพที่ 3.60 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2528:301)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$$R_A - 1{,}500 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}500 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

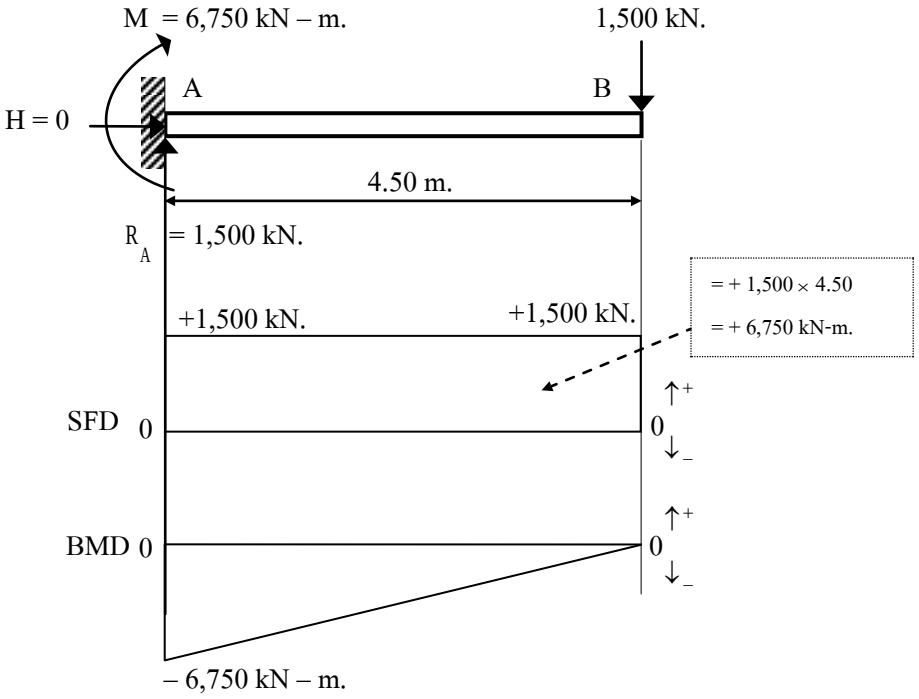
จุด A	SFA_L	$= 0$	$= 0$	
	SFA_R	$= +1{,}500$	$= +1{,}500$	kN.
จุด B	SFB_L	$= -1{,}500$	$= -1{,}500$	kN.
	SFB_R	$= -1{,}500 + 1{,}500$	$= 0$	

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A

การหาโมเมนต์ $\Sigma M_A = 0 \quad {}^{+}\circlearrowleft{}^{-}$

จุด A	BMA	$= -1{,}500 \times 4.50$	$= -6{,}750$	kN-m.
จุด B	BMB	$= -1{,}500 \times 0$	$= 0$	

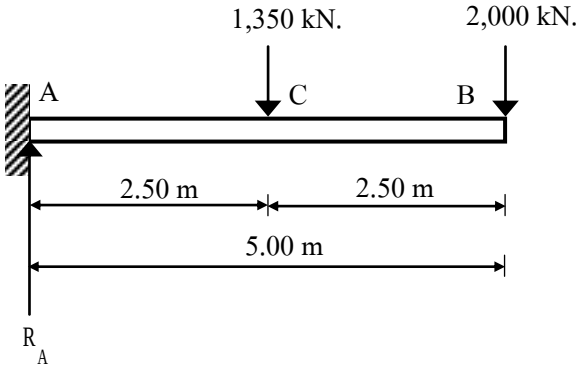
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 1,500 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ – 6,750 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.61 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.20 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคานยื่น เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.62



ภาพที่ 3.62 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : วินิจ ช่อวิเชียร (2528:144)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$$R_A - 2{,}000 - 1{,}350 = 0$$

$$R_A - 3{,}350 = 0$$

$\therefore \quad R_A = +3{,}350 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

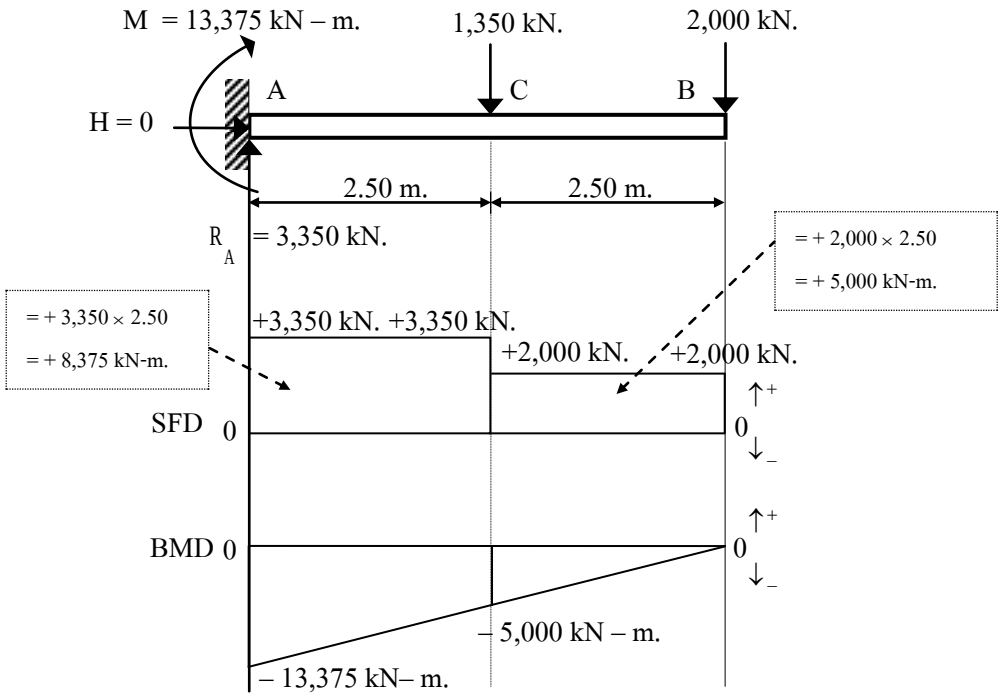
จุด A	SFA_L	= 0	= 0	
	SFA_R	= + 3,350	= +3,350	kN.
จุด C	SFC_L	= + 3,350	= –3,350	kN.
	SFC_R	= + 3,350 –1,350	= +2,000	kN.
จุด B	SFB_L	= + 3,350– 3,350	= –2,000	kN.
	SFB_R	= + 3,350+ 3,350–2,000	= 0	

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A

การหาโมเมนต์ $\Sigma M_A = 0 \quad {}^+\circlearrowright{}^-$

จุด A	BMA	= $-2{,}000 \times 5.00 - 1{,}350 \times 5.00$	= 13,375	kN-m.
จุด C	BMC	= $-2{,}000 \times 2.50$	= 5,000	kN-m.
จุด B	BMB	= $-2{,}000 \times 0$	= 0	

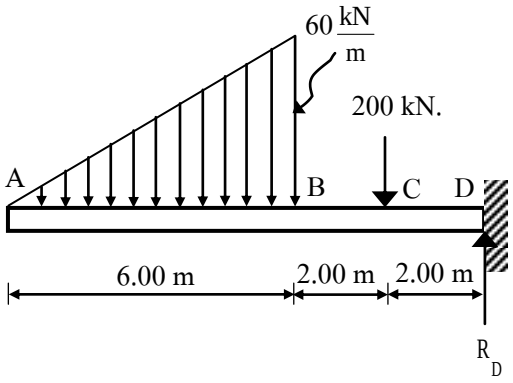
ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ 3,350 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ – 13,375 kN-m. **ตอบ**



ภาพที่ 3.63 แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์

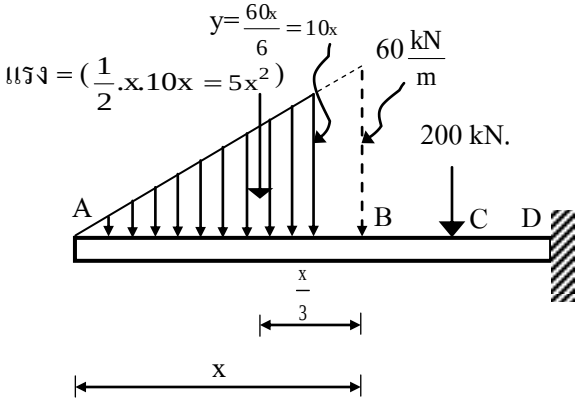
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 3.21 จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคานยื่นอยู่ภายใต้แรง เมื่อคานอยู่ในลักษณะที่สมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.64

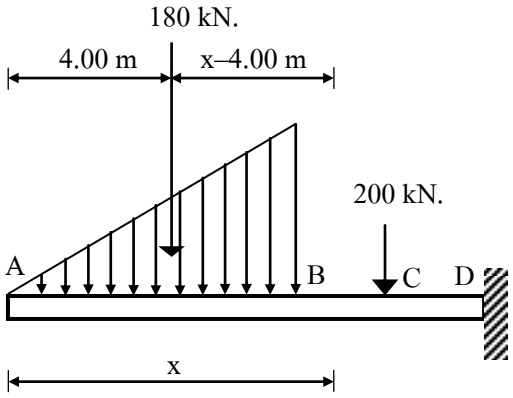


ภาพที่ 3.64 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

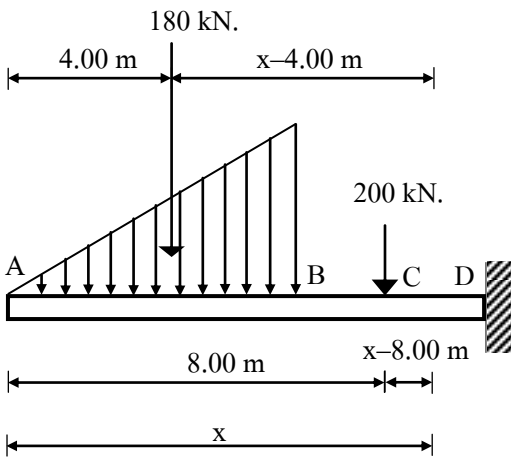
ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:366)



(ก)



(ข)



(ค)

ภาพที่ 3.65 คานอยู่ภายใต้แรงรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:366)

วิธีทำ

คานช่วง AB คิดรูปตัด (Section) ระยะ x จาก A แรง ดังนี้

$$y = \frac{60}{6}x = 10x$$

ดังนั้น แรงทั้งหมด = พื้นที่สามเหลี่ยม

$$= \frac{1}{2}.x.10x = 5x^2$$

กระทำที่จุดเซ็นทรอย (Control) คือระยะ $\frac{x}{2}$ จากรูปตัด (Section) ตามรูปภาพ 3.21 (ข)

$$V_x = -5x^2$$

และ $M_x = -5x^2(\frac{x}{3})$

$$= \frac{5x^3}{3}$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^+ \downarrow_-$

ดังนั้น SF เป็นเส้นโค้งมีค่าตั้งแต่ 0 ที่จุด A ถึง $-5\times6^2 = -180$ kN. ที่จุด B

และ BM เป็นเส้นโค้งมีค่าตั้งแต่ 0 ที่จุด A ถึง $-\frac{5\times6^3}{3} = -360$ kN-m. ที่จุด B

BM เป็นเส้นโค้งมีค่าจาก – 360 ที่จุด B ถึงจุด C ซึ่งมีระยะ x = 8 m. ดังนี้

$(-180\times8.00)+720 = -180$ kN-m. ที่จุด C

ช่วง CD จากรูปภาพ 3.21 (ง)

V_x = –180 – 200 = – 380 kN.

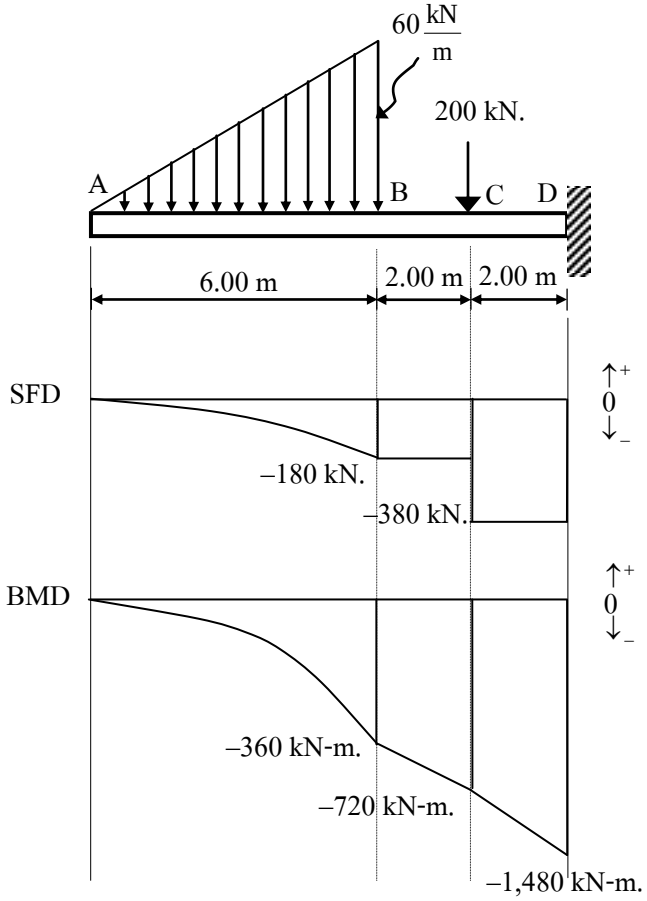
M_x = –180 (x – 4) –(x – 8) = +180x+2,320

ดังนั้น SF มีค่าคงที่ตลอดช่วงCD = – 380 kN.

BM เป็นเส้นโค้งมีค่าจาก = – 720 kN-m. ที่จุด C จนถึงจุด D

ซึ่งมีรยะ x = 10 m. คือ (–380 × 10.00)+2,320 = – 380 kN-m. ที่จุด D

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ – 380 kN. และโมเมนต์สูงสุดเท่ากับ – 1,480 kN-m. **ตอบ**



(ง)

ภาพที่ 3.66 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2528:156)

บทสรุป

1.หลักทั่วไปของแรงปฏิกิริยา เนื่องมาจากแรงกระทำต่อโครงสร้างต่างๆ เช่น คาน เราใช้กฎของสถิตศาสตร์ รายละเอียด ดังนี้

$\Sigma H = 0$

$\Sigma V = 0$

$\Sigma M = 0$

2. โมเมนต์ดัด (Bending Moment) โมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากแรงภายนอก

2.1 ขนาดและทิศทางของแรงต้านภายใน คำนวณได้โดยอาศัยสมการของการสมดุล

$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma F_M = 0$

ส่วนแรงต้านภายใน ใช้ความหมาย มีรายละเอียด ดังนี้

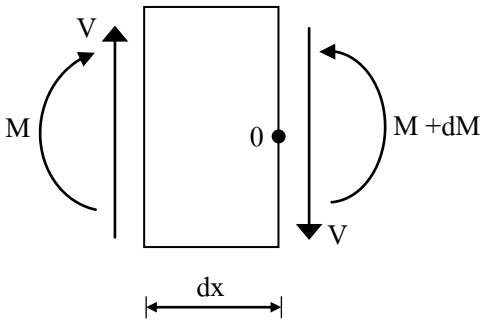
แรง F เรียกว่า แรงต้านทานตามแนวแกน (Axial Resisting Force)

แรง S เรียกว่า แรงต้านทานต่อการเฉือน (Shear Resisting Force)

แรง M เรียกว่า โมเมนต์ต้านทานต่อการดัด (Moment Resisting Moment)

3. ความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนัก (W) แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ (M) ในคานตรง

กรณีที่ 1 พิจารณาชิ้นส่วนเล็กๆ (Element) ของคานที่มีความยาว dx กระทำตลอดความของคาน dx ดังแสดงในภาพที่ 3.67



ภาพที่ 3.67 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2517:167)

ด้านซ้ายมือของชิ้นส่วนขนาดเล็ก (Element) จะมีแรงเฉือน V (Shear Force) และโมเมนต์ M (Bending Moment) ที่ด้านขวามือเนื่องจากไม่มีน้ำหนัก (Load) กระทำในช่วง dx (Shear Force) ก็ยังมีค่าเท่าเดิมคือ V แต่ โมเมนต์ M (Bending Moment) จะมีค่าเปลี่ยนไปเนื่องจากระยะเปลี่ยน ให้มีค่าเป็น M+dM ชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) นี้สมดุล สามารถหาโมเมนต์ (Take Moment รอบจุด O จะได้

$(M+dM) - M - Vdx = 0$

แรงปฏิกิริยา $\frac{dM}{dx} = V$.....(3.1)

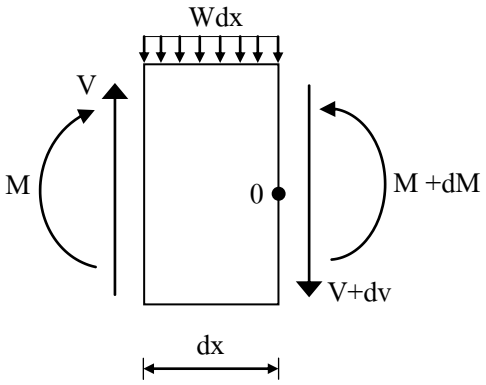
นั้นคือ อัตราการเปลี่ยนของโมเมนต์ (Bending Moment) เทียบกับ x จะเท่ากับแรงเฉือน (Shear Force)

$$\int_{x1}^{x2} dM = \int_{x1}^{x2} V dx$$

$$M_2 - M_1 = \int_{x1}^{x2} V dx$$

ดังนั้นคือ ค่าของโมเมนต์ (Bending Moment) ที่เปลี่ยนเป็นระยะ x_1 ถึง x_2 เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ (Graph) ของแรงเฉือน (Shear Force) ในช่วงเดียวกันนั้น

กรณีที่ 2 ถ้ามีน้ำหนักแผ่สม่ำเสมอ W (Uniform Distribution Load) ในช่วง dx ด้านซ้ายมือของชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) มีแรงเฉือน V (Shearing Force) และโมเมนต์ M (Bending Moment) ด้านขวามือของ ชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) มีแรงเฉือน (Shearing Force) V+Dv และโมเมนต์ M (Bending Moment) M+dM ชิ้นส่วนเล็ก ๆ (Element) นี้สมดุล สามารถหาโมเมนต์ (Take Moment รอบจุด O จะได้ ดังแสดงในภาพที่ 3.68



ภาพที่ 3.68 ชิ้นส่วนของคานขนาดเล็ก

ที่มา : ชนะ กสิภาร์ (2517:167)

$$(M+dM) - M - Vdx + wdx\left(\frac{dx}{2}\right) = 0$$

ตัดทิ้ง $W\frac{dx^2}{2}$ เพราะน้อยมาก

$$\text{ดังนั้น } \frac{dM}{dx} = V \text{ เหมือนกันกับ (3.1)}$$

$$\text{ถ้าคิดผลรวมของแรง} = 0$$

$$\text{นั้นคือ } V-(V+dV)-Wdv = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = -W \text{ .....(3.2)}$$

ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนของ (Shearing Force) เทียบกับ x จะเท่ากับ Intensity of Loading แต่เครื่องหมายตรงกันข้าม

ค่าของโมเมนต์ (Bending Moment) ที่เปลี่ยนเป็นระยะ x_1 ถึง x_2 เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ (Graph) ของแรงเฉือน ในช่วงเดียวกันนั้น ดังนี้

$$\therefore \int_{x1}^{x2} dV = -\int_{x1}^{x2} Wdx$$

$$V_2 - V_1 = \int_{x1}^{x2} Wdx$$

$$V_2 - V_1 = \int_{x1}^{x2} Wdx$$

จากสมการที่ (3.1) และ (3.2) จะได้

$$\therefore \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dV}{dx} = -W \text{ .....(3.4)}$$

4. ขั้นตอนการสร้าง แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดในคาน

4.1 คำนวณแรงปฏิกิริยาจากสมการของสภาพสมดุล

4.2 คำนวณแรงเฉือนที่กระทำต่อส่วนตัดของคานแต่ละช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ

4.3 เขียนแผนภาพแรงเฉือน โดยพิจารณาความลาดชันที่จุดหนึ่งๆ

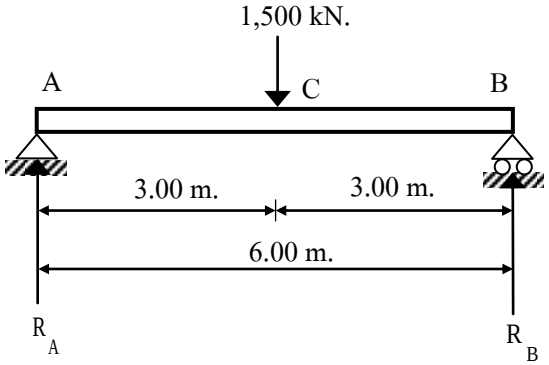
4.4 หาตำแหน่งที่แรงเฉือนเป็นศูนย์

4.5 คำนวณโมเมนต์ที่กระทำต่อส่วนตัดของคานแต่ละช่วงและจะต้องคำนวณค่าของโมเมนต์ดัดที่จุดซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของแรงกระทำ และจุดซึ่งแรงเฉือนเป็นศูนย์

4.6 เขียนแผนภาพโมเมนต์ให้ผ่านจุดกระทำของโมเมนต์ดัดที่คำนวณไว้ในขั้นตอนที่ 5 โดยพิจารณาความลาดชันที่จุดหนึ่งๆ

แบบฝึกหัด

1. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.69 (SFD=750 kN. และ BMD= 2,250 kN-m.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 3.69 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : R.C. Hibbeler (1994:111)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

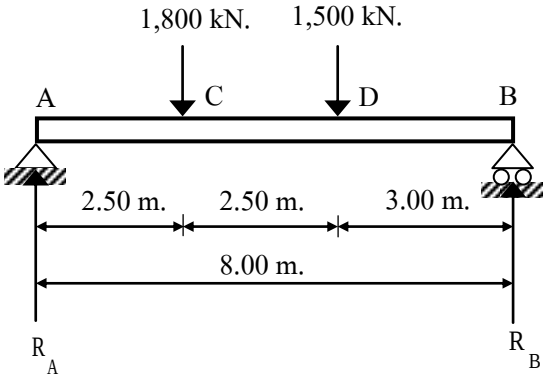
……

……

……

……

2. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.70
(SFD=1,800 kN. และ BMD=4,500 kN-m.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน (30 นาที)

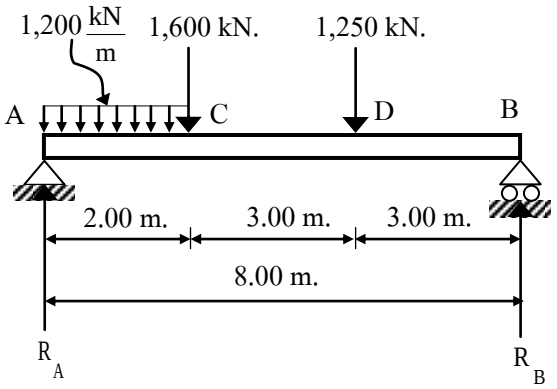


ภาพที่ 3.70 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550:130-131)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

3. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.71

(SFD =3,769 kN. และ BMD =5,138 kN-m.)



ภาพที่ 3.71 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

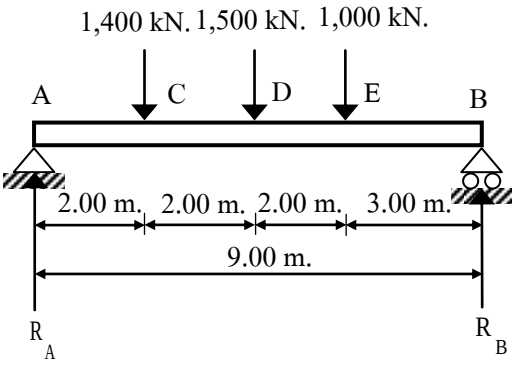
……

……

……

……

4. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน และลักษณะคานอยู่ในสภาพสมดุลดังแสดงในภาพที่ 3.72 (SFD=2,256 kN. และ BMD= 6,224 kN-m.)



ภาพที่ 3.72 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : R.C. Hibbeler (1994:249)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

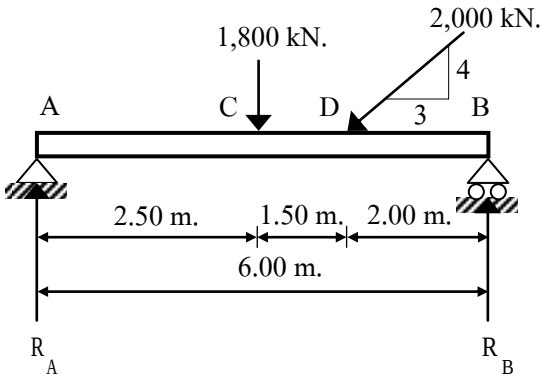
……

……

……

……

5. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.73
(SFD=1,800 kN. ,BMD = 4,800 kN-m.และ H_A =1,200 kN.)

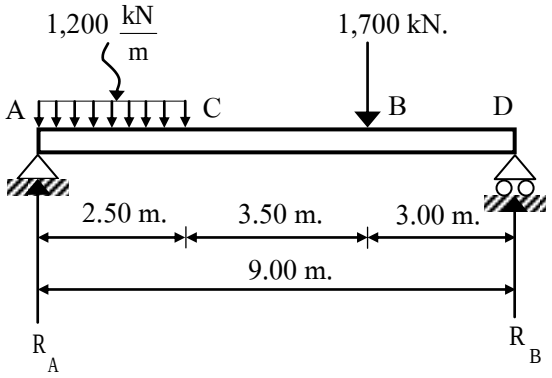


ภาพที่ 3.73 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

6. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.74

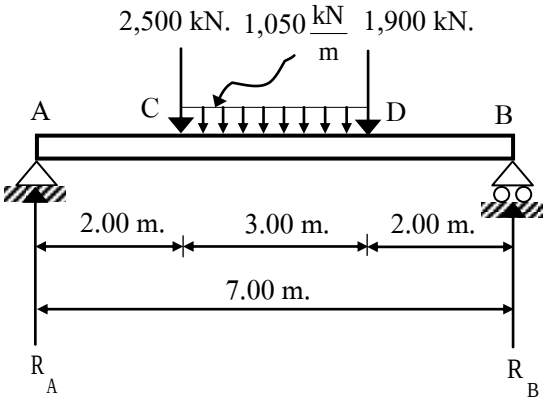
(SFD=3,150 kN. และ BMD = 4,650 kN-m.)



ภาพที่ 3.74 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

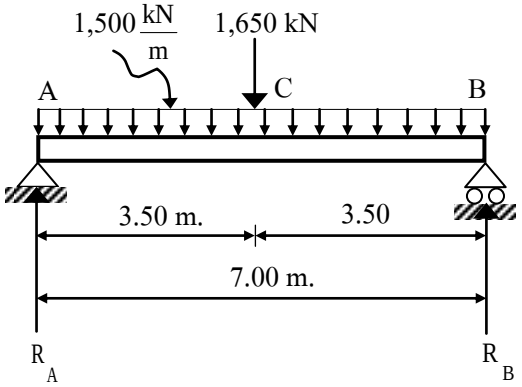
7. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.75
(SFD=3,904 kN. และ BMD= 8,747 kN-m.)



ภาพที่ 3.75 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

8. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ของคาน และลักษณะคานอยู่ในสภาพสมดุล ดังแสดงในภาพที่ 3.76 (SFD=6,075 kN. และ BMD=12,075 kN-m.)



ภาพที่ 3.76 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

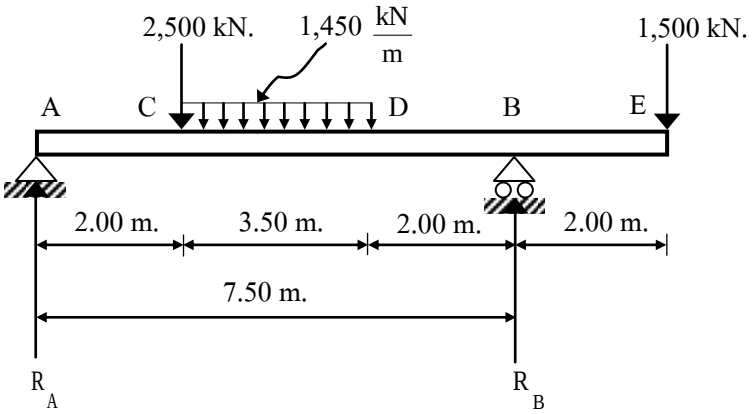
……

……

……

……

9. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.77
(SFD=3,971 kN. และ BMD= 8,688 kN-m.)

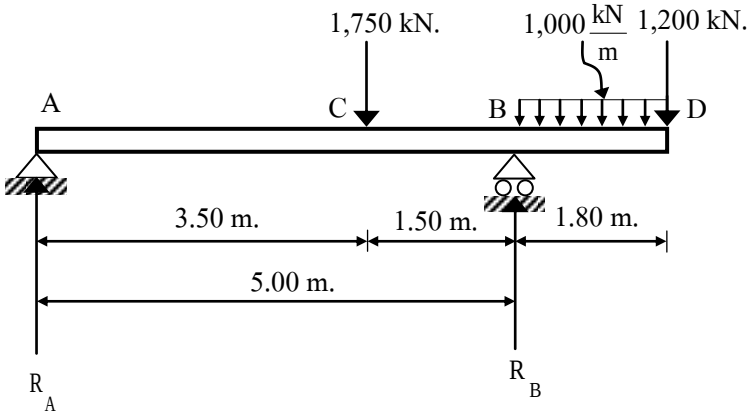


ภาพที่ 3.77 คานอยู่ในลักษณะสมดุล
ที่มา : วทัชภพ เดชพันธ์ (2545:264)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

10. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.78

(SFD=3,000 kN. และ BMD= 3,781 kN-m.)



ภาพที่ 3.78 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545:267)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

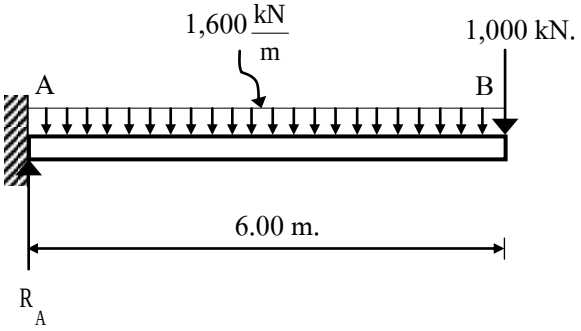
……

……

……

……

11. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 3.79
(SFD=10,160 kN. และ BMD=30,000 kN-m.)



ภาพที่ 3.79 คานอยู่ในสภาวะสมดุล
ที่มา : สุธรรม สุริยมงคล (2528:73)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1 แรงปฏิกิริยาหมายถึงแรงที่ทำให้เกิดความสมดุลระหว่างแรงกับที่รองรับ

..... 2. การสมดุลของแรงที่กระทำต่อแรงต้านและแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างทั่วไป แบ่งเป็น 2 ชนิด ได้แก่ โครงสร้างอย่าง่ายและโครงสร้างอย่างยาก

..... 3. แรงกระทำ หมายถึง หนักของโครงสร้างเองหรือน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง ได้แก่ น้ำหนักบรรทุกจร เช่น น้ำหนักสิ่งของต่างๆ ที่สามารถเคลื่อนที่ได้

..... 4. แรงกระทำให้เกิดความสมดุลระหว่างแรงกระทำกับแรงต้านทาน

..... 5. แรงกระทำต่อโครงสร้างต่างๆ เช่น คน เราใช้กฎของสถิตย์ศาสตร์เป็นหลักทั่วไปของแรงปฏิกิริยา

..... 6. แรงตามแนวแกน หมายถึง แรงลัพธ์ตามแนวแกนที่เกิดจากแรงภายนอก

..... 7. โมเมนต์ดัด (Bending Moment) เป็นโมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากแรงภายนอก

..... 8. เป็นแรงลัพธ์ในแนวตั้งฉากกับแนวที่เกิดจากแรงภายนอก

..... 9. แบบยึดจุดต่อหมุน (Hing Support) ที่รองรับไม่สามารถรับโมเมนต์ดัดที่จุดหมุนได้ชนิดหมุนและการเคลื่อนที่ แบบนี้รับแรงได้ทางราบได้อย่างเดียว

..... 10. แบบยึดแน่น (Fixed Support) เป็นจุดรองรับชนิดนี้จะยึดแน่นอยู่กับที่จะไม่สามารถเคลื่อนที่ได้

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 4 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้องมากที่สุด คือข้อใด
   ก. คานที่มีปลายทั้งสองข้างยึดรั้งสามารถหมุนได้
   ข. แรงภายในและแรงภายนอกที่กระทำให้คานถูกเฉือนขาดในแนวขนาน
   ค. โมเมนต์ดัดเกิดจากแรงเฉือนที่กระทำกับคานทำให้เกิดการหนีศูนย์ของโครงสร้าง
   ง. น้ำหนักบรรทุกจรเป็นน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้างเคลื่อนที่ได้
2. ความหมายของคานยื่น (Cantilever Beam) คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือสองข้างยื่นออกจากคานและสามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระ
   ข. เป็นคานที่มีปลายทั้งสองข้างยึดรั้งไม่สามารถหมุนได้อย่างอิสระ
   ค เป็นคานที่มีปลายอีกด้านหนึ่งหรือสองข้างยื่นและถูกยึดแน่นฝังในตัวรองรับอย่างถาวร
   ง. ข้อ ก และข้อ ข ถูกต้อง
3. ความหมายของแรงกระทำ (Active Force) คือข้อใด
   ก. น้ำหนักของโครงสร้างเอง
   ข. น้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง
   ค. น้ำหนักกระทำกับแรงที่รองรับ
   ง. ข้อ ก และข้อ ข ถูกต้อง
4. ความหมายของแรงต้านตรงที่รองรับ (Support Force) คือข้อใด
   ก. แรงปฏิกิริยา
   ข. แรงดึงหรือแรงอัดบริเวณตรงที่รองรับ
   ค. แรงลัพธ์ที่ทำให้เกิดความสมดุลระหว่างแรงกระทำกับแรงที่รองรับ
   ง. แรงต้านที่ทำให้เกิดความไม่สมดุล
5. ความหมายของแรงลัพธ์ คือข้อใด
   ก. แรงตามแนวแกนที่เกิดจากแรงภายนอก
   ข. เป็นแรงในแนวขนานกับแนวที่เกิดจากแรงภายนอก
   ค. เป็นโมเมนต์ดัดที่เกิดจากแรงภายใน
   ง. เป็นแรงลัพธ์ในแนวขนานกับแนวที่เกิดจากแรงภายใน

6. มีลักษณะการยึดแบบหมุนไม่มีการเคลื่อนที่และมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้น 2 ทาง คือข้อใด
   ก. แบบยึดจุดต่อหมุน
   ข. แบบหมุนและเคลื่อนที่ทางเดียว
   ค. แบบยึดแน่น
   ง. แบบบานพับ
7. ความหมายของคานอย่างง่าย (Simple Beam) คือข้อใด
   ก. คานชนิดนี้จะมีปลายข้างใดข้างหนึ่งหรือทั้งสองข้างยื่นออกไปจากจุดรองรับ
   ข. คานชนิดนี้รองรับด้วยจุดหมุนหรือสลักเกลียวที่ยึดตำแหน่งของปลายคานข้างใดข้างหนึ่ง
   ค. คานชนิดนี้รองรับด้วยลูกกลิ้งหรือสลักเกลียวที่ยึดตำแหน่งที่ปลายคานทั้งสองข้าง
   ง. ข้อ ก และข้อ ข ถูกต้อง
8. ความหมายของคานต่อเนื่อง (Continuous Beam) คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่มีจุดรองรับตั้งแต่ 3 จุดขึ้นไป
   ข. เป็นคานที่มีจุดรองรับตั้งแต่ 2 จุดขึ้นไป
   ค. เป็นคานดีเทอมิเนท (Determinate)
   ง. เป็นคานอย่างง่ายสามารถวิเคราะห์ด้วยสมการสมดุล
9. ความหมายของโครงสร้างโดยทั่วไปแบ่งออกเป็นกี่ประเภท คือข้อใด
   ก. โครงสร้างแบบง่ายและโครงสร้างแบบยึดรั้ง
   ข. โครงสร้างแบบง่ายและโครงสร้างแบบยึดหมุน
   ค. โครงสร้างแบบยากและโครงสร้างแบบหมุนสามารถเคลื่อนที่ได้ทางตรง
   ง. โครงสร้างแบบง่ายและโครงสร้างแบบยาก
10. ความหมายของแรงเฉือน (Shear Force) คือข้อใด
   ก. เป็นแรงที่พยายามทำให้โครงสร้างเกิดการโก่งตัว
   ข. เป็นหน่วยแรง (Stress Unit) หรือความเครียดในโครงสร้าง ทำให้โครงสร้างเฉือนขาดออกจากกันในแนวดิ่ง
   ค. แรงภายนอกที่กระทำกับคานทำให้เกิดการโค้งและเกิดการเฉือนขาดออกจากกัน
   ง. แรงภายในและแรงภายนอกที่กระทำให้คานถูกเฉือนให้ขาดในแนวดิ่ง

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

ชนะ กสิภาร์. (2528). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชวนพิมพ์ จำกัด.

ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ. (2546). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ. (2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ธีรยุทธ สุวรรณประทีปและคณะ.(2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เมธี หมั่นทำการ และคณะ. (2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์**.กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

มนัส อนุศิริ. (2548). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก.** กรุงเทพฯ: :ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ยิ่งศักดิ์ พรรณเชษฐ์. (2541). **กำลังวัสดุเบื้องต้น**.พิมพ์ครั้งที่ 4 มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546).**ทฤษฎีโครงสร้าง** ภาควิชาครุศาสตร์โยธา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ.

บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข. (2541). **กลศาสตร์วิศวกรรมภาคสถิติศาสตร์.หน่วยสารบรรณ.** ขอนแก่น: คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ศิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2536). **กำลังวัสดุ**. กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 4 โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.

เสกสรร ศรียศ. (2550). **กลศาสตร์วิศวกรรม1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์. (2536). **กลศาสตร์วัสดุ,** กรุงเทพพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สมนึก กุลประภา. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

สนั่น เจริญเผ่าและคณะ.(2521). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก**.กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ ป.พาณิชย์สัมพันธ์.

สงวน วงษ์ชวลิตกุลและคณะ. (2541). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แม็คกรอ-ฮิลอินเตอร์เนชั่นแนลเอ็นเตอร์ไพร์ส อิงค์.

สมาน เจริญกิจพูลผลและคณะ. (2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สมนึก กุลประภา (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

สุธรรม สุริยมงคล (2528). **การวิเคราะห์โครงอาคารรับแรงกระทำด้านข้างด้วยวิธีโครงทดแทน.** วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย กรุงเทพฯ: เล่มที่ 1 กุมภาพันธ์ 2528.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

สุรศักดิ์ รายี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

อำนวย พาณิชกุล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วทัชภพ เดชพันธ์ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

วินิจ ช่อวิเชียร (2528).**ทฤษฎีโครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วินิต ช่อวิเชียร (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

วีระศักดิ์ กรัยวิเชียรและคณะ. (2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980). **Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Bresler, B., Lin, T.Y., and Scalzi, J.B.: (1963). **Design of Steel Structural**. 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York.

Elwyn E. Seelye. (1960). **Data book for civil engineers**. New York.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

J.B.Wilbur (1965). **Elementary Structural Analysis ,**2^{nd} Ed, Mc Graw-Hill,New York.

Timoshenko,S.P. (1969).**S.P. and D.H.Young: Throry of Structures**, 2ed Ed., McGraw-Hill New York,

YUAN-YU HSIEH (1995)**.Elementary theory of Structural,** U.S.A,Mexico.

หน่วยที่ 4 เส้นอิทธิพลในคานและโครงข้อหมุน

เนื้อหาสาระ

4.1 บทนำเกี่ยวกับเส้นอิทธิพล

4.2 การเขียนภาพอิทธิพล

4.3 ประโยชน์ของเส้นอิทธิพล

4.4 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่

4.5 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงปฏิกิริยา

4.6 แรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่

4.7 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับการเฉือนของคาน

4.8 การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือน

4.9 การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์

4.10 การเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัด

4.11 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับตงพื้น

4.12 การเขียนเส้นอิทธิพลบนโครงสร้างข้อหมุน

จุดประสงค์การเรียนรู้

4.1 บอกความหมายของเส้นอิทธิพลได้

4.2 สามารถเขียนการเขียนภาพอิทธิพลได้

4.3 บอกประโยชน์ของเส้นอิทธิพลได้

4.4 สามารถคำนวณหาแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่

4.5 อธิบายและสามารถเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงปฏิกิริยาได้

4.6 สามารถเขียนเพื่อหาแรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ได้

4.7 สามารถเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับการเฉือนของคานได้

4.8 สามารถสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือนได้

4.9 สามารถสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์ได้

4.10 สามารถเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัดได้

4.11 สามารถเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับตงพื้นได้

4.12 บอกความหมายและสามารถเขียนเส้นอิทธิพลบนโครงสร้างข้อหมุนได้

แนวคิดในการสอน

สำหรับแนวเส้นอิทธิพลเป็นขบวนการประยุกต์ใช้ที่มีความสำคัญสำหรับการออกแบบโครงสร้างที่ทำหน้าที่ต้านทานแรงจรหรือน้ำหนักบรรทุกจรที่มีขนาดมากกว่าปกติ สำหรับการหาแรงเฉือนของคาน การหาโมเมนต์ของคาน โครงข้อหมุน และโครงข้อแข็ง เป็นต้น เมื่อทราบตำแหน่งของน้ำหนักที่กระทำมีค่าคงที่ รูปแบบการเฉือนและโมเมนต์จึงมีตำแหน่งแน่นอนแต่มีโครงสร้างหลายอย่างที่น้ำหนักกระทำต่อโครงสร้างเคลื่อนที่สม่ำเสมอ เช่น เครนยกน้ำหนักซึ่งเคลื่อนที่บนคานทั้งสองในโรงงานอุตสาหกรรม จะมีน้ำหนักลงเป็นจุดในลักษณะเคลื่อนที่ การวิ่งของรถไฟฟ้าบนสะพาน จะมีน้ำหนักลงแบบแผ่ในลักษณะเคลื่อนที่ ดังนั้น โครงสร้างรับน้ำหนักเคลื่อนที่ไม่ว่าเป็นจุดก็ดีหรือเป็นแบบแผ่ก็ดี จะเกิดแรงเฉือนและหรือโมเมนต์สูงสุด ที่ตำแหน่งหนึ่งของโครงสร้าง อย่างไรก็ดีตำแหน่งของน้ำหนักที่ทำให้เกิดแรงเฉือนสูงสุดที่หน้าตัดหนึ่งอาจจะไม่ทำให้เกิดโมเมนต์สูงสุดในหน้าตัดอื่นก็ได้ ตำแหน่งวิกฤตของน้ำหนักเคลื่อนที่ต้องพิจารณาในการหาค่าของแรงเฉือน โมเมนต์ หรือแรงตามแกนสูงสุด ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงบทนำเกี่ยวกับเส้นอิทธิพล ภาพอิทธิพล ประโยชน์ของเส้นอิทธิพล แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับการเฉือนของคาน การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงปฏิกิริยา แรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับการเฉือนของคาน การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจาก น้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือน การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจาก น้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์ การเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัด การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับตงพื้น และการเขียนเส้นอิทธิพลบนโครงสร้างข้อหมุน เป็นต้น

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

4.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

4.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

4.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

4.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

4.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

4.1 สื่อ Power Point

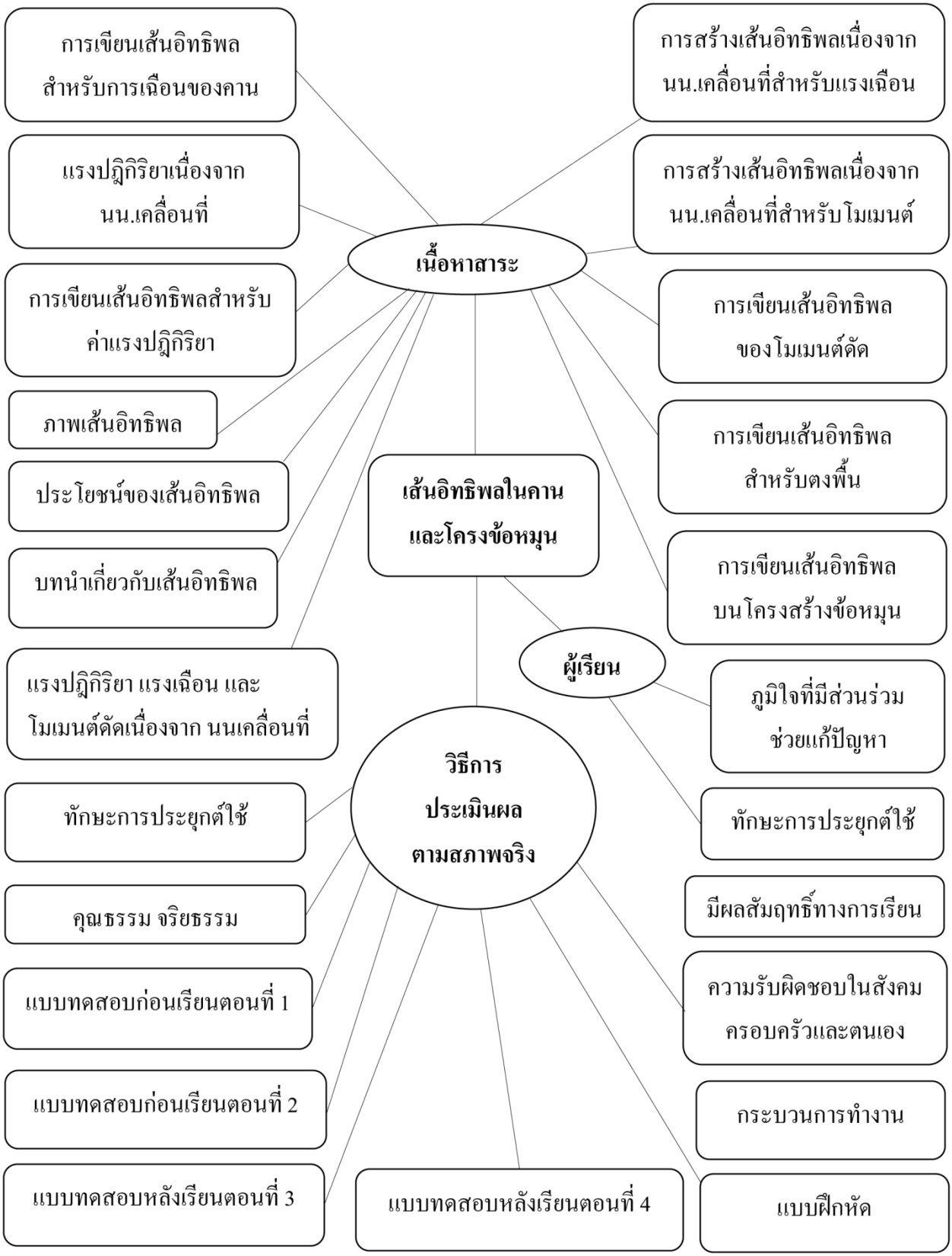
4.2 สื่อแผ่นใส

4.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

4.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่1จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. รูปแบบการเฉือนแลโมเมนต์จึงมีตำแหน่งไม่แน่นอนแต่มีโครงสร้างหลายอย่างที่น้ำหนักกระทำต่อโครงสร้างเคลื่อนที่สม่ำเสมอ

..... 2. โครงสร้างรับน้ำหนักเคลื่อนที่ไม่ว่าจะเป็นจุดก็ดีหรือเป็นแผ่ก็ดีจะเกิดแรงเฉือนและโมเมนต์สูงสุดที่ตำแหน่งหนึ่งของโครงสร้าง

..... 3. ค่าแรงที่คำนวณได้ตรงกันกับตำแหน่งที่ภาระหนึ่งหน่วยน้ำหนักกระทำเส้นลากผ่านค่าแรงต่างๆ คือความหมายของเส้นอิทธิพล (Influence Line)

..... 4. ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ใช้เป็นสะพานเราต้องหาตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกจรซึ่งจะทำให้เกิดรงภายในที่มีค่ามากที่สุดในชิ้นส่วนนั้น

..... 5. การแปรค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้ดีที่สุดโดยใช้แนวเส้นอิทธิพลซึ่งจะไม่แสดงค่าแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด

..... 6. การทรุดตัวที่สอดคล้องกันที่จุดที่ทำการพิจารณาสามารถคำนวณได้จากผังของแนวเส้นอิทธิพล

..... 7. สมการของแนวเส้นอิทธิพลสามารถสร้างโดยการวางแนวแรงกระทำขนาดหนึ่งหน่วยพื้นที่ตำแหน่งต่างๆ

..... 8. เส้นอิทธิพลหมายถึงเส้นที่แสดงถึงอิทธิพลของภาระสอง (Two Unit) หน่วยมีต่อค่าแรงใดค่าแรงหนึ่งที่หน้าที่กำหนดให้ของโครงสร้าง

..... 9. สำหรับเครื่องหมายของระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของเส้นอิทธิพลถ้าอยู่เหนือเส้นอ้างอิงเครื่องหมายจะเป็นลบ

..... 10. ในการหาค่าของโมเมนต์จากน้ำหนักเคลื่อนที่ของรอยตัดใดๆ ก็ตามบนคานโครงการของน้ำหนักเคลื่อนที่ต้องทราบเส้นของแรงเสียก่อน

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดกล่าวไดถูกต้องมากที่สุดเกี่ยวกับโครงข้อหมุนคือข้อใด
   ก. แนวเส้นอิทธิพลของชิ้นส่วนเริ่มแรกจะถูกสร้างโดยการหาแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์
   ข. ชิ้นส่วนรับแรงดึงมีค่าเป็นลบ
   ค. คานซอยมีที่รองรับแบบเรียบง่ายและการวางพาดอยู่บนคานพื้นทำให้เส้นอิทธิพลเป็น (Slope)
   ง. คานซอยมีทีรองรับแบบเรียบง่ายและวางพาดอยู่บนดาดพื้นทำให้เส้นอิทธิพลเป็นเส้นตรง
2. แนวเส้นอิทธิพลของคานหลักที่ทำหน้าที่รองรับพื้นจะพบหน่วยแรงต่างๆที่มีมากระทำต่อคาน คือข้อใด
   ก. น้ำหนักบรรทุกจร น้ำหนักบรรทุกคงที่ น้ำหนักโครงสร้าง น้ำหนักกระแทก
   ข. น้ำหนักบรรทุกจร น้ำหนักบรรทุกคงที่ น้ำหนักโครงสร้าง
   ค. น้ำหนักบรรทุกจร น้ำหนักบรรทุกคงที่
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
3. การแบ่งภาระระหว่างจุดช่วงแผ่นทั้งสองไม่มีผลเปลี่ยนแปลงต่อแรงปฏิกิริยาที่จุด A,B ต่อแรงเฉือนภายในคานหลักระหว่างจุดช่วงแผ่นสองแผ่นที่อยู่ตัดกันจะมีค่าคงที่เราเรียกแรงเฉือนที่หน้าตัดใดๆ ของตามหลักนี้ว่าอย่างไร คือข้อใด
   ก. แรงเฉือนระหว่างแผ่น (Between Panel Shear)
   ข. แรงเฉือนช่วงแผ่น(Panel Shear)
   ค. แรงเฉือนสองแผ่น(Two Panel Shear)
   ง. แรงเฉือนสามแผ่น(Three Panel Shear)
4. โมเมนต์หลักของคานหลักระหว่างจุดช่วงแผ่นสองจุดที่ดัดกันไปส่วนมากจะเป็นเส้นอะไร คือข้อใด
   ก. เส้นเอียงลาดขึ้น
   ข. เส้นเอียงลง
   ค. เส้นเฉียง
   ง. เส้นตรง

5. ความหมายของการสร้างแนวเส้นอิทธิพลที่มีค่ามากที่สุด (Envelope of Maximum Influence Load Values) คือข้อใด
   ก. กฎของสมการสำหรับการหาค่าของโมเมนต์ดัดที่มีค่ามากที่สุด
   ข. กฎของสมการสำหรับการหาค่าของแรงเฉือนที่มีค่ามากที่สุด
   ค. กระบวนการหาเส้นอิทธิพลและทำให้เกิดผลลัพธ์ที่ดีที่สุด
   ง. กระบวนการหาเส้นอิทธิพลและทำให้เกิดสะท้อนกลับที่ดีที่สุด
6. ความหมายของโมเมนต์จะมีค่ามากที่สุดและสมบูรณ์ที่สุดกรณีคานยื่นที่จุดเดียวกันกับแรงเฉือนค่ามากที่สุดอย่างสมบูรณ์ที่เกิดขึ้น คือข้อใด
   ก. คานซอยที่รับน้ำหนักบรรทุกจรจากโครงสร้าง
   ข. คานที่รองรับน้ำหนักบรรทุกจรและน้ำหนักบรรทุกคงที่
   ค. ฐานรองรับน้ำหนักบรรทุกจากโครงสร้าง
   ง. ถูกทุกข้อ
7. เมื่อน้ำหนักเคลื่อนที่ 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่จาก A ไป B ยังไม่ถึงจุด y จะมีค่าเท่ากับค่าของแรงปฏิกิริยาที่ B จะมีค่าเท่าใด
   ก. เครื่องหมายจะมีค่าเป็นบวก
   ข. เครื่องหมายจะมีค่าเป็นลบ
   ค. เครื่องหมายจะมีค่าเป็นบวกและลบ
   ง. ถูกทุกข้อ
8. ในการเขียนเส้นอิทธิพล (Influence Line) อันดับแรกต้องทราบตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำต่อโครงสร้างก่อนเป็นอันดับแรก คือข้อใด
   ก. จุดรองรับของน้ำหนักกระทำ
   ข. ตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกกระทำ
   ค. ทิศทางของน้ำหนักบรรทุกกระทำ
   ง. จุดรองรับในโครงสร้าง
9. ความหมายของเส้นอิทธิพล คือข้อใด
   ก. เส้นการหาระยะทางของน้ำหนักบรรทุกจร น้ำหนักบรรทุกคงที่และน้ำหนักบรรทุกกระแทก
   ข. เส้นแรงดึงแนวเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด
   ค. เส้นที่แสดงถึงอิทธิพลของภาระหนึ่งหนึ่งหน่วยที่มีต่อค่าแรงใดแรงหนึ่งที่หน้าตัดที่กำหนดให้ของโครงสร้าง
   ง. ถูกทุกข้อ

10. คานต่อเนื่องหลายช่วงการวางน้ำหนักบรรทุกจรเต็มทุกๆ ช่วงของคานต่อเนื่องมิได้หมายความว่าจะเกิดโมเมนต์สูงสุดที่ตำแหน่งใด คือข้อใด
    ก. การวางน้ำหนักบรรทุกจรที่บางช่วงของคานว่าจะเกิดโมเมนต์สูงสุดที่ตำแหน่งเดียวกันของคานต่ำกว่า
    ข. การวางน้ำหนักบรรทุกจรที่บางช่วงของคานว่าจะเกิดโมเมนต์สูงสุดที่ตำแหน่งเดียวกันของคานสูงกว่า
    ค. การแปรค่าของโมเมนต์ดัดที่สุดโดยใช้แนวเส้นอิทธิพลซึ่งจะแสดงแปรค่าของโมเมนต์ดัด
    ง. ถูกทุกข้อ

4.1 บทนำ

ในการวิเคราะห์โครงสร้างหรือบทก่อนๆ ที่กล่าวถึงการวิเคราะห์คาน การหาแรงเฉือนของคาน การหาโมเมนต์ของคาน โครงข้อหมุน และโครงข้อแข็ง เป็นต้น ในเมื่อทราบตำแหน่งของน้ำหนักที่กระทำมีค่าคงที่ ดังนั้น รูปแบบการเฉือนและโมเมนต์จึงมีตำแหน่งแน่นอนแต่มีโครงสร้างหลายอย่างที่น้ำหนักกระทำต่อโครงสร้างเคลื่อนที่สม่ำเสมอ เช่น เครนยกน้ำหนักซึ่งเคลื่อนที่บนคานทั้งสองในโรงงานอุตสาหกรรม จะมีน้ำหนักลงเป็นจุดในลักษณะเคลื่อนที่ การวิ่งของรถไฟฟ้าบนสะพาน จะมีน้ำหนักลงแบบแผ่ในลักษณะเคลื่อนที่ เป็นต้น ดังนั้น โครงสร้างรับน้ำหนักเคลื่อนที่ไม่ว่าเป็นจุดก็ดีหรือเป็นแบบแผ่ก็ดี จะเกิดแรงเฉือนและหรือโมเมนต์สูงสุด ที่ตำแหน่งหนึ่งของโครงสร้าง อย่างไรก็ดีตำแหน่งของน้ำหนักที่ทำให้เกิดแรงเฉือนสูงสุดที่หน้าตัดหนึ่ง อาจจะไม่ทำให้เกิดโมเมนต์สูงสุดในหน้าตัดอื่นก็ได้ ตำแหน่งวิกฤตของน้ำหนักเคลื่อนที่ต้องพิจารณาในการหาค่าของแรงเฉือน โมเมนต์ หรือแรงตามแกนสูงสุด (อภิชาต จิรัฐติยางกูร ,2530:135)

ในขณะที่การออกแบบโครงสร้างที่รับภาระ (น้ำหนักบรรทุก) คงที่และรับภาระจร เราต้องพิจารณาว่าภาระจรที่ตำแหน่งใดจึงจะทำให้เกิดความเค้นสูงสุด เพื่อความสะดวก เราพิจารณาว่าถ้ามีภาระหนึ่งหน่วยเคลื่อนที่ไปกระทำที่ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้างจะเกิดแรงชิ้นที่ส่วนตัดส่วนหนึ่งของโครงสร้างเท่าใด เราเขียนค่าแรงที่คำนวณได้ตรงกับตำแหน่งที่ภาระหนึ่งหน่วยนั้นกระทำ เส้นที่ลากผ่านค่าแรงต่างๆ ที่เขียนขึ้นนี้ เรียกว่าเส้นอิทธิพล (Influence Line) (นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ ,2546:92)

สำหรับโครงสร้างบางชนิดต้องรับน้ำหนักบรรทุกที่เคลื่อนที่ได้หรือน้ำหนักบรรทุกจร (Live or Moving Load) ตัวอย่างเช่น สะพานรถยนต์หรือรถไฟ และโครงข้อแข็งของอาคารอุตสาหกรรม ซึ่งมีปั่นจั่นที่เคลื่อนที่ได้ติดอยู่แรงภายในของโครงสร้างเหล่านี้นอกจากแปรเปลี่ยนไปกับขนาดของน้ำหนักบรรทุกแล้ว ยังแปรเปลี่ยนไปกับตำแหน่งของน้ำหนักทุกด้วย ดังนั้นในการออกแบบชิ้นส่วนชิ้นหนึ่ง เช่น ชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนที่ใช้เป็นสะพานเราต้องหาตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกจร ซึ่งจะทำให้เกิดแรงภายในที่มีค่ามากที่สุดในชิ้นส่วนนั้น

โครงสร้างชนิดที่ต้องทำหน้าที่รับน้ำหนักบรรทุกประเภทที่มีการเคลื่อนที่ไปมา เช่น สะพานรถยนต์ สะพานรถไฟ โรงงานอุตสาหกรรมที่มีเครน (Crane) หรือสายพานลำเลียง เป็นต้น หน่วยแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นภายในองค์อาคารต่างๆ เหล่านั้น นอกจากจะแปรผันตามขนาดของแรงกระทำแล้ว ยังขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่ของแรงกระทำด้วย การออกแบบโครงสร้างประเภทนี้ต้องพิจารณาตำแหน่งของแรงที่จะกระทำให้เกิดหน่วยแรงสูงสุดในองค์อาคารนั้น

โครงสร้างที่รับน้ำหนักบรรทุกจรทั่วๆ ไป เช่น คานต่อเนื่องหลายช่วงพาด การวางน้ำหนักบรรทุกจรเต็มทุกๆ ช่วงพาดของคานต่อเนื่อง มิได้หมายความว่าจะทำให้เกิดค่าโมเมนต์สูงสุดที่ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งของคาน แต่การวางน้ำหนักบรรทุกจรที่บางช่วงของคาน อาจจะทำให้ค่าของโมเมนต์ดัดที่ตำแหน่งเดียวกันของคานสูงกว่า ดังนั้นในการคำนวณออกแบบจึงจำเป็นจะต้องวิเคราะห์โครงสร้าง เพื่อหาตำแหน่งของแรงกระทำที่จะทำให้คานมีหน่วยแรงสูงสุด เช่น มีแรงเฉือนสูงสุดหรือมีโมเมนต์ดัดสูงสุด การสร้างเส้นอิทธิพลสำหรับโครงสร้างใดๆ ก็คือ การเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของแรงกระทำและค่าหน่วยแรงที่เกิดจากการกระทำของแรงนั้นๆ ในทางปฏิบัตินิยมใช้หนึ่งหน่วย (Unit Load) กระทำบนโครงสร้าง โดยให้เคลื่อนที่ไปเรื่อยๆ จากปลายด้านหนึ่งขององค์อาคารไปยังอีกปลายด้านหนึ่งขององค์อาคาร คำนวณค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากหน่วยแรงกระทำของแรงหนึ่งหน่วยที่กระทำตำแหน่งกระทำต่างๆ กันเป็นต้น (บัญชา สุปรินายก,2537:264)

ในขณะเดียวกันการศึกษาเทคนิคเพื่อการวิเคราะห์แรงภายในชิ้นส่วนของโครงสร้างเนื่องมาจากแรงกระทำคงที่หรือแรงกระทำที่กำหนด เห็นได้ว่าผังแรงเฉือนและผังโมเมนต์ดัดได้อธิบายถึงพฤติกรรมของแรงกระทำต่อชิ้นส่วนโครงสร้างดังกล่าวนี้ ถ้าโครงสร้างถูกกระทำด้วยแรงกระทำที่เคลื่อนที่หรือจร อย่างไรก็ตาม การแปรค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้ดีที่สุดโดยใช้แนวเส้นอิทธิพลซึ่งจะแสดงแปรค่าแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดหรือระยะการทรุดตัวมี่จุดที่ถูกกำหนดโดยชิ้นส่วน เป็นแรงกระทำแบบเป็นจุดซึ่งเคลื่อนที่บนชิ้นส่วน เมื่อสร้างแนวเส้นนี้จะสามารถอธิบายถึงแนวทางการรับแรงจรที่เคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง นอกจาดนั้นขนาดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน แลโมเมนต์ดัด หรือการทรุดตัวที่สอดคล้องกันที่จุดที่ทำการพิจารณา สามารถคำนวณได้จากผังของแนวเส้นอิทธิพล และมีความสำคัญเป็นอย่างมากในการแออกแบบสะพานรางของปั้นจั่นในโรงงานอุตสาหกรรม สายพาน และโครงสร้างอื่นๆ ที่มีแรงกระทำเคลื่อนที่ระหว่างช่วงของความยาวโครงสร้างนั้นๆ (Russell Hibbeler.C, 1994:151)

ส่วนโครงสร้างที่ต้านทานน้ำหนักบรรทุกที่อยู่นิ่งๆ ก็มีแรงภายในแปรเปลี่ยนไปกับตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกได้ด้วย ตัวอย่างเช่น ค่าสูงสุดของโมเมนต์ดัดที่หน้าตัดแห่งหนึ่งของคานและคานธรรมดา (ช่วงเดียว) และคานต่อเนื่องหลายๆ ช่วงคานจะไม่เกิดขึ้นโดยการบรรทุกน้ำหนักบนทุกช่วงคาน แต่ค่าสูงสุดนี้จะเกิดขึ้นเมื่อมีน้ำหนักบรรทุกกระทำเฉพาะบนบางช่วงคานเท่านั้น ดังนั้น วิศวกรหรือบุคคลที่เกี่ยวข้องต้องมีการศึกษาเพิ่มเติมพยายามเรียนรู้ให้มากขึ้นเพื่อจะวิเคราะห์โครงสร้างให้มีความแข็งแรง มีความปลอดภัยต่อชีวิตและทรัพย์สินของประชาชน จึงต้องมีการหาตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกให้ท่องแท้ซึ่งจะทำให้เกิดผลดีบางอย่างมากที่สุดในโครงสร้าง

สำหรับวิธีการที่จะแก้ปัญหาที่กล่าวมาก็คือจะต้องวิเคราะห์โครงสร้างให้ถูกต้อง สำหรับตำแหน่งหลายๆ ตำแหน่งของน้ำหนักจร และหาผลที่มีค่าสูงสุดตามต้องการ จึงจำทำให้โครงสร้างมีความประหยัด ถูกต้องทางด้านวิศวกรรม

สมการของแนวเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นไลน์ (Influence Line) สามารถสร้างโดยการวางแนวแรงกระทำขนาดหนึ่งหน่วยพื้นที่ตำแหน่งต่างๆ วัดเป็นระยะ x บนชิ้นส่วนของโครงสร้างแล้วคำนวณหาแรงเฉือน V ,R และโมเมนต์ดัด M เป็นต้น ที่จุดเราพิจารณา คือ จุดที่ P กระทำ ให้เป็นฟังก์ชันของระยะ x สมการของชิ้นส่วนย่อยของชิ้นส่วนของโครงสร้างจะประกอบกันเข้าไปเป็นเส้นแนวของเส้นอิทธิพล ซึ่งสามารถทำการคำนวณและวาดเป็นเส้นกราฟได้ ถึงแม้ว่าขั้นตอนการคำนวณหาแนวเส้นอิทธิพลจะง่ายและใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานจะเห็นได้ชัดเจนว่าความแตกต่างของการสร้างเส้นอิทธิพลและการสร้างผังของแรงเฉือนหรือโมเมนต์ดัด คือ แนวเส้นอิทธิพลซึ่งแสดงผลของแรงกระทำแบบยึดแน่นที่จุดต่างๆ ตลอดแนวของชิ้นส่วนของโครงสร้าง (บูรฉัตร ฉัตรวีระ,2545:153)

คุณสมบัติของแนวเส้นอิทธิพล (Qualitative Influence Line) ในปี ค.ศ. 1886 เฮนริก มูลเลอร์ เบย์ลูร์ (Heinrich Muller-Breslau) ได้พัฒนาเทคนิคสำหรับการเขียนเส้นอิทธิพลอย่างรวดเร็วและมีความถูกต้องแม่นยำมากที่สุด หลักการของมูลเลอร์ เบย์ลูร์ (Muller-Breslau's Principle) กล่าวว่า แนวเส้นอิทธิพลซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของแนวแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดจะมีลักษณะเหมือนกันกับรูปแบบการทรุดตัวหรือการเสียรูปของคานเมื่อคานถูกแรงมากระทำโดยแรงซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่ง เพื่อวาดภาพ ทรงการทรุดตัวให้เหมาะสม มีประสิทธิภาพของคานที่จะต่อต้านการเคลื่อนที่เป็นฟังก์ชั่น ดังนั้น คานสามารถทรุดตัวหรือเสียรูปเมื่อถูกแรงมากระทำเป็นต้น

สำหรับการพิสูจน์หลักการของมูลเลอร์ เบย์ลูร์ (Muller-Breslau's Principle) สามารถทำได้โดยใช้หลักการของงานเสมือน (Virtual Work) นั้นก็คืองานเป็นผลคูณของการขจัดเชิงเส้นกับแรงที่มีทิศทางเดียวกันกับระยะเส้นหรือระยะเชิงมุมกับโมเมนต์ดัดในกรณีที่เกิดระยะเชิงมุมที่เกิดจากการหมุน ถ้าวัตถุอิสระ (คาน) อยู่ในสภาวะสมดุล แรงลัพธ์และโมเมนต์ดัดที่กระทำต่อคานจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นถ้าวัตถุดังกล่าวเกิดระยะทางจินตนาการหรือระยะเสมือน งานที่เกิดจากแรงโมเมนต์คู่ควบทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุจะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย (Russell Hibbeler.C, 1994:161)

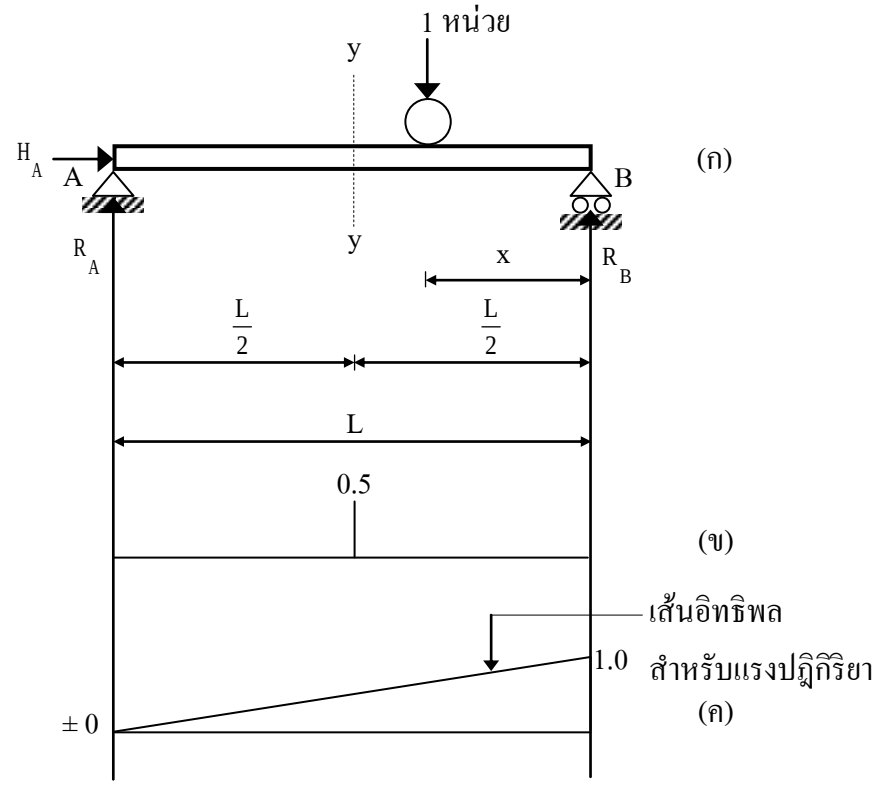
ในขณะเดียวกันวิธีที่จะแก้ปัญหาที่ตรงไปตรงมาและมีค่าใกล้เคียงกับความจริงมากที่สุดและใช้กันโดยทั่วไป คือ การหาผลที่เกิดจากน้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วยเคลื่อนที่ไปตามความยาวของโครงสร้าง เพื่อเป็นตัวอย่างง่ายๆ ให้เราพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของแรงปฏิกิริยา R_B ของคานแบบเรียบง่ายดังภาพที่ 4.1 (ก) ในขณะที่น้ำหนักเคลื่อนที่บนคาน เมื่อมีน้ำหนักอยู่ที่จุด B รับ

น้ำหนักไว้ทั้งหมด จึงได้ $R_B = 1$ เป็นการแสดงภาพโดยการเขียนระยะทางหนึ่งหน่วยในแนวดิ่งที่จุด B จะทำให้ $R_B = 0$ ดังนั้น ความยาวในแนวดิ่งออร์ดิเนท (Ordinate) ที่จุด A ในภาพ 4.1 (ข) เท่ากับ 0 และเมื่อน้ำหนัก 1 หน่วยอยู่ที่กลางช่วงคาน (จุด y) $R_A = 0.5$ ดังนั้นเราจึงเขียนค่า 0.5 ที่จุด y ในภาพที่ 4.1 (ข) ความยาวในแนวดิ่งที่เป็นค่าของ R_B สำหรับตำแหน่งต่างๆ ของน้ำหนักหนึ่งหน่วยในกรณีนี้เห็นได้โดยง่ายว่าเขียนต่อกันเป็นเส้นตรงดังแสดงในภาพที่ 4.1 (ค) แผนภาพดังกล่าวเรียกว่า "เส้นอิทธิพล" (Influence Line) สำหรับ R_B ในแนวดิ่งที่จุดใดๆ ของแผนภาพคือค่าของ R_B เมื่อน้ำหนักหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดตรงนั้น ดังนั้นเราจึงเขียนแผนภาพซึ่งแสดงค่าของปริมาณที่ต้องการ (ในกรณีนี้คือแรงปฏิกิริยาที่ R_B) สำหรับตำแหน่งต่างๆ ของน้ำหนักหนึ่งหน่วย

ในทำนองเดียวกันเราสามารถเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับแรงตามแนวแกน แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด และการเคลื่อนที่ของน้ำหนักหนึ่งหน่วย เป็นต้น เราจึงต้องเข้าใจเส้นอิทธิพลแสดงการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอย่างหนึ่ง (เช่นแรงปฏิกิริยา แรงภายในหรือการเคลื่อนที่) ที่เกิดขึ้นที่จุดหนึ่งๆ ของโครงสร้าง เมื่อมีน้ำหนักหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดต่างๆ ของโครงสร้าง และค่าในแนวดิ่งที่จุดใดๆ ของเส้นอิทธิพลเท่ากับค่าของปริมาณดังกล่าวเมื่อน้ำหนักหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดนั้นการใช้เส้นอิทธิพลสำหรับโครงสร้างที่คำนวณไม่ได้เชิงสถิติใช้ได้เฉพาะกับพฤติกรรมยืดหยุ่นเท่านั้น

ในขณะเดียวกันรูปร่างของเส้นอิทธิพลมีประโยชน์มากในการหาตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกที่จะทำให้เกิดค่าสูงสุดของปริมาณใดปริมาณหนึ่ง ในตัวอย่างที่กล่าวมาข้างต้น ค่าสูงสุดของเส้นอิทธิพลอยู่ที่จุด B และน้ำหนักบรรทุกสูงสุดที่เคลื่อนที่ได้น้ำหนักที่กระทำที่จุด B จึงจะเกิดแรงปฏิกิริยาที่ R_B ที่มีค่าสูงสุด โดยปกติตำแหน่งที่ต่างกันของน้ำหนักบรรทุกทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรงเฉือน โมเมนต์ดัดหรือการเคลื่อนที่ ที่จุดหนึ่งๆ ดังนั้นเราต้องใช้เส้นอิทธิพลที่ต่างกันในการหาค่าสูงสุดของโครงสร้างต่างๆ นั้น

ดังนั้นเส้นอิทธิพลหมายถึงเส้นที่แสดงถึงอิทธิพลของภาระหนึ่งหน่วยที่มีต่อค่าแรงใดแรงหนึ่งที่หน้าตัดที่กำหนดให้ของโครงสร้าง เมื่อภาระหนึ่งหน่วยนี้เคลื่อนที่ไปกระทำที่จุดต่างๆ บนโครงสร้าง แรงที่เกิดขึ้นที่หน้าตัดที่กำหนดให้เมื่อภาระหนึ่งหน่วยกระทำที่จุดใดๆ มีค่าเท่ากับค่าของแรงที่วัดจากแนวแกนชิ้นส่วนไปถึงเส้นอิทธิพลที่จุดนั้นๆ



ภาพที่ 4.1 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ที่มา : วรรธนา พันธ์สว่าง(2545)

4.2 ภาพอิทธิพล (Influence Diagrams)

ภาพอิทธิพล คือ กราฟที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นของน้ำหนักที่กระทำในแนวดิ่งและตำแหน่งของน้ำหนักบนคานในแนวนอน ฟังก์ชั่นน้ำหนักที่กระทำปกติมีแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนหรือโมเมนต์เฉพาะจุดบนคาน ดังนั้นความแตกต่างระหว่างภาพแรงเฉือนหรือโมเมนต์ของคานกับรูปอิทธิพล

ส่วนแผนภาพแรงเฉือนหรือโมเมนต์เขียนเพื่อจะแสดงภาระของคานเมื่อมีแรงกระทำในตำแหน่งคงที่ รูปอิทธิพลเขียนเพื่อแสดงภาระของโครงสร้างเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ เช่น ผังแรงเฉือนแสดงถึงภาวะของแรงเฉือนเมื่อมีน้ำหนักเคลื่อนที่สม่ำเสมอตลอดคาน โดยแสดงได้ด้วยรูปอิทธิพลของแรงเฉือน

และรูปอิทธิพลสามารถแสดงเป็นแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ ระยะโก่งหรือแรงเค้น โดยการให้หนึ่งหน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่ตลอดคาน เมื่อจะหารูปอิทธิพลที่จุดใดก็นำหนึ่งหน่วยน้ำหนักวางที่จุดนั้น ก็จะทราบค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนและโมเมนต์

4.3 ประโยชน์ของเส้นอิทธิพล

สำหรับประโยชน์ของเส้นอิทธิพล ที่ได้จากการสร้างเส้นอิทธิพลที่แสดงถึงผลการเคลื่อนที่ของน้ำหนักบรรทุกจรหนึ่งหน่วยบนโครงสร้างนั้นๆ ที่มีต่อฟังก์ชั่นต่างๆ (แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด) ดังนั้นเมื่อมีน้ำหนักบรรทุกจรแบบเป็นจุด (Point Load) ขนาดต่างๆ กระทำ ณ ตำแหน่งใดๆ บนโครงสร้างค่าของฟังชันก์ที่ต้องการก็สามารถหาได้จากเส้นอิทธิพลที่สร้างขึ้นโดยการคูณค่าน้ำหนักจรนั้นกับค่าออร์ดิเนท (Ordinate) ของเส้นอิทธิพลที่วัดได้จุดตรงที่น้ำหนักจรกระทำ สำหรับกรณีที่น้ำหนักจรเป็นแบบสม่ำเสมอนั้นเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง ค่าของฟังก์ชั่นที่ต้องการจะได้จะได้จากการคูณค่าของน้ำหนักแผ่เสมอนั้นกับพื้นที่ใต้เส้นอิทธิพล ในส่วนที่น้ำหนักนั้นกระทำ เป็นต้น

และการใช้เส้นอิทธิพลเพื่อหาค่าของฟังก์ชั่น มักนิยมใช้กับการคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนชนิดที่คร่อดบนและคร่อดล่างของโครงสร้างไม่ขนานกัน เมื่อต้องรับน้ำหนักแผ่แบบเคลื่อนที่ได้ หรือที่ต้องรับน้ำหนักจรแบบเป็นจุด นอกจากนี้ยังนิยมใช้เพื่อหาค่าสูงสุดของแรงเฉือนในแต่ละช่วงของคานที่รับตงพื้นอีกด้วย แต่สำหรับการหาแรงเฉือนของโมเมนต์ดัดในคานธรรมดาเมื่อรับน้ำหนักขนาดต่างๆ การคำนวณโดยตรงที่มิต้องอาศัยกราฟของเส้นอิทธิพลจะกระทำได้อย่างรวดเร็วขึ้น อย่างไรก็ดีกราฟเส้นอิทธิพลมีประโยชน์มากในกรณีที่ต้องการหาตำแหน่งวิกฤตของน้ำหนักจรที่เคลื่อนอยู่บนโครงสร้างเพื่อให้ได้ค่าสูงสุดของฟังชั่นที่ต้องการ

4.4 แรงปฏิกิริยา แรงเฉือน แลโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่

สำหรับแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน แลโมเมนต์ดัด เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ (Reaction Shear and Moment due to Moving Loads) เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ในโครงสร้างสะพาน แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งที่น้ำหนักบรรทุกนั้นกระทำ จากน้ำหนักเคลื่อนที่หรือน้ำหนักเคลื่อนย้าย ในการคำนวณออกแบบส่วนของโครงสร้างจึงมีความจำเป็นต้องทราบตำแหน่ง (Position) ของน้ำหนักเสียก่อน ซึ่งเป็นผลทำให้เกิดค่าสูงสุดค่าแรงปฏิกิริยาต่างๆ บนโครงสร้าง เช่น สานรถยนต์ สะพานรถไฟ และสะพานที่รับน้ำหนักบรรทุกจรของยานพาหะนะชนิดต่างๆ เป็นต้น ซึ่งเป็นน้ำหนักบรรทุกจรแบบเคลื่อนที่ได้ จึงจำเป็นต้องวิเคราะห์เพื่อหาตำแหน่งวิกฤติ (Critical Position) ของน้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำให้ค่าของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดมากที่สุด การวิเคราะห์ที่ได้กล่าวมาจะได้จากการสร้างกราฟ ซึ่งเรียกว่า เส้นอิทธิพล (Influence Line)

สำหรับเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นซไลน์ (I.L) เป็นกราฟ ซึ่งแสดงการแปรผันของค่าแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด หรือฟังชันก์อย่างอื่นของโครงสร้าง เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกซึ่งมีค่าเพียงหนึ่งหน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้างที่เรากำหนดไว้นั้น (ชาญชัย จารุจินดา,2525:124)

ส่วนการสร้างเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นไลน์หรือการเขียนเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นไลน์ก็ตาม ก่อนอื่นผู้ที่จะศึกษาจะต้องทราบตำแหน่งที่ต้องการทราบบนโครงสร้างนั้น นอกจากตำแหน่งของน้ำหนักที่มากระทำกับโครงสร้างจะต้องทราบประเภทเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นไลน์และสมการเสียก่อน โดยใช้น้ำหนัก 1 หน่าย เป็นน้ำหนักเคลื่อนที่ เมื่อน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้างอยู่ตำแหน่งที่ต้องการพิจารณาก็สามารถคำนวณหาสิ่งที่ต้องการ เช่น แรงปฏิกิริยา โมเมนต์ดัด เป็นต้น แล้วก็เขียนค่าออร์ดิเนท โดยการกำหนดมาตราส่วนนั้นไว้ทางตั้งใต้จุดที่น้ำหนักหนึ่งหน่วยกระทำ ทำเช่นนี้ทุกจุดเมื่อมีน้ำหนักหนึ่งหน่วยเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง ก็จะได้ค่าออร์ดิเนทหลายแล้วเชื่อมโยงจุดออร์ดิเนทนั้นๆ ก็จะได้กราฟที่เรียกว่า “เส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอนไลน์”

ในกรณีที่ภาระจรแบบจุดเพียงภาระเดียวหรือมีภาระจรแบบสม่ำเสมอกระทำบนโครงสร้าง เราสามารถหาตำแหน่งที่ภาระนี้กระทำเพื่อให้เกิดความเค้นสูงสุดได้ทันทีโดยพิจารณาเส้นอิทธิพล แต่ถ้ามีภาระจรนี้สลับซับซ้อน เช่น มีภาระจรแบบจุดหลายภาระซึ่งมีขนาดและระยะห่างแตกต่างกัน เช่น ในกรณีล้อของรถไฟ เราไม่สามารถหาตำแหน่งวิกฤตโดยการมองเส้นอิทธิพลเท่านั้น วิธีที่ควรใช้ในกรณีนี้ คือ การทดลองคำนวณโดยอาศัยเงื่อนไข ซึ่งขึ้นอยู่กับเส้นอิทธิพลเพื่อลดการคำนวณให้น้อยที่สุด เส้นอิทธิพลที่ต่างชนิดกัน ย่อมมีเงื่อนไขสำหรับค่าสูงสุดที่ต่างกัน เราจะพิจารณาเงื่อนไขที่ให้ค่าสูงสุดสำหรับเส้นอิทธิพลบางชนิดที่พบบ่อยๆ (นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์,2546:112)

ในขณะที่เส้นอิทธิพลแบบหนึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปเดียว เช่น รูปสามเหลี่ยม ซึ่งเป็นเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยาของคานหรือโครงข้อหมุนที่มีที่รองรับเรียบง่าย และแสดงความเรียบง่ายซึ่งรับภาระจรจุดหลายจุดซึ่งมีขนาดและระยะห่างที่ตายตัวโดยมีแรงกระทำแบบเป็นจุดมีระยะห่าง เป็นต้น ถ้าต้องการหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับทั้งสองเราจะต้องเขียนเส้นอิทธิพลนั้น

และน้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่ (Moving Load) ที่กล่าวมาอาจจะเป็นน้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบแผ่สม่ำเสมอ (Concentrated Moving Load) ก็ได้เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่กระทำกับโครงสร้าง สิ่งที่ต้องการทราบก็คือ ตำแหน่งที่มีค่าสูงสุดของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และแรงดัดอยู่ ณ ที่ใด และมีค่าเท่าไร การหาค่าต่างๆ เหล่านี้จะสะดวกมากขึ้นถ้าเราสร้างไดอะแกรมขึ้นมา

เรียกว่าเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอนไลน์ไดอะแกรม (Influence Line) หรือเส้นอินฟลูเอนไลน์ (Influence Line)

ในท้ายที่สุดการสร้างเส้นอิทธิพล สามารถสร้างขึ้นโดยการพล็อตความสูงในแนวดิ่งของออร์ดิเนท (Ordinate) ของเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน หรือแรงดัด ของจุดใดจุดหนึ่งจากการเอาหนึ่งหน่วยน้ำหนักบรรทุกไปวาง ณ จุดนั้น

4.5 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงปฏิกิริยา

ในการเขียนการเขียนเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นไลน์ (Influence Line) สำหรับค่าแรงปฏิกิริยาเมื่อมีน้ำหนัก 1 หน่วยกระทำต่อโครงสร้างเคลื่อนที่จาก A ไป B หรือ จาก B ไป A เราจะได้เส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่ A นั้น สังเกตจากเส้นประ ดังภาพที่ 4.2

เมื่อมีหน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนคาน โดยมีน้ำหนัก 1 หน่วย เคลื่อนที่ไปบนคาน A-B โดยเคลื่อนที่จาก B ไป A หรือจาก B ไป A เป็นระยะ x ค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุด A จะเท่ากับ $RB = \frac{x}{L}$ ในทำนองเดียวกันถ้าจะหาแรงปฏิกิริยาผู้ศึกษาจะได้เส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่จุด B ดังภาพที่ 4.2

และจากภาพที่ 4.2 จะเห็นว่าการหาเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นไลน์ของแรงปฏิกิริยาที่จุด B ค่าออร์ดิเนทที่จุดหนึ่งๆ แสดงว่า เมื่อมีน้ำหนักบรรทุกจร น้ำหนักอยู่บนคานตรงจุดที่กำลังพิจาณาอยู่นั้น แรงปฏิกิริยา B จะมีค่าออร์ดิเนทที่วัดได้

ในส่วนของภาพที่ 4.3 ให้ AB เป็นคานช่วงเดียวธรรมดาที่ถูกน้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่กระทำต้องสร้างเส้นอิทธิพล (Influence Line ,I.L.) สำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A (R_A) และเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A จะหาค่าออร์ดิเนทโดยการเคลื่อนที่ 1 หน่วย (Unit Load) จาก B ไป A ดังนี้

เมื่อ 1 หน่วย (1 Unit Load) อยู่ที่จุด B (x = 0)

จาก ΣM รอบจุด B = 0;

$$\therefore \quad R_A = 0$$

ดังนั้นระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. ของ R_A ที่ B = 0

เมื่อ 1 หน่วย (1 Unit Load) เคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด C (x = x)

จาก ΣM รอบจุด B = 0;

$$\therefore \quad R_A = \frac{x}{L} \uparrow^{+}$$

ดังนั้นระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. ของ R_A ที่ C $= +\frac{x}{L}$

เมื่อ 1 หน่วย (1 Unit Load) เคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด A (x = L)

จาก ΣM รอบจุด B = 0;

$\therefore \quad R_A = +1.0 \uparrow^{+}$

จากการต่อโยงของเส้นผ่านระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. ของ R_A ที่ B C และ A จะได้เส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A ของคาน AB ดังแสดงในภาพที่ 4.2 ข.

สำหรับเครื่องหมายของระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L.

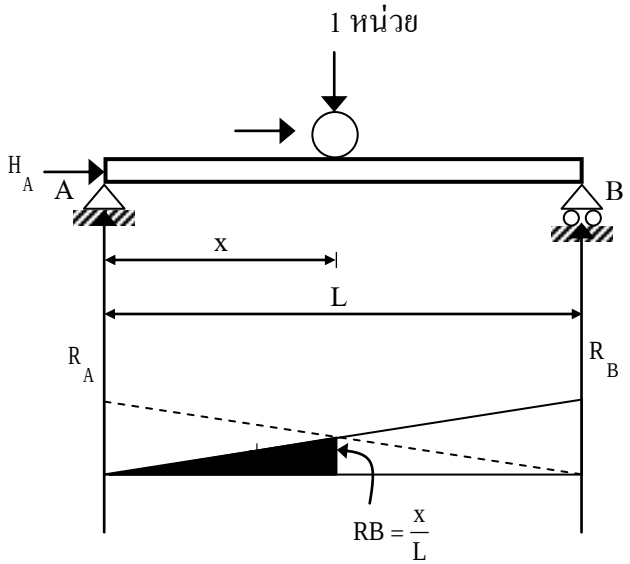
$\therefore$ ถ้าอยู่เหนือเส้นอ้างอิงจะเป็น ($\pm$ 0) จะเป็นบวก (+)

$\therefore$ ถ้าอยู่ใต้เส้นอ้างอิงจะเป็น ($\pm$ 0) จะเป็นลบ (–)

สำหรับระยะตั้งฉากกับแกน(Ordinate) ของเส้นอิทธพล I.L. ของ R_A = 1.0 หมายความว่า แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A เท่ากับ 1 $\frac{M}{N}$ ของน้ำหนักบรรทุกที่ A และน้ำหนักบรรทุกจะมีหน่วยเป็นอะไรก็ได้ถ้าต้องการทราบค่าที่แท้จริง ก็เพียงแต่เอาน้ำหนักบรรทุกที่กระทำเป็นจุดคูณกับระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. ที่จุดที่น้ำหนักบรรทุกนั้นวางอยู่

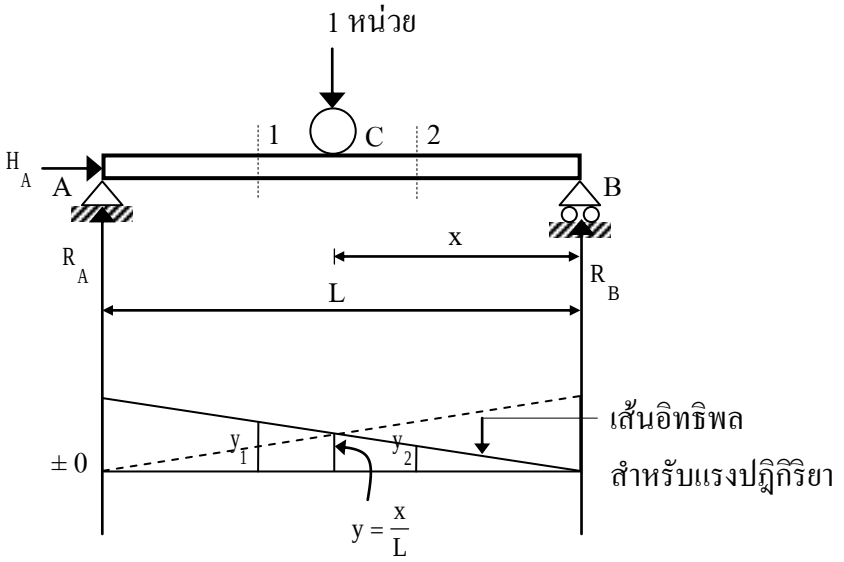
ถ้าหากคานช่วงเดียวธรรมดา AB ถูกกระทำโดยน้ำหนักบรรทุกที่แผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอโดยไม่มีขนาด W $\frac{N}{W}$ วางอยู่ระหว่างจุด 1 และ 2

ฉะนั้นแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A จะหาได้โดยเอาพื้นที่ของ I.L. ของ R_A ช่วงที่ถูกวางทับน้ำหนักบรรทุกที่แผ่กระจายอย่างสม่ำเสมอคูณด้วยขนาดของน้ำหนักบรรทุกนั้น



ภาพที่ 4.2 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

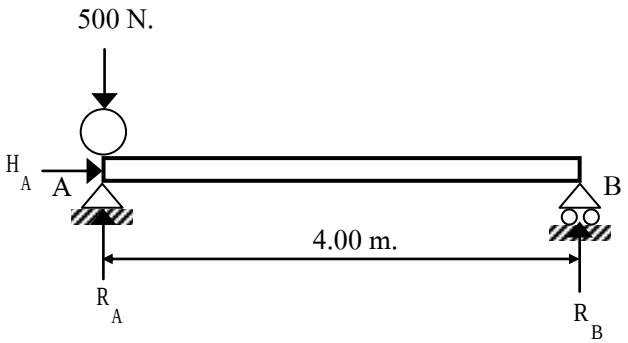
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



ภาพที่ 4.3 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

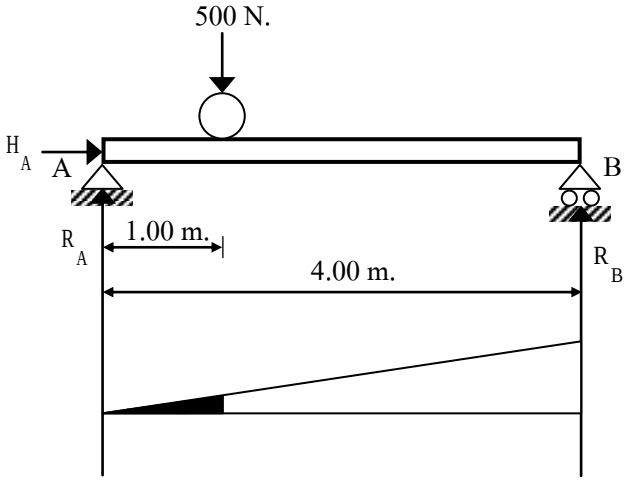
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 1 คาน AB มีความยาว 4.00 m. มีน้ำหนักกระทำบนคาน 500 N. เคลื่อนที่บนคาน Aไป B ไปทีละ 1.00 m. จงคำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุด B



ภาพที่ 4.4 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



(ก)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 500 \times 1.00 = 0$$

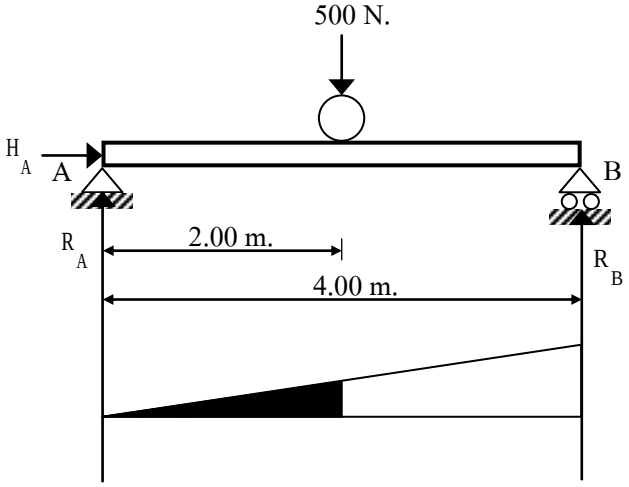
$$-R_B \times 4.00 + 500 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 = -500$$

$$-R_B = -\frac{500}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +120 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +120 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(ข)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times (L) + 500 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 500 \times 2.00 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 1{,}000 = 0$$

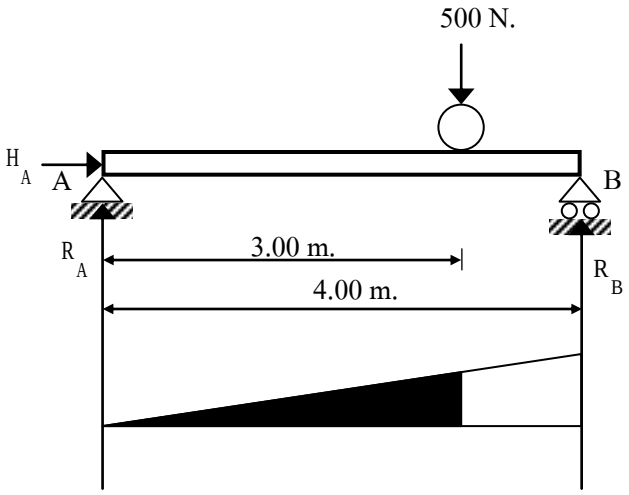
$$-R_B \times 4.00 = -1{,}000$$

$$-R_B = -\frac{1{,}000}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +250 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +250 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +120 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(ค)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times (L) + 500 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 500 \times 3.00 = 0$$

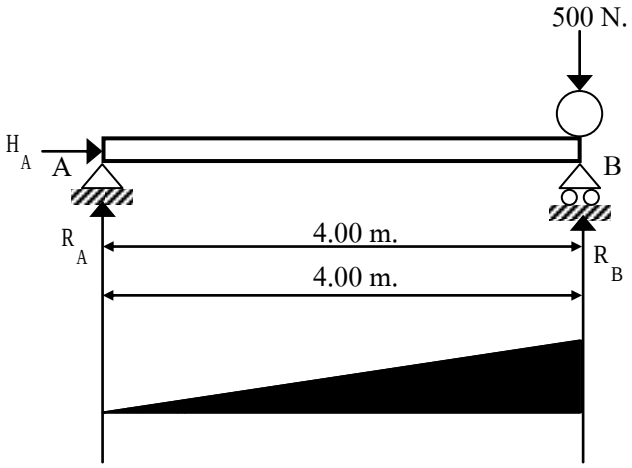
$$-R_B \times 4.00 + 1{,}500 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 = -1{,}500$$

$$-R_B = -\frac{1{,}500}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +375 \text{ N. } (\uparrow^+)$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +375 \text{ N. } (\uparrow^+)$$



(ง)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times (L) + 500 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 500 \times 4.00 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 2{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 = -2{,}000$$

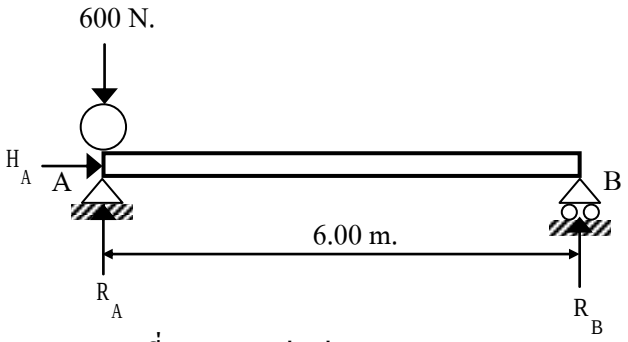
$$-R_B = -\frac{2{,}000}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +500 \text{ N. } (\uparrow^+)$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +500 \text{ N. } (\uparrow^+)$$

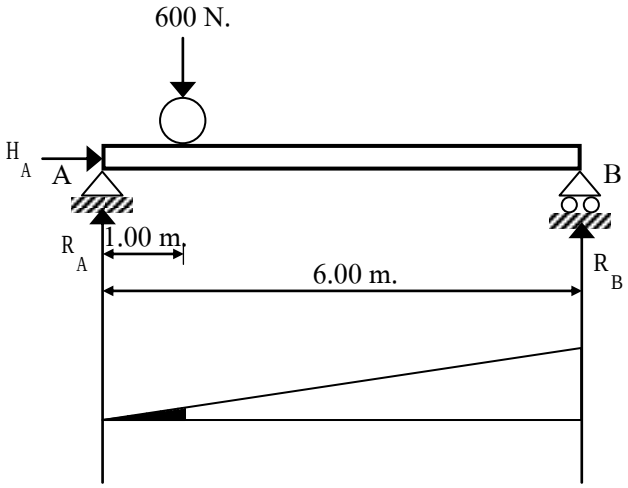
ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_B เท่ากับ 500 N. $(\uparrow^+)$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 น้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนคานโดยเคลื่อนที่จาก A ไป B คานมีความยาว 6.00 m. มีน้ำหนัก 600 N. จงคำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุด B โดยเคลื่อนน้ำหนักจากจุด A ไปทีละ 1.00 m.



ภาพที่ 4.5 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



(ก)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 600 \times 1.00 = 0$$

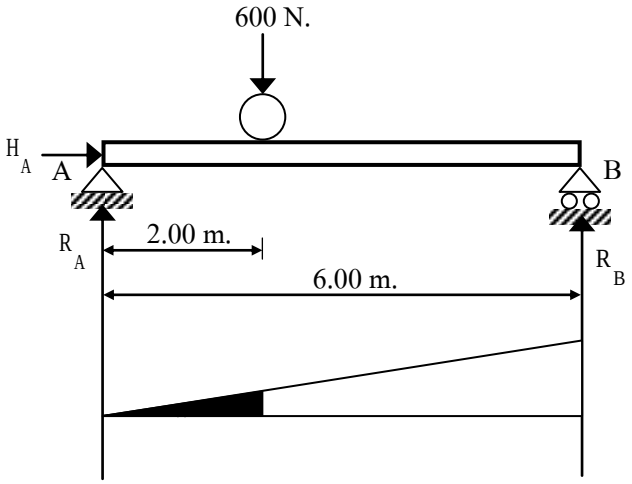
$$-R_B \times 6.00 + 600 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -600$$

$$-R_B = -\frac{600}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +100 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +100 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(ข)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 600 \times 2.00 = 0$$

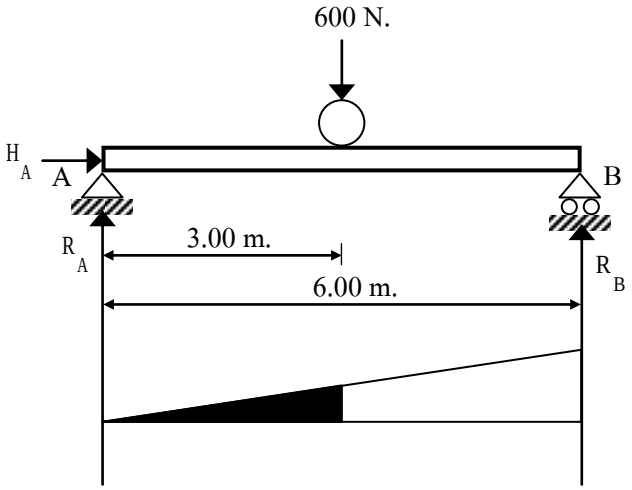
$$-R_B \times 6.00 + 1{,}200 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -1{,}200$$

$$-R_B = -\frac{1{,}200}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(ค)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 600 \times 3.00 = 0$$

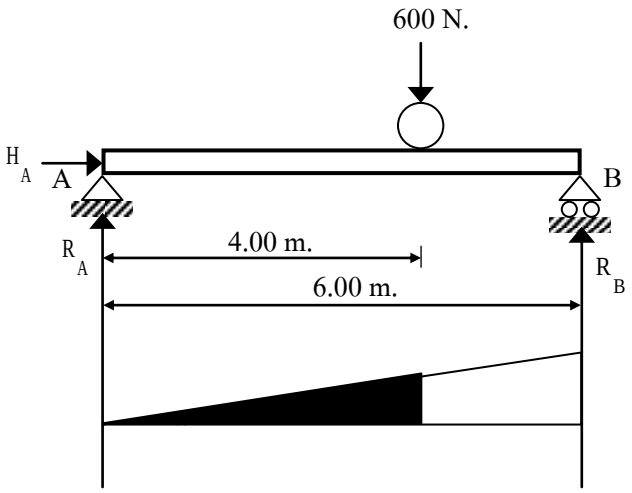
$$-R_B \times 6.00 + 1{,}800 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -1{,}800$$

$$-R_B = -\frac{1{,}800}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +300 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +300 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(ง)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0 \quad ^{+}\circlearrowleft^{-}$$

$$-R_B \times 6.00 + 600 \times 4.00 = 0$$

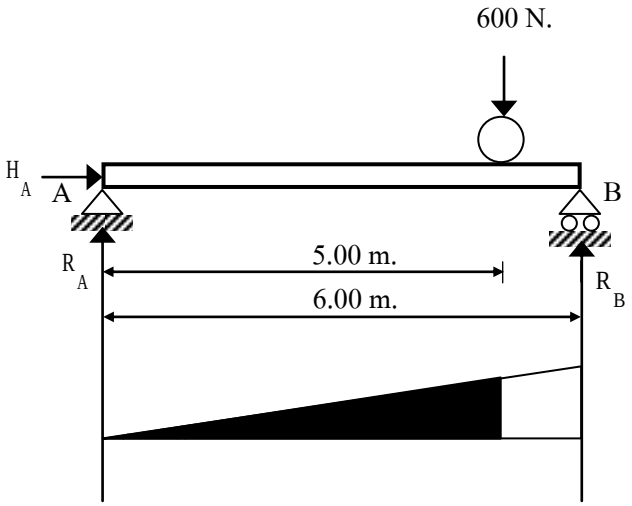
$$-R_B \times 6.00 + 2{,}400 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -2{,}400$$

$$-R_B = -\frac{2{,}400}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +400 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +400 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(จ)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 600 \times 5.00 = 0$$

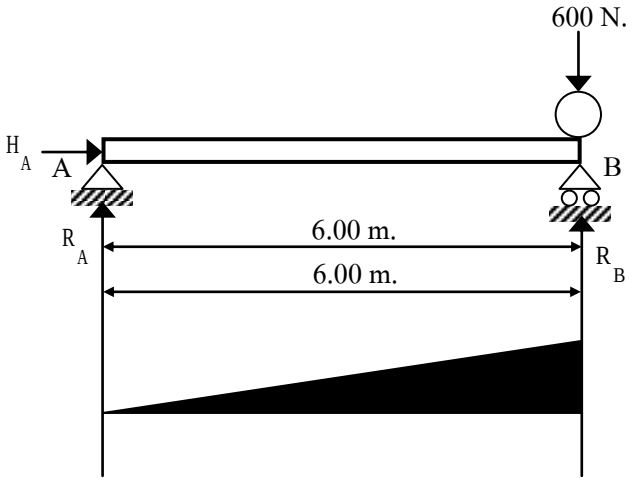
$$-R_B \times 6.00 + 3{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -3{,}000$$

$$-R_B = -\frac{3{,}000}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +500 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +500 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$



(ช)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ (+ ↺ -)

$$-R_B \times (L) + 600 \times (X) = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 600 \times 6.00 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 3{,}600 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -3{,}600$$

$$-R_B = -\frac{3{,}600}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

$$\therefore \quad \frac{X}{L} = +600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_B เท่ากับ 600 N. ($\uparrow^{+}$) **ตอบ**

4.6 แรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่

ในการคำนวณหาแรงปฏิกิริยา (Reaction) ของน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้างใดๆก็ตามทางด้านวิศวกรรมนั้น ผู้ที่ต้องการสร้าง จะต้องพิจารณาถึงเส้นอิทธิพลหรืออินฟลูเอ็นซ์ไลน์ ณ จุดใดจุดหนึ่งของโครงสร้างเสียก่อนเสมอ เพราะว่าน้ำหนักจะเคลื่อนที่ไปในแต่ละจุดและไปเรื่อยๆ บนโครงสร้างนั้นๆ ได้แก่ กระบวนรถไฟฟ้า รถยนต์พ่วงที่มีจำนวนล้อหลายๆ ล้อ น้ำหนักบรรทุกในแต่ละล้อจะไม่เท่ากัน ทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับที่ฐานรองรับแตกต่างกัน

สำหรับแรงที่เคลื่อนที่ซึ่งเกิดจากน้ำหนักบรรทุกจรสำหรับ**สะพานทางหลวง** (Highway Bridges) นั้น แรงจรหรือน้ำหนักบรรทุกจรหลักที่กระทำบนช่วงความยาวของสะพานทางหลวงที่

เป็นสะพานโครงสร้างเหล็ก สะพานโครงสร้างคอนกรีตเสริมเหล็ก และสะพานโครงสร้างไม้ เป็นต้น ที่เกิดจากน้ำหนักจรบนผิวสะพานทางหลวงได้ถูกระบุไว้ในมาตรฐานของสมาคมของรัฐและกรมขนส่งของอเมริกัน(American Association of State and Highway Transportation Officials : AASHTO) สำหรับรถบรรทุกที่มีสองเพลา แรงกระทำดังกล่าวนี้ต้องควบคุมการออกแบบด้วยค่า H ซึ่งแปรผันตรงกับแรงรถบรรทุกซึ่งแรงของรถบรรทุกหน่วยตันและตัวเลขอื่นๆ จะเป็นการระบุปีของข้อกำหนดที่แรงกระทำถูกบันทึก ยกตัวอย่างเช่น H15-44 เป็นรถบรรทุกขนาด 15 ตันถูกบันทึกไว้ในปี ค.ศ.1944 อนุกรม H ของรถบรรทุกมีแรงแปรค่าจาก 10 ถึง 20 ตัน สะพานที่อยู่บนทางหลวงหลัก ที่ทำหน้าที่รองรับการจราจรคับคั่ง โดยทั่วไปแล้วจะต้องออกแบบไว้เพื่อรองรับรถบรรทุกที่มีสองเพลา รวมทั้งตรงบริเวณจุดกึ่งกลางของรถพ่วงที่มีเพลาเดียว ซึ่งการออกแบบดังกล่าวจะเป็นแรงกระทำแบบ HS ยกตัวอย่างเช่น HS20-44 โดยทั่วไปแรงของรถบรรทุกจะต้องระบุด้วยในขั้นตอนการออกแบบ แต่อย่างไรก็ตามก็ยังขึ้นอยู่กับประเภทของสะพาน ตำแหน่ง และประเภทการจราจรที่มีบทบาทประกอบด้วยสำหรับขั้นตอนการออกแบบก่อสร้าง

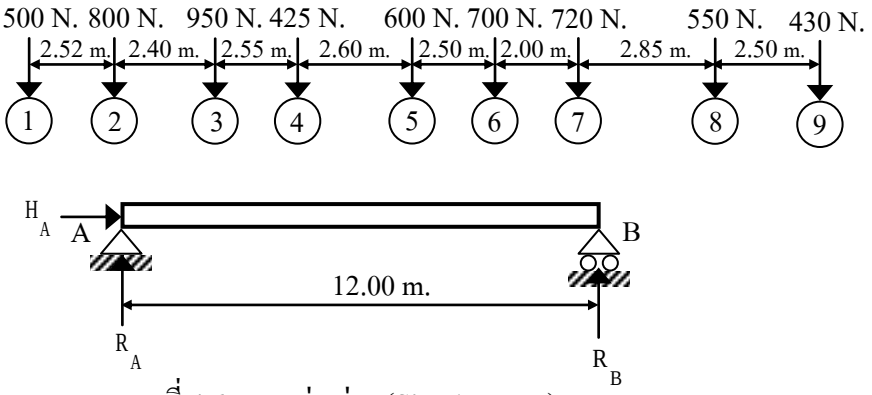
ขนาดของรถบรรทุกจะถูกระบุไว้อย่างชัดเจนในมาตรฐานและพฤติกรรมการกระจายของแรงหรือน้ำหนักจะมีรายละเอียดบอกไว้ในข้อกำหนดของ AASHTO ยกตัวอย่างเช่น HS20-44 รถบรรทุกจะถูกสมมติไว้ให้ครอบครองทางวิ่งขนาดกว้าง 10 ฟุต ทุกทางวิ่งบนสะพานก็ตามจะไม่ใช้แรงกระทำเต็มที่ ในการคำนวณหาแรงกระทำวิกฤตจะนำไปใช้ในการออกแบบ ในบางกรณีข้อกำหนดจะยอมให้ลักษณะของแรงกระทำอยู่ในรูปอย่างง่ายโดยการแสดงกระทำบนทางวิ่งเป็นแรงกระทำอย่างสม่ำเสมอกับแรงที่กระทำแบบเป็นจุด ซึ่งนั้นหมายความว่ามีการกระจายของการจราจรที่มีขนาดปานกลาง ซึ่งรถบรรทุกหนักมากมาวางอยู่ที่จุดที่มีค่าสูงสุดของแนวเส้นอิทธิพล (เป็นค่าสูงสุดที่ใช้ในการออกแบบ)

ส่วนสำหรับแรงที่เคลื่อนที่ซึ่งเกิดจากน้ำหนักบรรทุกจรสำหรับ**สะพานทางรถไฟ** (Railroad Bridges) นั้น แรงหรือน้ำหนักบรรทุกได้กำหนดไว้โดยมาตรฐานของสมาคมวิศวกรรมรถไฟแห่งอเมริกัน (American Railroad Engineering Association: AREA) โดยปกติแล้วระบบของแรงกระทำ E ได้ถูกคิดค้นครั้งแรกโดย ทีโอดอร์ คูเปอร์ (Theodore Coper) ในปี ค.ศ.1894 และถูกนำมาใช้ในการออกแบบกันอย่างแพร่หลาย ยกตัวอย่างเช่น รถไฟสมัยใหม่มีแรง 72 k (kip) กระทำบนเพลาของเครื่องจักรกลที่ถูกออกแบบให้มีแรงที่ส่งถ่ายออกมากระทำกับพื้นรองรับขนาด E-72 ในภาพที่ 4.7 ดี บี เสตนแมนท์ (DB.Steinmann) ได้พัฒนาลักษณะการกระจายของแรงกระทำของคูเปอร์ (Cooper's Load Distribution) กระทำการปรับปรุงชุดของแรงกระทำ M ที่ยอมรับให้ใช้ในการออกแบบ เนื่องจากแรงกระทำบนทางรถไฟเกี่ยวข้องกับชุดแรงกระทำวิกฤต (Critical Load)

ในขณะเดียวกันกับแรงกระทำที่เกิดจากแรงบรรทุกจร (Impact Load) แรงหรือน้ำหนักบรรทุกจรที่เคลื่อนที่อาจมีการสะท้อนกลับหรือการแกว่งไปทางด้านข้าง เทื่อแรงกระทำเคลื่อนที่ไปบนสะพาน และมีบางส่วนที่กระแทกกับพื้น ทำให้เกิดแรงบรรทุกจรเพิ่มขึ้นอันเนื่องมาจากพฤติกรรมการกระแทกคิดเป็นร้อยละของแรงบรรทุกเดิมอยู่แล้วและถูกเรียกว่า แฟกเตอร์ของแรงกระแทก (Impact Load) I แฟกเตอร์นี้โดยทั่วไปจะสามารถคำนวณหาได้จากการที่พัฒนามาจากหลักฐานการทดลอง (Experimental Evidence) ยกตัวอย่าง เช่น สำหรับสะพานทางหลวงข้อกำหนด AASHTO ต้องการค่า ดังนี้

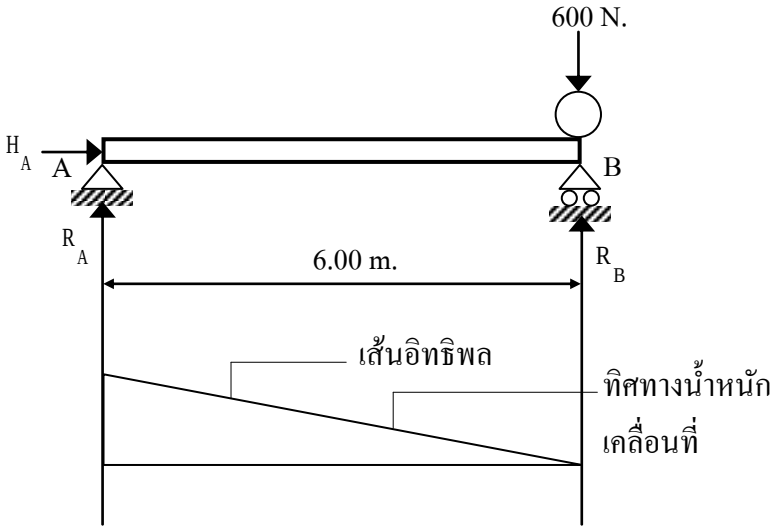
$$I = \frac{50}{L+125} \text{ แต่ไม่เกิน } 0.3$$

ในขณะที่การเคลื่อนที่ของล้อรถไฟหรือรถพ่วงไปบนโครงสร้าง AB นั้น เมื่อเราต้องการหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A ต้องให้รถไฟหรือรถพ่วงเริ่มเคลื่อนที่จาก B ไป A และแรงปฏิกิริยาที่ A จากเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่ A ต้องให้เส้นอิทธิพลแรงปฏิกิริยาที่ A จะเห็นว่าล้อที่ 1 เริ่มเคลื่อนที่มาบนโครงสร้างที่จุด A แรงปฏิกิริยาที่จุด A จะเริ่มต้นมีแรงปฏิกิริยาขึ้นและเมื่อล้อที่ 2,3,4 เริ่มเคลื่อนที่ขึ้นมาบนโครงสร้าง แรงปฏิกิริยาที่จุด A จะลดลงเท่าๆ กับน้ำหนักของล้อที่ 1 และเมื่อเคลื่อนที่ออกไปอีกเรื่อยๆ นั้น ถ้าลักษณะเป็นเช่นนี้ จะเคลื่อนที่ต่อไปอีกเรื่อยๆ ดังนั้นจะมองเห็นได้ว่าล้อที่เคลื่อนที่ขึ้นไปบนจุด A จะทำให้แรงปฏิกิริยาเพิ่มมากขึ้น และเมื่อล้อที่เคลื่อนที่จากจุด A ผ่านออกไปยังโครงสร้างค่าของแรงปฏิกิริยาจะลดลงไปเรื่อยๆ สำหรับการหาค่าของแรงปฏิกิริยาสูงสุดที่จุด A กระทำได้โดยการทดลองเคลื่อนที่ของล้อไปวางบนจุด A ไปเรื่อยๆ แต่วิธีนี้เป็นวิธีที่ระยะยาวและไกล วิธีที่ง่ายและมีความสะดวกกว่าการคิดวิธีดังกล่าวแล้วนี้สามารถที่จะทำได้ โดยวิธีพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของแรงปฏิกิริยา โดยกำหนดให้มีค่าน้ำหนักกระทำ P กระทำบนคาน AB ห่างจุด B เป็นระยะ y ดังภาพที่ 4.6



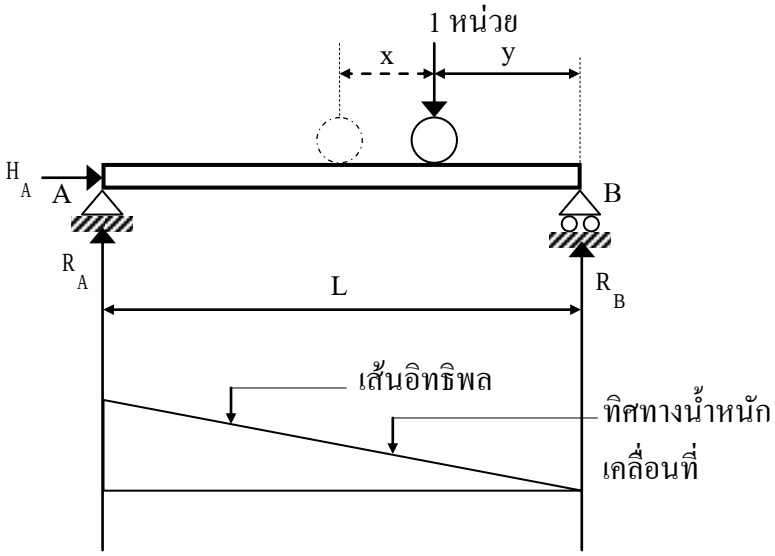
ภาพที่ 4.6 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:225)



ภาพที่ 4.7 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : Elwyn E. Seelye. (1960)



ภาพที่ 4.8 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : Elwyn E. Seelye. (1960)

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P(y)}{L}$ .....(4.1)

เมื่อน้ำหนัก P เคลื่อนที่ต่อไปเท่ากับระยะ y

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P(x+y)}{L}$ .....(4.2)

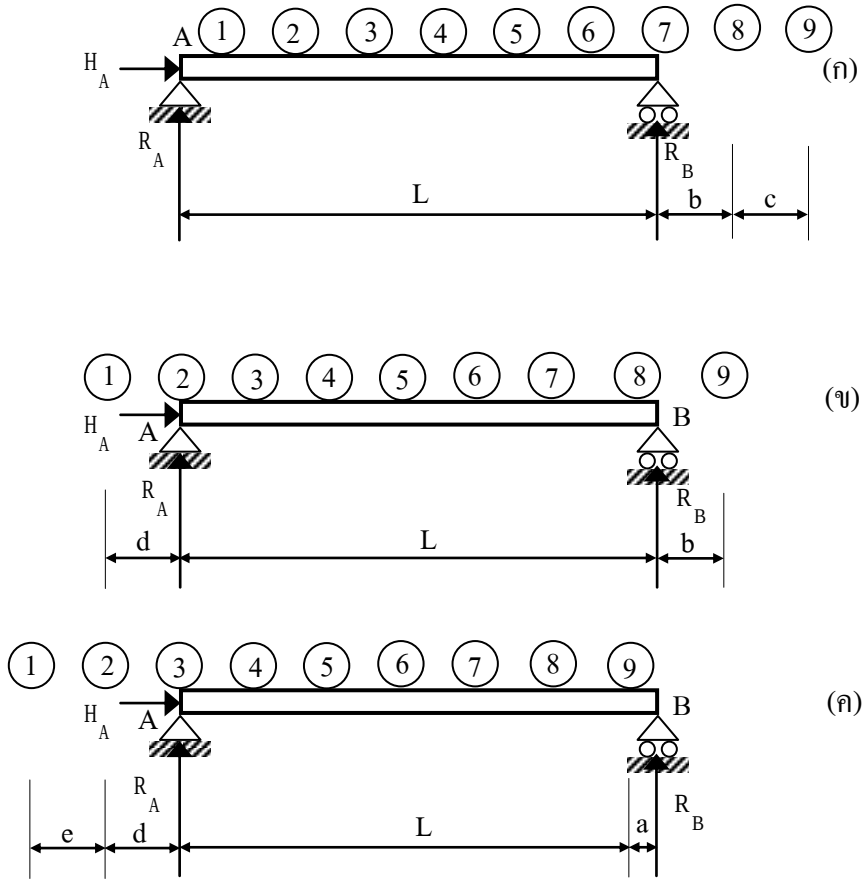
ผลที่เกิดจากการที่น้ำหนัก P เปลี่ยนไปเท่ากับระยะ y

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P(y)}{L}$ .....(4.3)

ตามปกติแล้วจะมีล้อที่เคลื่อนที่ที่อยู่หลายล้อ ฉะนั้นถ้าล้อที่เคลื่อนที่เท่ากับระยะ y

$\therefore$ แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{\sum Px}{L}$ .....(4.4)

การพิจารณาน้ำหนักที่เคลื่อนที่บนโครงสร้าง จาก B ไป A



ภาพที่ 4.9 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร.(2535)

สำหรับการหาค่าแรงปฏิกิริยาของเส้นอิทธิพลสูงสุดที่จุด A จากการที่ล้อเริ่มเคลื่อนที่จาก B ไป A น้ำหนักของล้อที่เคลื่อนที่กรพะทำต่อโครงสร้าง โดยพิจารณาจากล้อที่กระทำต่อโครงสร้าง โดยจะต้องพิจารณาจากล้อที่เคลื่อนที่ไปอยู่ที่จุด A ทีละล้อชุดที่ (1) จะวางอยู่ที่จุด A พอดี ผู้จัดทำก็สามารถที่จะหาแรงปฏิกิริยาของเส้นอิทธิพล นอกจากนั้นจากภาพที่ (3), (2) และภาพที่ (3) ผู้จัดทำ

และหาแรงปฏิกิริยาของเส้นอิทธิพลของโครงสร้างได้เหมือนกัน จากการเคลื่อนที่ของล้อต่างๆ นี้ เมื่อล้อที่ 1 ออกจากโครงสร้างไปทำให้แรงปฏิกิริยาลดค่าลงแต่ในเวลาเดียวกันล้อที่ 2 ก็จะเลื่อนขึ้นมาวางอยู่บนจุด A และล้อที่ 7 ก็จะเลื่อนขึ้นมาอยู่บนโครงสร้างซึ่งจะทำให้ค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุด A เพิ่มขึ้น แต่ถ้ามีล้ออื่นเข้ามาในโครงสร้างอีกก็จะทำให้แรงปฏิกิริยาที่จุด A เพิ่มขึ้นเช่นกัน จากการที่มีแรงปฏิกิริยาเพิ่มหรือลดลงนี้ เราก็สามารถที่จะหาอัตราการเปลี่ยนแปลงแรงปฏิกิริยาได้ ถ้าการเปลี่ยนแปลงแรงปฏิกิริยาเปลี่ยนแปลงไปในทางที่เพิ่มจะต้องเคลื่อนล้อต่อไปอีกเรื่อยๆ จนกว่าค่าของแรงปฏิกิริยาจะเปลี่ยนแปลงไปในทางลด ดังนั้นตำแหน่งที่แรงปฏิกิริยาจะมากที่สุดคือช่วงก่อนที่จะมีการเปลี่ยนแปลงแรงปฏิกิริยาจะลด ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้น ดังนี้

$$\therefore \quad \Delta R = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1 \qquad \text{.....(4.5)}$$

ในเมื่อ

ΔR = การเปลี่ยนแปลงของแรงปฏิกิริยาเนื่องจากการเคลื่อนของน้ำหนักจากตำแหน่งหนึ่งไปอีกตำแหน่งหนึ่ง

ΣP = ผลรวมของน้ำหนักบรรทุกๆ ล้อที่อยู่บนโครงสร้าง

y_1 = ระยะที่ล้อ P_1 ห่างจากล้อถัดไป

L = ความยาวของช่วงโครงสร้าง

P_1 = น้ำหนักที่เคลื่อนที่ออกจากโครงสร้าง

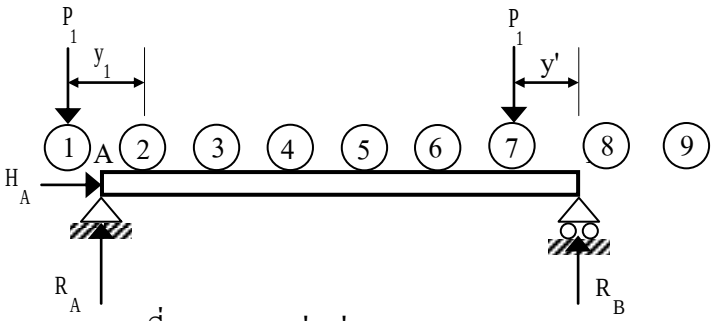
ในกรณีที่มีล้ออื่นเข้ามาในช่วงของโครงสร้างขณะเคลื่อนที่ สมการที่ 4 ก็จะเปลี่ยนเป็นดังนี้

$$\therefore \quad \Delta R = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} + \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1 \qquad \text{.....(4.6)}$$

ในเมื่อ :-

P' = ล้อที่เคลื่อนเข้าในโครงสร้างขณะที่เคลื่อนที่

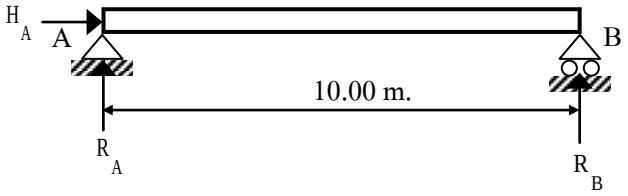
y' = ระยะ P' เคลื่อนเข้ามาในช่วงของโครงสร้าง



ภาพที่ 4.10 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

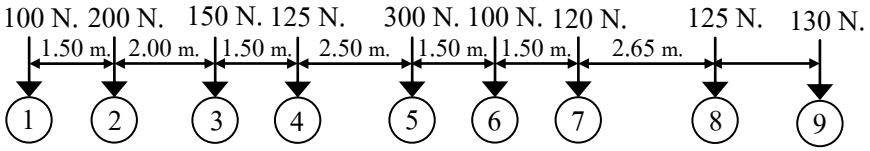
ที่มา : อำนวย พาณิชกุล.(2535)

ตัวอย่างที่ 3 โครงสร้างยาว 10.00 m. มีน้ำหนักรถไฟผ่าน โดยเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง B ไป A จงหาแรงปฏิกิริยามากสุดที่จุด A



ภาพที่ 4.11 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

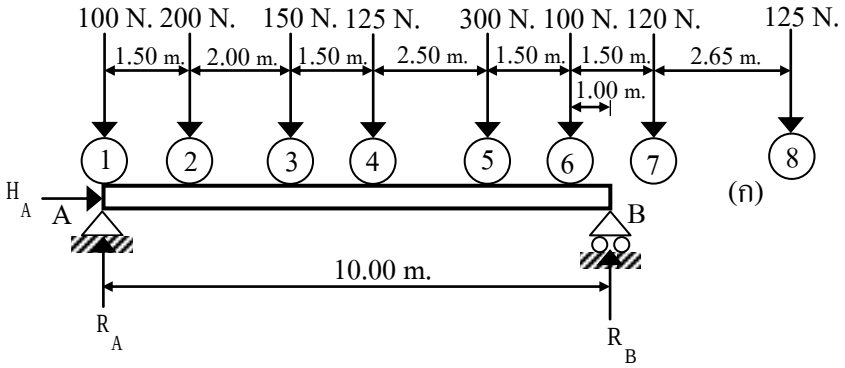
ที่มา : R.C. Hibbeler. (1994)



วิธีทำ

ในการพิจารณาขั้นแรกกำหนดให้ล้อที่ 1 อยู่บนจุด A พอดี

ดังนั้น น้ำหนักที่ล้อกระทำบนโครงสร้างจะมีน้ำหนักกระทำทั้งหมด 6 ล้อ

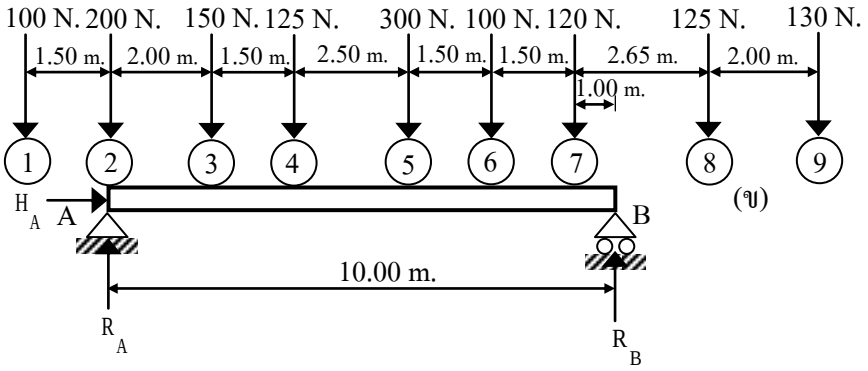


(ก)

ล้อที่ 1 ล้อที่ 6 = 100+200+150+125+300+100 = 975 N.

ระยะที่น้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง เท่ากับ 9.00 m.

1.เมื่อล้อที่ 1 เคลื่อนที่ผ่าน A ไป ล้อที่ 2 เคลื่อนที่อยู่บนจุด A พอดี



(ข)

ล้อที่ 2 ล้อที่ 7 = 200+150+125+300+100+120 = 995 N.

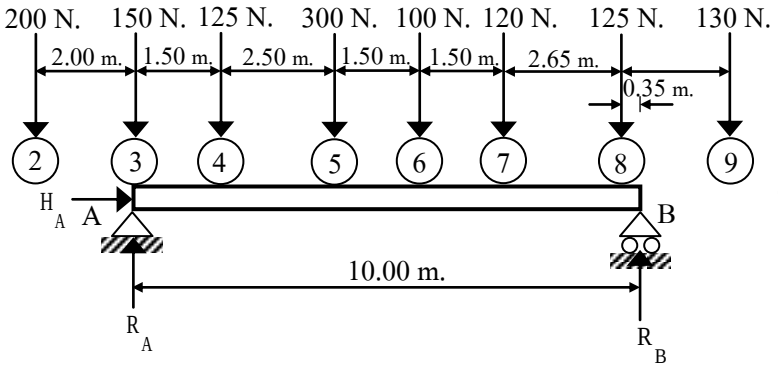
ระยะที่น้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง เท่ากับ 9.00 m.

$$\Delta R = \frac{\sum P(y1)}{L} + \frac{P'(y')}{L} - P_1$$

$$\Delta R = \frac{995\times(1.50)}{10.00} + \frac{120\times(1.00)}{10.00} - 100$$

$$\therefore \quad \Delta R = 61.25 \quad \text{(เพิ่ม)}$$

2. เมื่อล้อที่ 2 เคลื่อนที่ผ่าน A ไป ล้อที่ 3 เคลื่อนที่อยู่บนจุด A พอดี



(ค)

ล้อที่ 2 ล้อที่ 7 = 150+125+300+100+120+125 = 920 N.

ระยะที่น้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง เท่ากับ 9.65 m.

$$\Delta R = \frac{\sum P(y1)}{L} + \frac{P'(y')}{L} - P_1$$

$$\Delta R = \frac{920\times 2.00}{10.00} + \frac{125\times 0.35}{10.00} - 200$$

$$\therefore \quad \Delta R = -11.63 \quad \text{(ลบ)}$$

ดังนั้น หาค่าของแรงปฏิกิริยามากสุดเมื่อล้อที่ 1 อยู่บน A

$$R_{max} = \frac{120\times1.00+100\times2.50+300\times4.00+125\times6.50+150\times8.00+200\times10.00}{10.00}$$

$\therefore \quad R_{max} = 558.25 \text{ N. } (\uparrow^{+})$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A\times(10.00) - 120\times1.00 - 100\times2.50 - 300\times4.00 = 0$$

$$- 125\times6.50 - 150\times8.00 - 200\times10.00$$

$$R_A\times(10.00) - 120 + 250 - 1{,}200 - 812.50 - 1{,}200 - 2{,}000 = 0$$

$$R_A\times10.00 - 5{,}582.50 = 0$$

$$R_A\times10.00 = +5{,}582.50$$

$$R_A = +\frac{5{,}582.50}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +558.25 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B\times(10.00) + 150\times2.00 + 125\times3.50 + 300\times6.00 = 0$$

$$+100\times7.50 + 120\times9.00$$

$$-R_B\times(10.00) + 300 + 437.50 + 1{,}800 + 750 + 1{,}080 = 0$$

$$-R_B\times10.00 + 4{,}367.50 = 0$$

$$-R_B\times6.00 = -4{,}367.50$$

$$-R_B = -\frac{4{,}367.50}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +436.75 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 200 - 150 - 125 - 300 - 100 - 120 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 436.75 N.

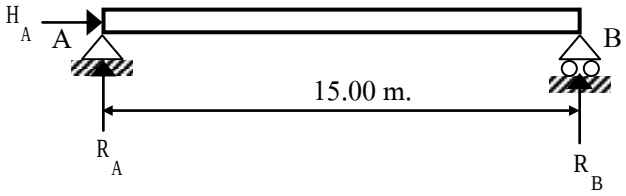
$$R_A + 436.75 - 995 = 0$$

$$R_A - 558.25 = 0$$

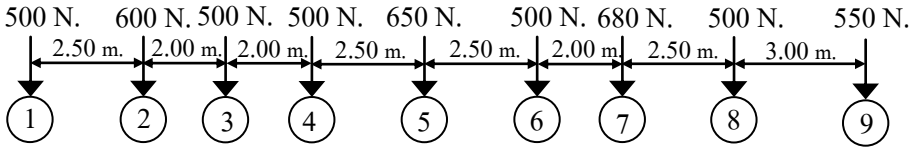
$$\therefore \quad R_A = 558.25 \text{ N. } (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 558.25 N. ($\uparrow^+$) และ R_B เท่ากับ 436.75 N. ($\uparrow^+$) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4 โครงสร้างยาว 15.00 m. มีน้ำหนักบรรทุกผ่าน โดยเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง B ไป A จงหาแรงปฏิกิริยามากสุดที่จุด A ดังภาพที่ 4.12



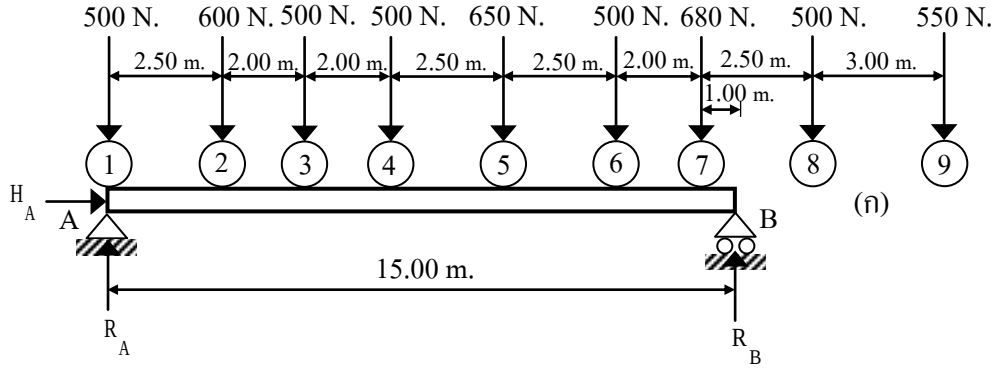
ภาพที่ 4.12 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



วิธีทำ

ในการพิจารณาขั้นแรกกำหนดให้ล้อที่ 1 อยู่บนจุด A พอดี

ดังนั้น น้ำหนักที่ล้อกระทำบนโครงสร้างจะมีน้ำหนักกระทำทั้งหมด 7 ล้อ

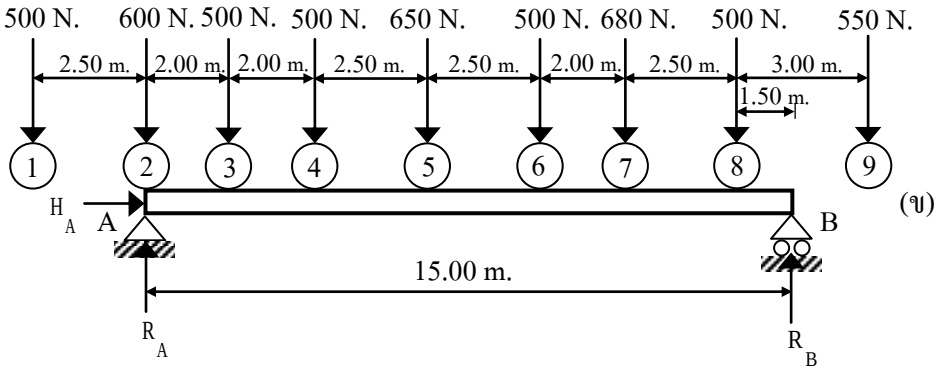


(ก)

นำหนักล้อที่ 1 ล้อที่ 7 วางอยู่บนโครงสร้าง= 500+600+500+500+650+500+680 =3930 N.

ระยะที่น้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง เท่ากับ 14.00 m.

1. เมื่อล้อที่ 1 เคลื่อนที่ผ่าน A ไป ล้อที่ 2 เคลื่อนที่อยู่บนจุด A พอดี



(ข)

ล้อที่ 2 ล้อที่ 7 = 600+500+500+650+500+680+500 = 3,990 N.

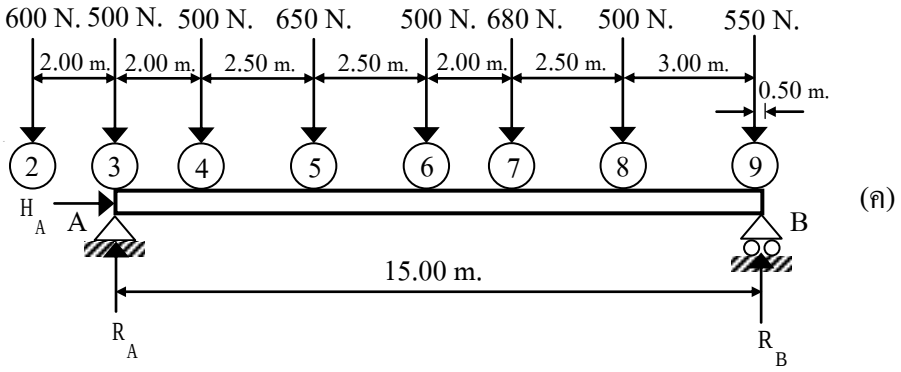
ระยะที่น้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง เท่ากับ 13.50 m.

$$\Delta R = \frac{\sum P(y_1)}{L} + \frac{P'(y')}{L} - P_1$$

$$\Delta R = \frac{3{,}930 \times 2.50}{15.00} + \frac{500 \times (1.50)}{15.00} - 500$$

$$\therefore \quad \Delta R = 205 \quad \text{(เพิ่ม)}$$

2. เมื่อล้อที่ 2 เคลื่อนที่ผ่าน A ไป ล้อที่ 3 เคลื่อนที่อยู่บนจุด A พอดี



(ค)

ล้อที่ 3 ล้อที่ 9 = 500+500+650+500+680+500 = 3,880 N.

ระยะที่น้ำหนักกระทำบนโครงสร้าง เท่ากับ 14.50 m.

$$\Delta R = \frac{\sum P(y1)}{L} + \frac{P'(y')}{L} - P1$$

$$\Delta R = \frac{3{,}880 \times 2.00}{15.00} + \frac{550 \times (0.50)}{15.00} - 600$$

$$\therefore \quad \Delta R = -64.33 \quad \text{(ลบ)}$$

ดังนั้น หาค่าของแรงปฏิกิริยามากสุดเมื่อล้อที่ 2 อยู่บน A

$$R_{max} = \frac{500\times 2.00+500\times 4.00+650\times 6.50+500\times 9.00+680\times 11.00+500\times 13.50}{15.00}$$

$\therefore$ $R_{max} = 2{,}200$ N. $(\uparrow^{+})$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 15.00 - 500\times 1.50 - 680\times 4.00 - 500\times 6.00 = 0$$

$$-650\times 8.50 - 500\times 11.00 - 500\times 13.00 - 600\times 15.00$$

$$R_A \times 15.00 - 750 - 2{,}720 - 3{,}000 - 5{,}525 - 5{,}500 = 0$$

$$-6{,}500 - 9{,}000$$

$$R_A \times 15.00 - 32{,}995 = 0$$

$$R_B \times 15.00 = +32{,}995$$

$$R_A = +\frac{32{,}995}{15.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +2{,}200 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 15.00 + 500\times 2.00 + 500\times 4.00 + 650\times 6.50 = 0$$

$$+500\times 9.00 + 680\times 11.00 + 500\times 13.50$$

$$-R_B \times 15.00 + 1{,}000 + 2{,}000 + 4{,}225 + 4{,}500 = 0$$

$$+7{,}480 + 6{,}750$$

$$-R_B \times 10.00 + 25{,}955 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 = -25{,}955$$

$$-R_B = -\frac{25{,}955}{15.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}730 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 600 - 500 - 500 - 650 - 500 - 680 - 500 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 1,730 N.

$$R_A + 1{,}730 - 3{,}930 = 0$$

$$R_A - 2{,}200 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = 2{,}200 \text{ N. } (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 2,200 N. ($\uparrow^+$) และ R_B เท่ากับ 1,730 N. ($\uparrow^+$) **ตอบ**

4.7 การเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนของคาน

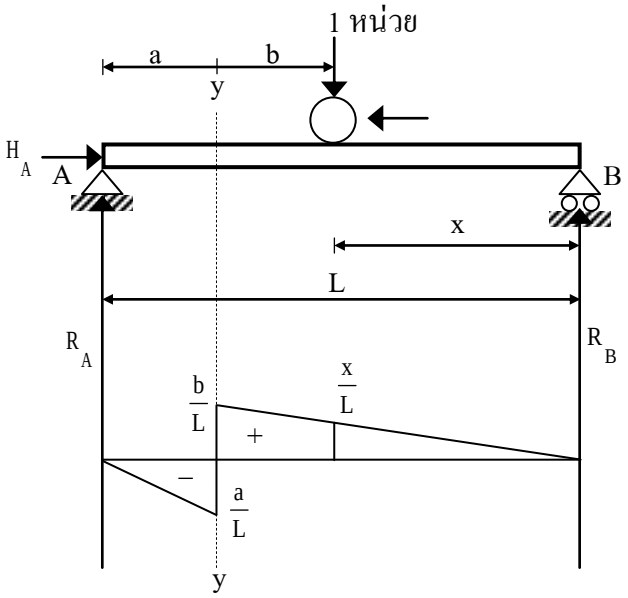
ในกรณีที่มีภาระจรแบบจุดเดียวเพียงภาระเดียว หรือมีหลายภาระจรแบบสม่ำเสมอกระทำบนโครงสร้าง เราสามารถหาค่าตำแหน่งที่ภาระนี้ต้องกระทำเพื่อให้เกิดความเค้นจรสูงสุดได้ทันทีโดยพิจารณาเส้นอิทธิพล แต่ถ้ามีภาระจรที่สลับซับซ้อน เช่น มีภาระจรแบบหลายจุดหลายภาระซึ่งมีขนาดและระยะห่างแตกต่างกัน เช่น ในกรณีของล้อรถไฟ เราไม่สามารถหาตำแหน่งวิกฤตโดยการมองเส้นอิทธิพลเท่านั้น วิธีที่ควรใช้ในกรณีนี้คือ การทดลองคำนวณโดยอาศัยเงื่อนไขซึ่งอยู่กับเส้นอิทธิพลเพื่อลดการคำนวณให้น้อยที่สุด เส้นอิทธิพลที่ต่างชนิดกันย่อมมีเงื่อนไขสำหรับค่าสูงสุดที่ต่างกัน เราจะพิจารณาเงื่อนไขที่ให้ค่าสูงสุดสำหรับเส้นอิทธิพลบางชนิดที่พบได้บ่อยมาก เป็นต้น (นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์,2546:36)

เมื่อแนวคิดของเส้นอิทธิพลเป็นฟังก์ชั่นถูกพิจารณาที่จุดซึ่งอยู่ในโครงสร้างค่ามากที่สุดเกิดจากแรงกระทำแบบจุดที่นำมาใช้ก็คือการคูณค่าสูงสุดของแนวเส้นอิทธิพลด้วยขนาดของแรงที่กระทำต่อโครงสร้างจริง อย่างไรก็ตามแรงกระทำแบบเป็นจุดต่างๆ จะถูกสมมติขึ้นและจัดวางเป็นโครงสร้าง ตัวอย่างเช่น แรงกระทำที่ผ่านมาของล้อรถบรรทุกรถไฟ เพื่อหาค่ามากที่สุดในกรณีต้องทำลองผิดลองถูกเพื่อที่จะหาคำตอบที่ต้องการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกจรที่กระทำต่อโครงสร้าง (Russell Hibbeler.C,1994)

แรงเฉือน (Shear) เป็นแรงที่พยายามเฉือนให้คานพังทลายลงมาแต่สำหรับคานรองรับอย่างง่ายที่มีแนวเส้นอิทธิพลที่สอดคล้องกับแรงเฉือนที่จุด y สามารหาได้เนื่องจากชุดน้ำหนักบรรทุกจรกระทำที่ล้อแบบเป็นจุด ซึ่งเคลื่อนที่จากด้านขวามือไปยังด้านซ้ายมือบนโครงสร้าง (คาน) แรงกระทำวิกฤตจะเกิดขึ้นเมื่อแรงกระทำถูกวางไปทางขวามือของจุด y ซึ่งจะตรงกันกับค่าสูงสุดที่เป็นค่าบวกของแนวเส้นอิทธิพล (บูรฉัตร ฉัตรวีระ,2545:37)

สำหรับการเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนของคานก่อนอื่นต้องทราบก่อนว่า เราจะเขียนเส้นอิทธิพลที่จุดไหนหรือกำหนดรอยตัดที่ตรงไหนของคาน จึงจะหาเส้นอิทธิพลแรงเฉือนของคานได้อย่างถูกต้อง สมมติต้องการเขียนเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนที่รอยตัด y ของคานชนิดต่างๆ เมื่อมีน้ำหนัก 1 หน่วยเคลื่อนที่ไปบนคาน เมื่อมีน้ำหนัก 1 หน่วย เคลื่อนที่ไปบนคาน

ระหว่าง A-B โดยเคลื่อนที่จาก B ไป A เราจะได้เส้นอิทธิพลของแรงเฉือนที่รอยตัด y รายละเอียดดังนี้



ภาพที่ 4.13 คานเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

เมื่อมีน้ำหนัก 1 หน่วยเคลื่อนที่จาก B ไป A ยังไม่ถึงจุดตัด y ค่าแรงเฉือนที่จุด y จะมีค่าเท่ากับค่าแรงปฏิกิริยาที่ A แต่มีค่าเป็นบวก แต่น้ำหนัก 1 หน่วย เคลื่อนที่เลยจุด y จะมีค่าเท่ากับค่าของแรงปฏิกิริยาที่ B และมีค่าเป็นลบ ซึ่งสามารถเขียนเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนที่รอยตัด y ดังภาพที่ 4.13

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าแรงเฉือนสูงสุดที่รอยตัด y-y และเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือน

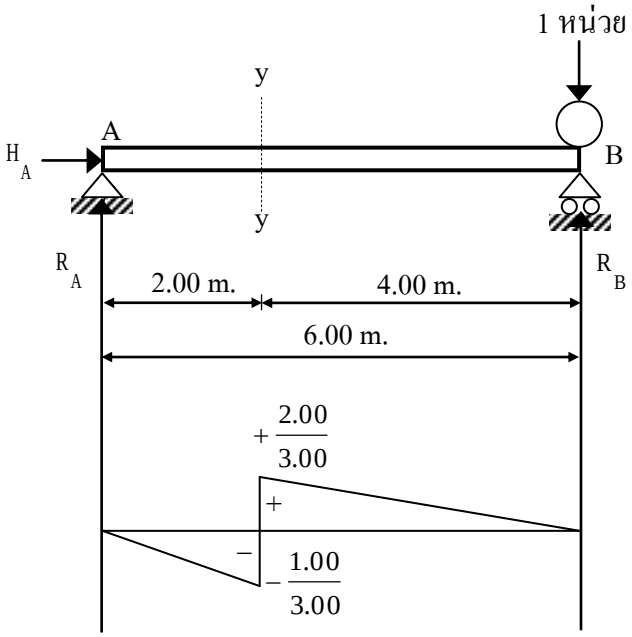
ดังภาพที่ 4.14

ส่วนขั้นตอนในการคำนวณ โดยสมมติให้น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่จาก B ไป A เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย เคลื่อนที่อยู่ทางขวามือของจุด y คืออยู่ระหว่าง B ไป y แรงเฉือนระหว่าง Ay จะคงที่มีค่าเท่ากับ R_A

ดังนั้นจึงพอสรุปได้ว่าเมื่อ น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ระหว่าง y ไป B เส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนที่จุด y จะเท่ากับเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับที่จุด A นั้นเอง และจะมีค่าระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. เท่ากับ $\frac{1.00 \times 4.00}{6.00} = \frac{2.00}{3.00}$

และเมื่อ 1 น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่เลยจุด y ออกไป ซึ่งอยู่ระหว่าง A ไป y เส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนที่จุด y จะเท่ากับเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B และ

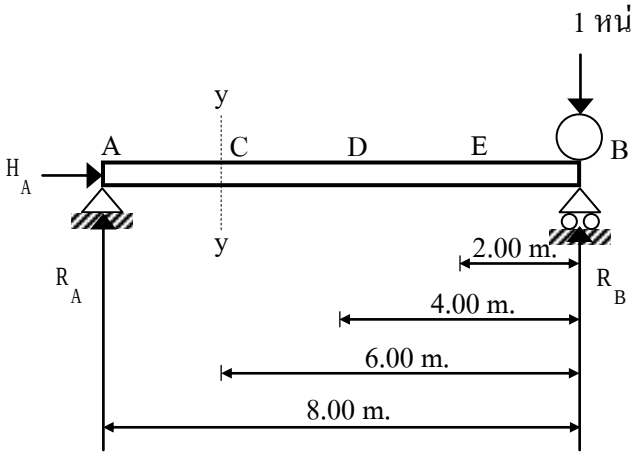
มีค่า ระยะตั้งฉากกับแกนกับออร์ดิเนท (Ordinate) ของ I.L. เท่ากับ $\frac{1.00\times 2.00}{6.00}=\frac{1.00}{3.00}$ และมีเครื่องหมาย เป็นลบ (–) รายละเอียด ดังภาพที่ 4.14



ภาพที่ 4.14 คานใช้สำหรับเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

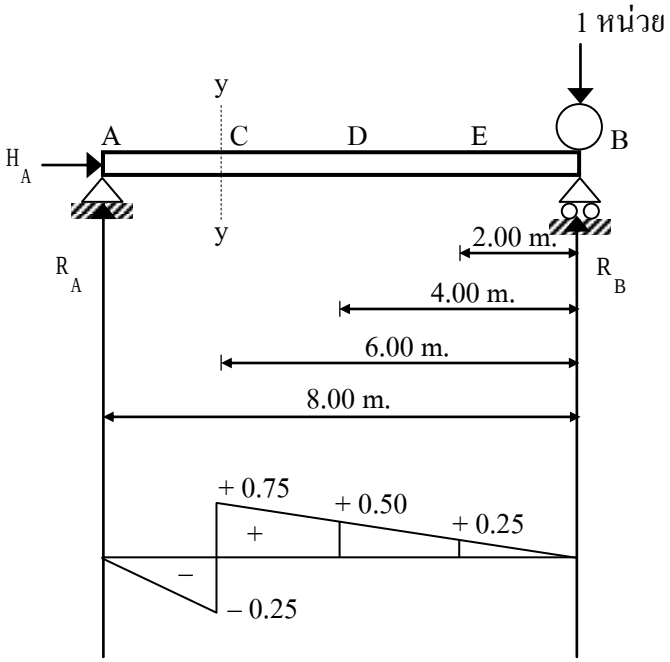
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าแรงเฉือนสูงสุดที่จุด A B C D E และเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y ดังภาพที่ 4.15



ภาพที่ 4.15 คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



(ก)

วิธีทำ

หน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A รายละเอียด ดังนี้

แรงเฉือนสูงสุด $B^{+} = \frac{1.00 \times 0}{8.00} = 0$

แรงเฉือนสูงสุด $E^{+} = \frac{2.00 \times 1}{8.00} = +0.25$

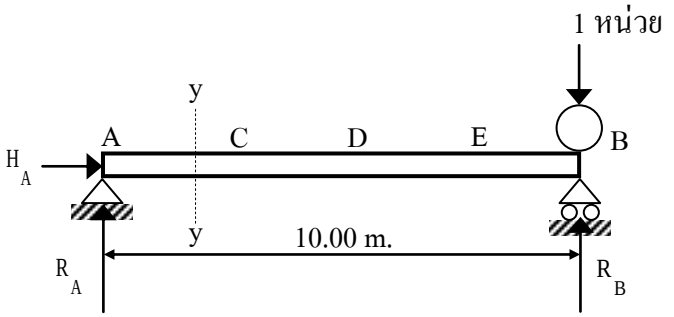
แรงเฉือนสูงสุด $D^{+} = \frac{4.00 \times 1}{8.00} = +0.50$

แรงเฉือนสูงสุด $C^{+} = \frac{6.00 \times 1}{8.00} = +0.75$

แรงเฉือนสูงสุด $C^{-} = \frac{2.00 \times 1}{8.00} = -0.25$

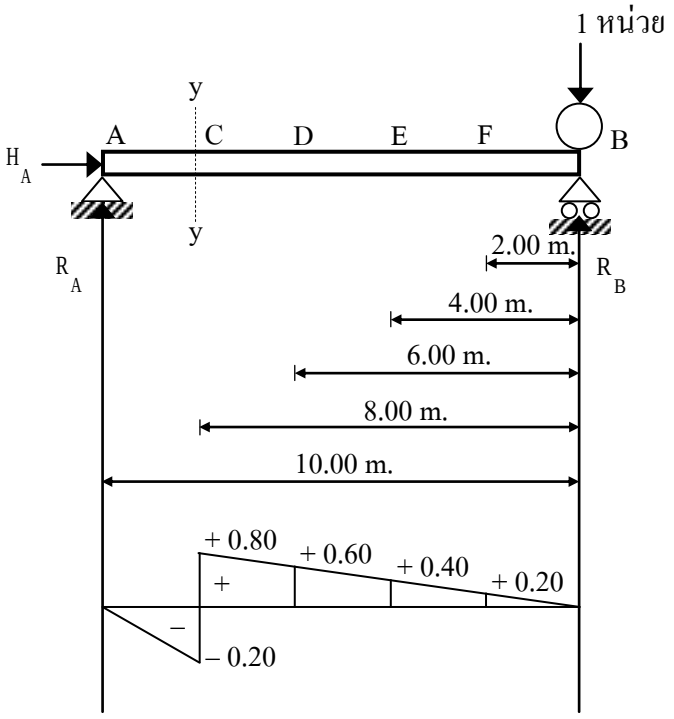
แรงเฉือนสูงสุด $A^{-} \quad \frac{1.00 \times 0}{8.00} = 0$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าแรงเฉือนสูงสุดที่จุด A B C D E F และเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y ดังภาพที่ 4.16



ภาพที่ 4.16 คานอย่างง่ายเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



วิธีทำ

หน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A รายละเอียด ดังนี้

แรงเฉือนสูงสุด $B^{+} = \frac{1.00 \times 0}{10.00} = 0$

แรงเฉือนสูงสุด $F^{+} = \frac{2.00 \times 1}{10.00} = +0.20$

แรงเฉือนสูงสุด $E^{+} = \frac{4.00 \times 1}{10.00} = +0.40$

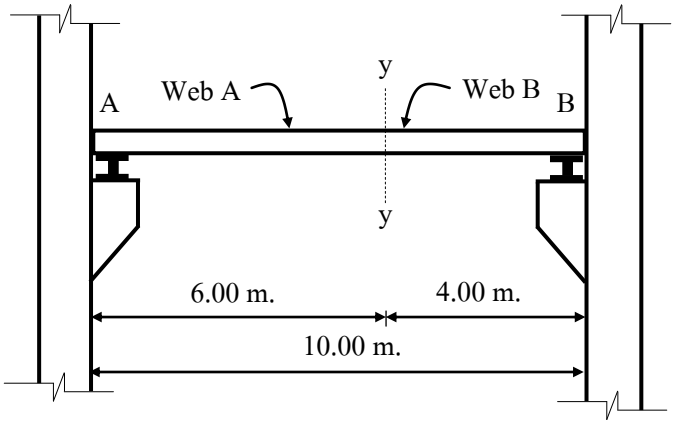
แรงเฉือนสูงสุด $D^{+} = \frac{6.00 \times 1}{10.00} = +0.60$

แรงเฉือนสูงสุด $C^{+} = \frac{8.00 \times 1}{10.00} = +0.80$

แรงเฉือนสูงสุด $C^{-} = \frac{2.00 \times 1}{10.00} = -0.20$

แรงเฉือนสูงสุด $A^{-} \quad \frac{2.00 \times 1}{10.00} = 0$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าแรงปฏิกิริยาที่ R_A เฉือนสูงสุด โมเมนต์สูงสุดที่จุด y และเขียนเส้นอิทธิพล สำหรับค่าแรงเฉือนระหว่าง Web A และWeb B ของโครงสร้างดังแสดงในภาพที่ 4.17

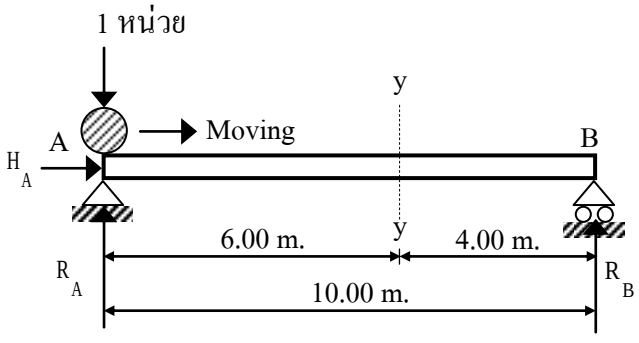


ภาพที่ 4.17 คานของเครนเพื่อหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

สำหรับเส้นอิทธิพล (Influence Line) ของแรงปฏิกิริยาที่ R_A

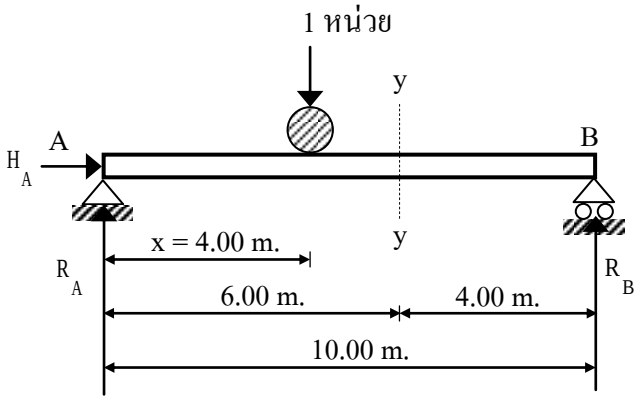
เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด A : $R_A = 1$



(ก)

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด Web : $R_A = 0.6$

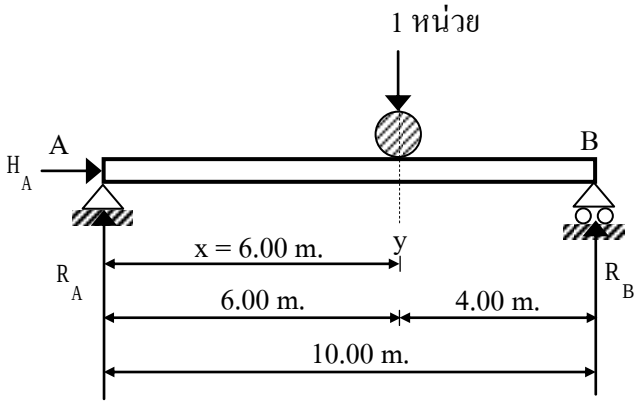
ระยะเคลื่อนที่เท่ากับ 4.00 m. จากจุด A



(ข)

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด Web : $R_A = 0.4$

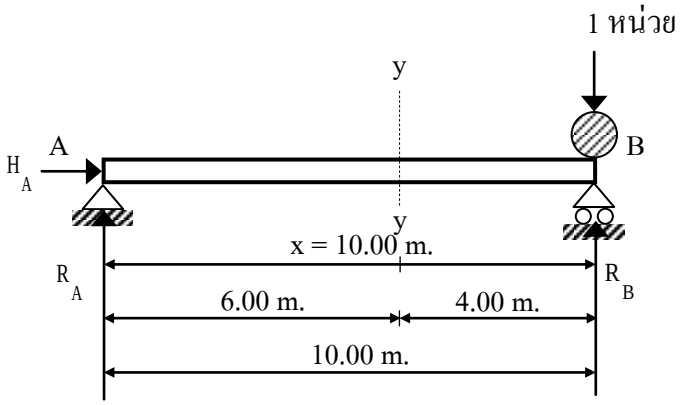
ระยะเคลื่อนที่เท่ากับ 6.00 m. จากจุด A



(ค)

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด B : $R_A = 0.0$

ระยะเคลื่อนที่เท่ากับ 10.00 m. จากจุด A

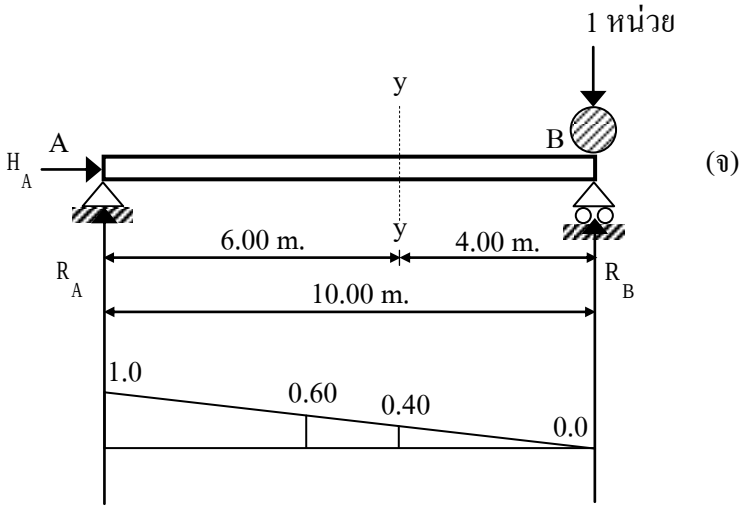


(ง)

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด B : $R_A = 0.0$

ระยะเคลื่อนที่เท่ากับ 10.00 m. จากจุด A

ต่อจากนั้นนำค่า R_A มาเขียนกราฟของเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยาที่จุด A



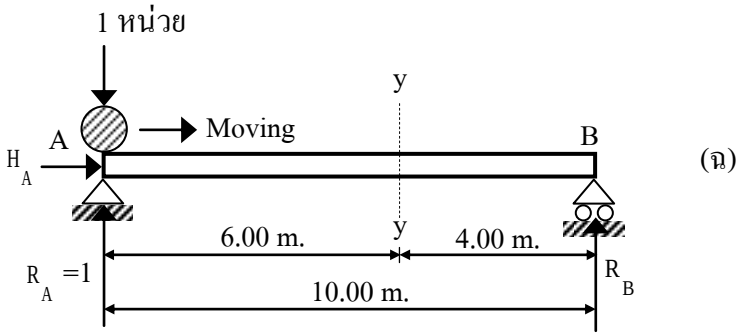
(จ)

สำหรับเส้นอิทธิพล (Influence Line) ของแรงปฏิกิริยาที่ R_A

สำหรับเส้นอิทธิพล (Influence Line) ของแรงเฉือนที่จุด y, V_y

สำหรับเส้นอิทธิพล (Influence Line) ของแรงปฏิกิริยาที่ R_A

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด A



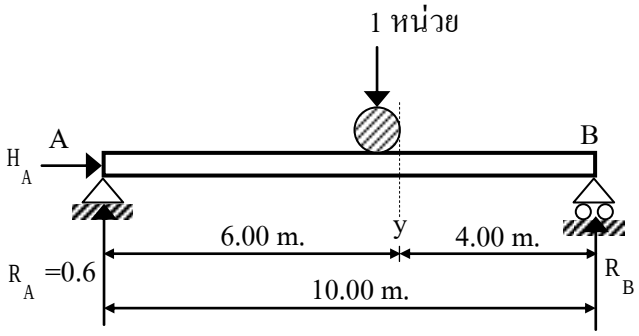
(ฉ)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$V_y + 1 - 1 = 0$$

ดังนั้น $V_y = 0$

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด y (อยู่ทางซ้ายของจุด y เล็กน้อย)



(ช)

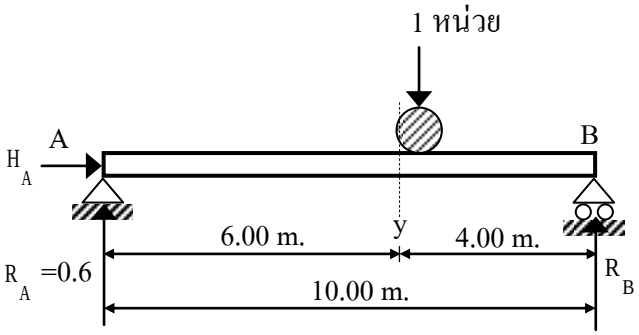
$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$V_y + 0.6 - 1 = 0$$

$$V_y - 0.4 = 0$$

ดังนั้น $V_y = +0.4$

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด y (อยู่ทางขวาของจุด y เล็กน้อย)



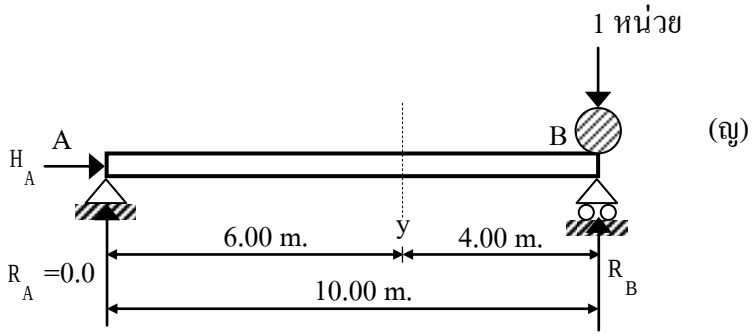
(ช)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$V_y + 0.6 = 0$$

ดังนั้น $V_y = -0.6$

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ที่จุด B



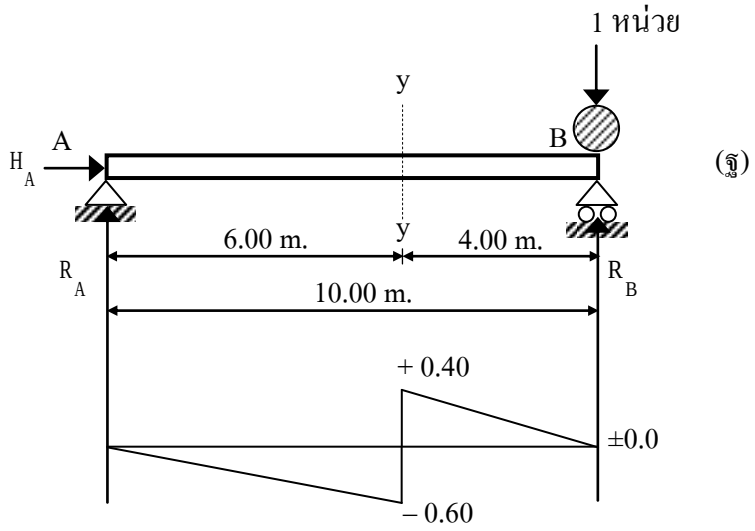
(ญ)

$$\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$V_y + 0 = 0$$

ดังนั้น $V_y = 0$

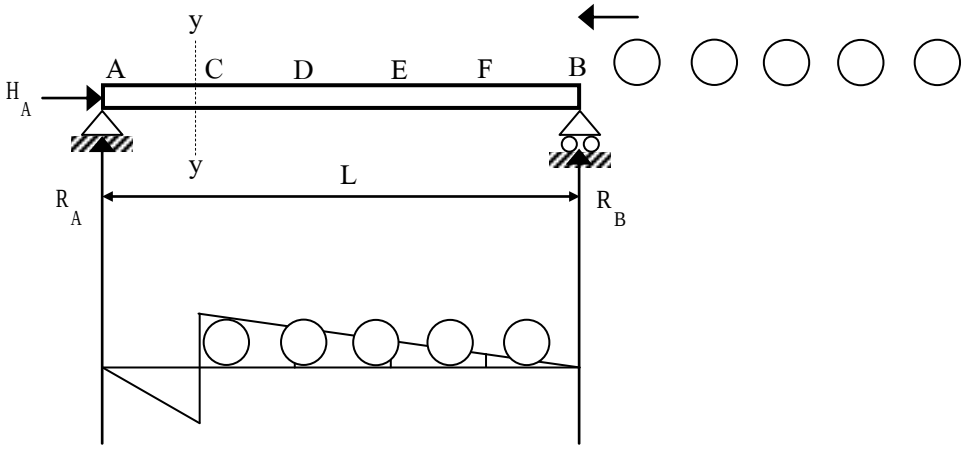
ต่อจากนั้นนำค่า V_y มาเขียนกราฟก็จะได้ค่าของเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนที่จุด C



(ฐ)

4.8 การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือน

ในการหาแรงเฉือนเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ ณ จุดใดจุดหนึ่งของโครงสร้างที่กำลังพิจารณานั้นๆ ก่อนอื่นจะต้องทราบเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนที่รอยตัดของโครงสร้าง สมมติต้องการหาเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนที่รอยตัด y - y ของคาน AB โดยกำหนดให้น้ำหนักบรรทุกจรเคลื่อนที่จาก B ไป A ดังภาพที่ 4.18



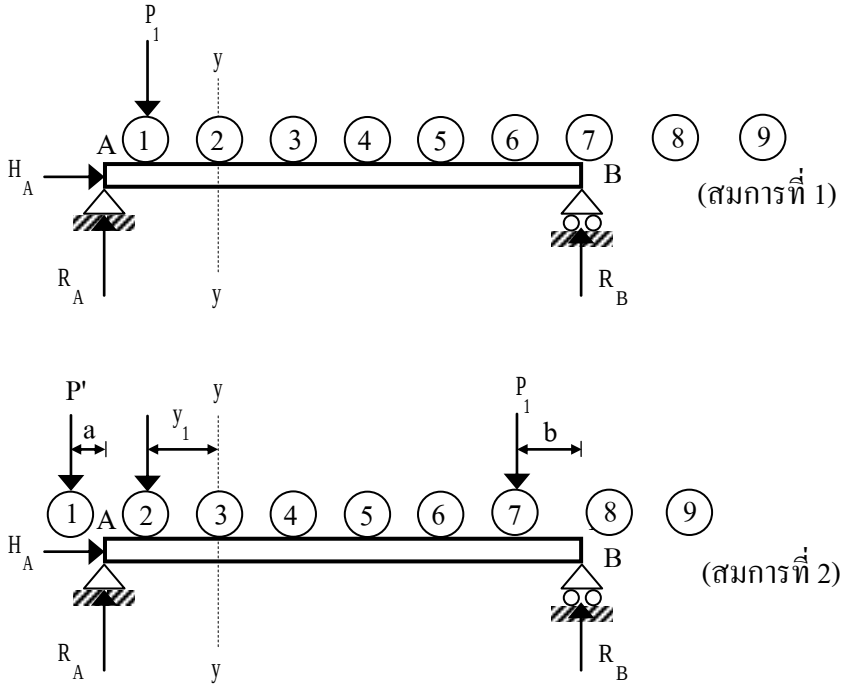
ภาพที่ 4.18 เส้นอิทธิพลจากน้ำหนักเคลื่อนที่ของแรงเฉือน
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

เมื่อน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A ค่าของแรงเฉือนเป็นค่าของแรงปฏิกิริยาที่จุด A ซึ่งจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนกระทั่งล้อที่ 1 มาอยู่ที่รอยตัด y-y เมื่อล้อที่ 1 เคลื่อนที่เลยรอยตัด y-y ไปแรงเฉือนที่รอยตัด y-y ก็จะลดลงเท่ากับน้ำหนักล้อที่ 1 กำลังเคลื่อนที่ออกไปจากรอยตัด y-y นั้น ล้อที่ 2 กำลังเคลื่อนที่เข้ามาที่รอยตัด y-y เช่นเดียวกัน ดังนั้นแรงเฉือนก็จะค่อยๆ เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนกระทั่งล้อที่ 2 มาอยู่ที่รอยตัด y-y ลักษณะของแรงเฉือนที่รอยตัด y-y จะเป็นเช่นนี้เรื่อยๆ ไป ตามจังหวะของล้อที่เคลื่อนที่ขึ้นมาบนโครงสร้าง ในขณะที่น้ำหนักเคลื่อนที่ แรงเฉือนที่รอยตัด y-y จะมีทั้งที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง แต่ถ้าการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนที่รอยตัด y-y เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ก็แสดงว่าแรงเฉือนยังไม่สูงสุด

ในขณะเดียวกันถ้าเราเคลื่อนที่น้ำหนักต่อไปเรื่อยๆ แล้วทำให้การเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนที่รอยตัด y-y ลดลง ก็แสดงว่าตำแหน่งของล้อที่อยู่ในรอยตัด y-y ก่อนที่จะทำให้แรงเฉือนลดลง จะเป็นตำแหน่งที่แรงเฉือนสูงสุด ซึ่งสามารถเขียนสมการเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนได้ ดังนี้

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\sum P(y_1)}{L} + \frac{P'(y')}{L} - P_1 \quad \text{.....(4.7)}$$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\sum P(y_1)}{L} - P_1 - \frac{P'(a)}{L} + \frac{Z(b)}{L} \quad \text{.....(4.8)}$$



ภาพที่ 4.19 คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูร.(2530).

ΔV = การเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่เปลี่ยนตำแหน่ง

ΣP = ผลรวมของน้ำหนักบรรทุกๆ ล้อที่อยู่บนโครงสร้าง

P_1 = น้ำหนักเคลื่อนที่ออกไปจากรอยตัด y-y

P' = น้ำหนักเคลื่อนที่ออกไปจากโครงสร้าง

Z = น้ำหนักเคลื่อนที่เข้ามาในช่วงของโครงสร้างขณะที่เคลื่อนที่

a = ระยะ P' เคลื่อนที่ออกไปจากโครงสร้าง

y_1 = ระยะที่ล้อ P_1 อยู่ห่างจากรอยตัด y-y

b = ระยะที่ Z เคลื่อนที่เข้ามาในช่วงของโครงสร้าง

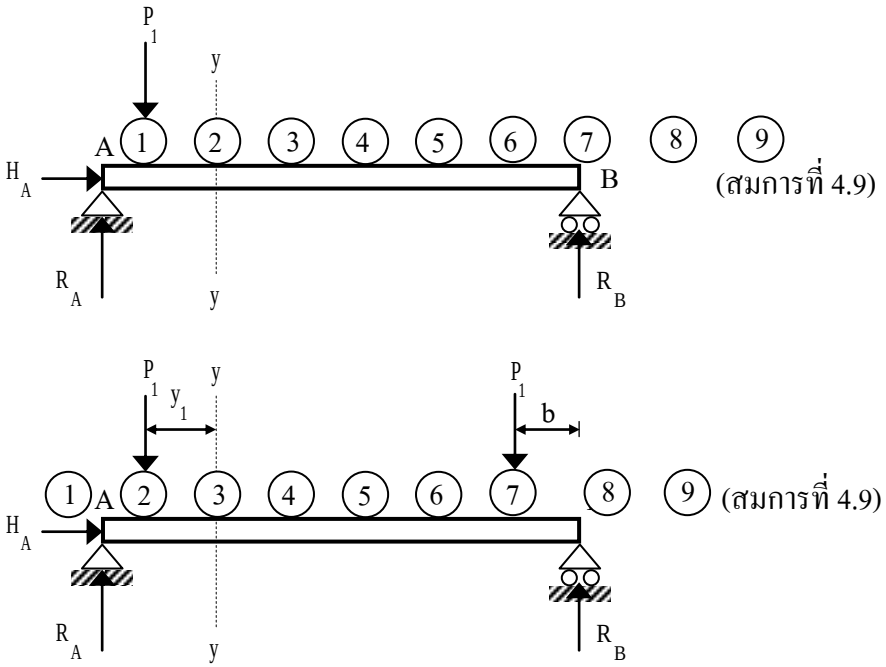
หมายเหตุ

1) เมื่อมีน้ำหนักเข้ามาในโครงสร้างขณะที่เคลื่อนที่ใช้สมการที่ (4.7)

2) เมื่อน้ำหนัก Z เข้ามาในโครงสร้างและน้ำหนัก P' ออกไปจากโครงสร้างขณะเคลื่อนที่ใช้สมการ (2)

3) เมื่อมีน้ำหนัก Z เข้ามาในช่วงโครงสร้างขณะเคลื่อนที่แต่ไม่มีน้ำหนักล้อหนึ่งล้อใดเคลื่อนออกไปจากโครงสร้างให้ใช้สมการ รายละเอียด ดังนี้

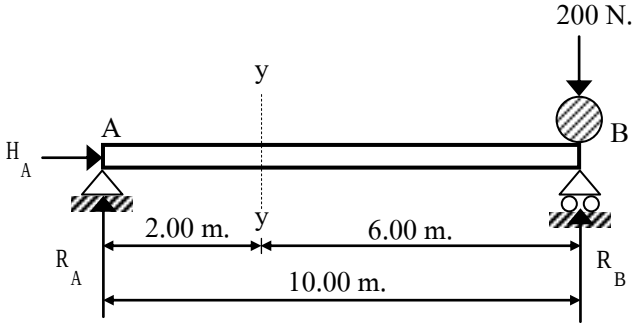
$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\sum P(y_1)}{L} - P_1 + \frac{P'(y')}{L} \text{ .....(4.9)}$$



ภาพที่ 4.20 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ตัวอย่างที่ 8 จงหาเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y-y ดังภาพที่ 4.21

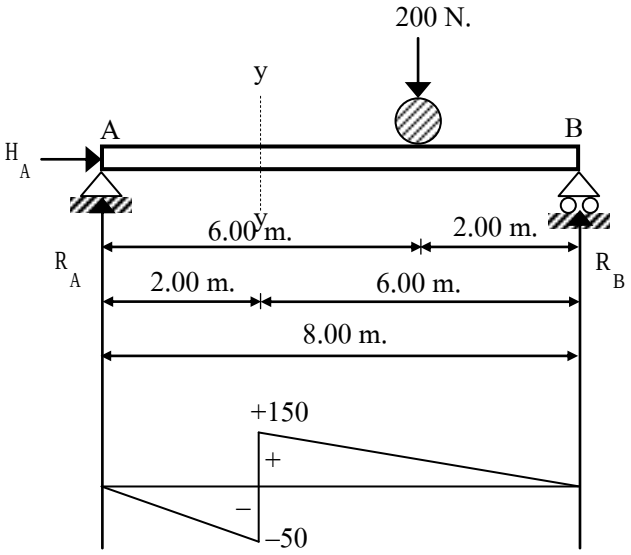


ภาพที่ 4.21 คานอย่างง่ายเพื่อเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

เขียน Free Body Diagram ของเส้นอิทธิพล (I.L.)



(ก)

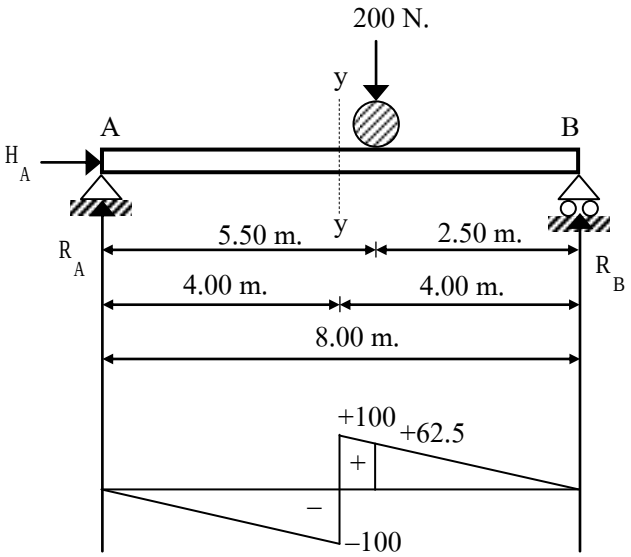
หน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A ที่ระยะ 2.00 m.

แรงเฉือน $+V_y = \frac{b}{L} = +\frac{6.00\times 200}{8.00} = +150$ N.

แรงเฉือน $-V_y = \frac{a}{L} = -\frac{2.00\times 200}{8.00} = -50$ N.

แรงเฉือน $\therefore V_x = \frac{a}{L} = +\frac{2.00\times 200}{8.00} = -50$ N.

เขียน Free Body Diagram ของเส้นอิทธิพล (I.L.)



(ข)

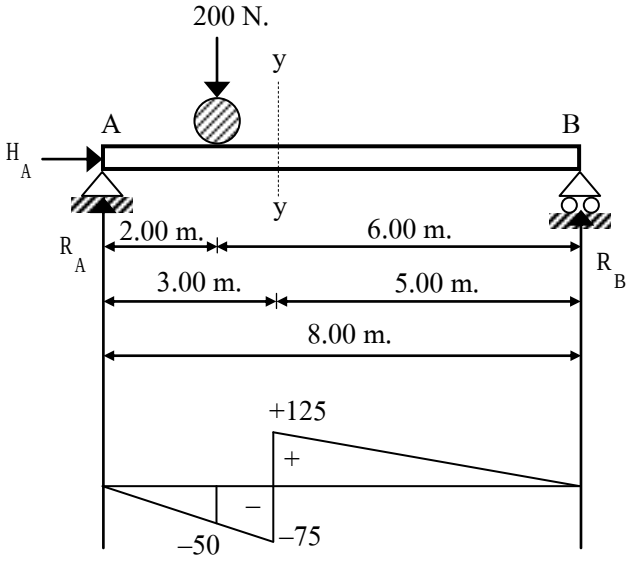
หน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A ที่ระยะ 2.50 m.

แรงเฉือน $+V_y = \frac{b}{L} = +\frac{4.00\times 200}{8.00} = +100$ N.

แรงเฉือน $-V_y = \frac{a}{L} = -\frac{4.00\times 200}{8.00} = -100$ N.

แรงเฉือน $\therefore V_x = \frac{x}{L} = +\frac{2.50\times 200}{8.00} = -62.5$ N.

เขียน Free Body Diagram ของเส้นอิทธิพล (I.L.)



(ค)

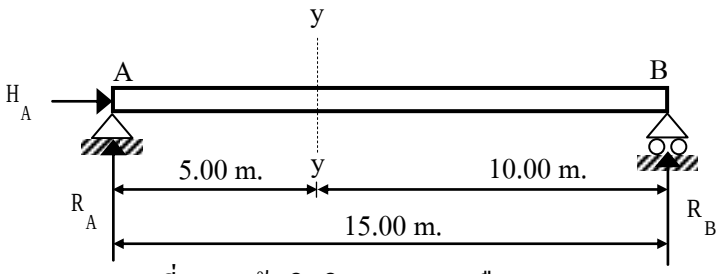
หน่วยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A ที่ระยะ 6.00 m.

แรงเฉือน $+V_y = \frac{b}{L} = +\frac{5.00\times 200}{8.00} = +125$ N.

แรงเฉือน $-V_y = \frac{a}{L} = -\frac{3.00\times 200}{8.00} = -75$ N.

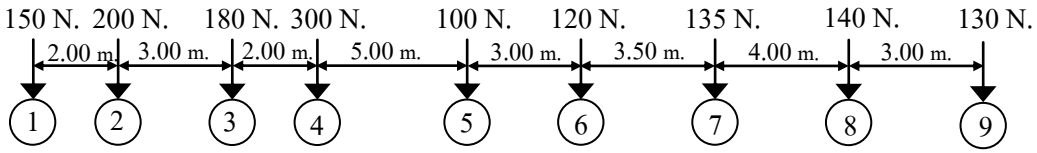
แรงเฉือน $\therefore V_x = \frac{x}{L} = +\frac{2.00\times 200}{8.00} = -50$ N.

ตัวอย่างที่ 9 จากภาพที่ 4.6 คาน AB ยาว 15.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จงหาแรงเฉือนมากที่สุด ที่รอยตัดห่างจาก A เป็นระยะ 5.00 m. ดังภาพที่ 4.22



ภาพที่ 4.22 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

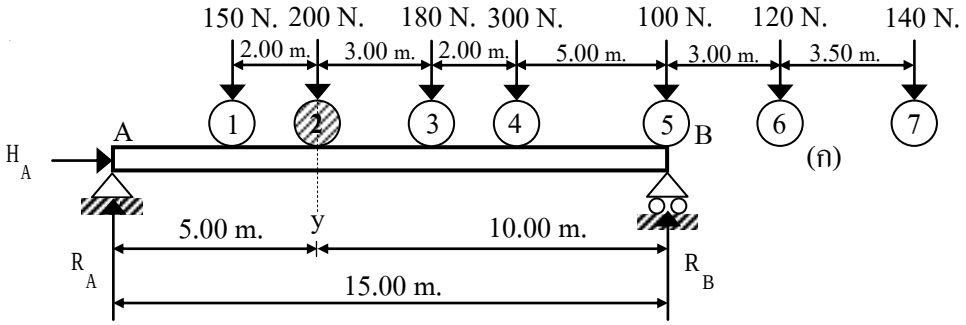
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



วิธีทำ

เมื่อพิจารณาล้อที่ 1 อยู่ที่รอยตัด y-y จะทำให้เกิดแรงเฉือนมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ A

1) เมื่อล้อที่ 2 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ 930 N.

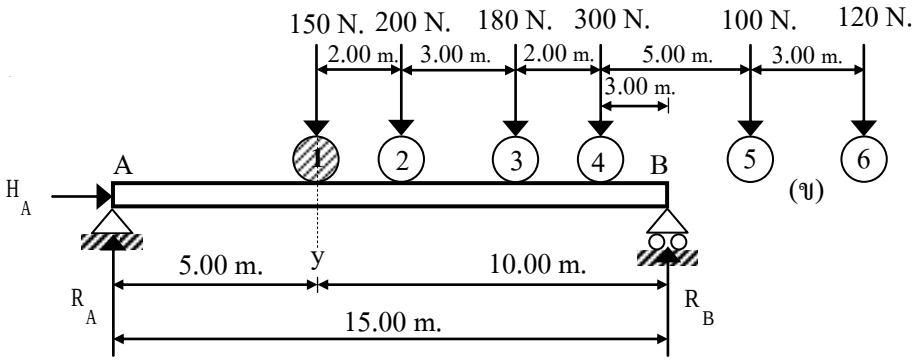


$$\Delta R = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1$$

$$\Delta R = \frac{930 \times 2.00}{15.00} - 150$$

$$\therefore \quad \Delta R = -26 \quad (\text{ลด})$$

ดังนั้น หาค่าของแรงปฏิกิริยามากสุดเมื่อล้อที่ 2 อยู่บน y–y



$$\Delta R = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1$$

$$\Delta R = \frac{930 \times 2.00}{15.00} - 150$$

$$\therefore \Delta R = -26 \text{ (ลด)}$$

ดังนั้น หาค่าของแรงปฏิกิริยามากสุดเมื่อล้อที่ 2 อยู่บน y–y

$$Rmax = \frac{300 \times 3.00 + 180 \times 5.00 + 200 \times 8.00 + 150 \times 10.00}{15.00}$$

$$= \frac{4{,}900}{15.00}$$

$$\therefore Rmax = +326.67 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 15.00 - 300 \times 3.00 - 180 \times 5.00 - 200 \times 8.00 = 0$$

$$- 150 \times 10.00$$

$$R_A \times 15.00 - 900 - 900 - 1{,}600 - 1{,}500 = 0$$

$$R_A \times 15.00 - 4{,}900 = 0$$

$$R_B \times 15.00 = +4{,}900$$

$$R_A = +\frac{4{,}900}{15.00}$$

$$\therefore R_A = +326.67 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 15.00 + 150\times 5.00 + 200\times 7.00 + 180\times 10.00 + 300\times 12.00 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 + 750 + 1{,}400 + 1{,}800 + 3{,}600 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 + 7{,}550 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 = -7{,}550$$

$$-R_B = -\frac{7{,}550}{15.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +503.33 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 150 - 200 - 180 - 300 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 503.33 N.

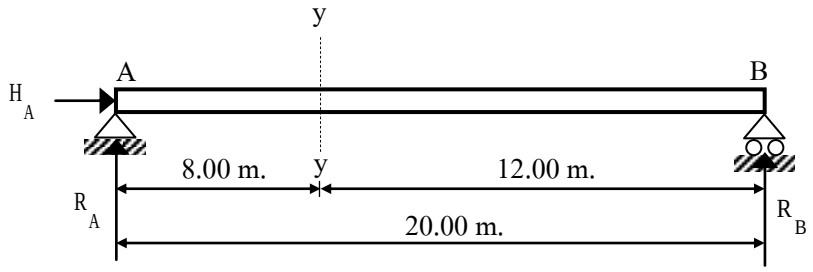
$$R_A + 503.33 - 830 = 0$$

$$R_A - 326.67 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +326.67 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

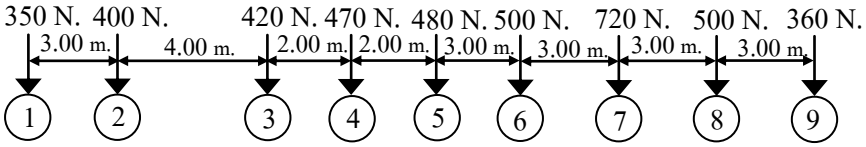
ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 326.67 N. ($\uparrow^{+}$) และ R_B เท่ากับ 503.33 N. ($\uparrow^{+}$) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 10 คาน AB ยาว 20.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จงหาแรงเฉือนมากที่สุด ที่รอยตัดห่างจาก A เป็นระยะ 8.00 m. ดังภาพที่ 4.23



ภาพที่ 4.23 คานอย่างง่ายสำหรับเส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูร.(2530).



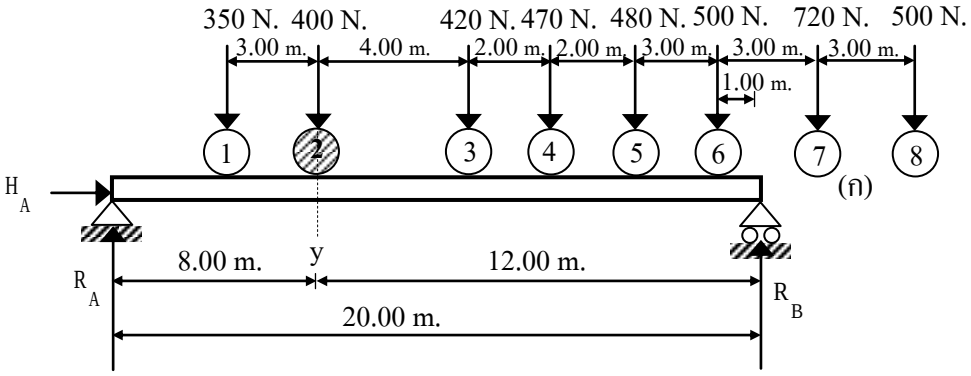
วิธีทำ

เมื่อพิจารณาล้อที่ 1 อยู่ที่รอยตัด y-y จะทำให้เกิดแรงเฉือนมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ A

1) เมื่อล้อที่ 2 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ 2,620 N.

เมื่อพิจารณาล้อที่ 1 อยู่ที่รอยตัด y-y จะทำให้เกิดแรงเฉือนมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ A

2) เมื่อล้อที่ 2 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ 2,620 N.



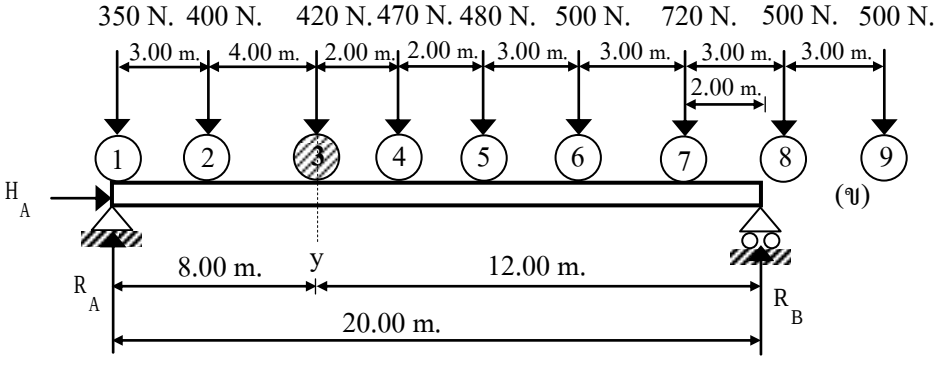
$$\Delta R = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1 + \frac{Z b}{L}$$

$$\Delta R = \frac{2{,}620 \times 3.00}{20.00} - 350 + \frac{500 \times 1.00}{20.00}$$

$$\therefore \quad \Delta R = +68 \quad \text{(เพิ่ม)}$$

เมื่อพิจารณาล้อที่ 1 อยู่ที่รอยตัด y-y จะทำให้เกิดแรงเฉือนมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ A

3) เมื่อล้อที่ 3 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ 3,340 N.



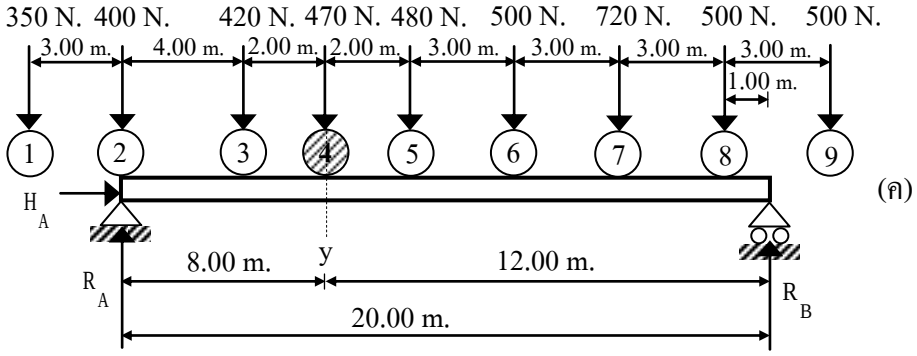
$$\Delta R = \frac{\sum P(y_1)}{L} - p_1 + \frac{Z b}{L}$$

$$\Delta R = \frac{3{,}340 \times 4.00}{20.00} - 400 + \frac{720 \times 2.00}{20.00}$$

$$\therefore \quad \Delta R = +340 \quad \text{(เพิ่ม)}$$

เมื่อพิจารณาล้อที่ 1 อยู่ที่รอยตัด y-y จะทำให้เกิดแรงเฉือนมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่ A

3) เมื่อล้อที่ 4 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ 3,490 N.



(ค)

$$\Delta R = \frac{\sum P(y_1)}{L} - p_1 + \frac{Z b}{L}$$

$$\Delta R = \frac{3{,}490 \times 2.00}{20.00} - 420 + \frac{500 \times 1.00}{20.00}$$

$$\therefore \quad \Delta R = -96 \quad \text{(เพิ่ม)}$$

ดังนั้น หาค่าของแรงปฏิกิริยามากสุดเมื่อล้อที่ 4 อยู่บน y–y

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 20.00 - 350 \times 19.00 - 400 \times 16.00 - 420 \times 12.00 = 0$$

$$- 500 \times 5.00 - 720 \times 2.00$$

$$R_A \times 15.00 - 6{,}650 - 6{,}400 - 1{,}600 - 5{,}040 - 2{,}500 - 1{,}440 = 0$$

$$R_A \times 20.00 - 30{,}570 = 0$$

$$R_B \times 20.00 = +30{,}570$$

$$R_A = +\frac{30{,}570}{20.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}528.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 20.00 + 400\times4.00 + 420\times8.00 + 470\times10.00 = 0$$

$$+480\times12.00 + 500\times15.00 + 720\times18.00 + 350\times1.00$$

$$- R_B \times 15.00 + 1{,}600 + 3{,}360 + 4{,}700 + 5{,}760 + 7{,}500 = 0$$

$$+12{,}960 + 350$$

$$- R_B \times 20.00 - 36{,}230 = 0$$

$$- R_B \times 20.00 = -36{,}230$$

$$- R_B = -\frac{36{,}230}{20.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}811.50 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 350 - 400 - 420 - 470 - 480 - 500 - 720 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 1,811.50 N.

$$R_A + 1{,}811.50 - 3{,}340 = 0$$

$$R_A - 1{,}528.50 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}528.50 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 1,528.50 N. ($\uparrow^{+}$) และ R_B เท่ากับ 1,811.50 N. ($\uparrow^{+}$) **ตอบ**

4.9 การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์

สำหรับโมเมนต์ดัดสามารถใช้วิธีเพื่อหาตำแหน่งวิกฤตของชุดของแรงที่กระทำเป็นจุดที่ทำให้เกิดโมเมนต์ดัดภายในที่มากที่สุดที่จุดต้องการทราบค่าแรงภายในโครงสร้าง เริ่มแรกจำเป็นต้องวาดภาพแนวพื้นของเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัดที่จุดที่ต้องการและหาค่าความชัน Sloping ของชิ้นส่วนย่อยในแนวเส้นที่มีการเคลื่อนที่และเมื่อมีการเคลื่อนที่ในแนวราบเป็นระยะ x ของแรงกระทำ P การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัด ΔM จะมีค่าเท่ากับขนาดของแรงที่ตำแหน่งนั้นคูณกับการเปลี่ยนแปลงค่าของความชันของแนวเส้นอิทธิพลและระยะของแรงทั้งชุด เป็นต้น

ในการหาค่าของโมเมนต์จากน้ำหนักเคลื่อนที่ของรอยตัดใดๆ ก็ตามบนโครงสร้างของน้ำหนักเคลื่อนที่ ก่อนอื่นจะต้องทราบเส้นอิทธิพลโมเมนต์ของรอยตัดโครงสร้างนั้นๆ เสียก่อน สมมติคาน AB มีน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A โดยกำหนดให้โมเมนต์สูงสุดอยู่ที่จุด y เมื่อน้ำหนัก

เคลื่อนที่ผ่าน B เข้ามาในคาน ค่าของโมเมนต์จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนกระทั่งเมื่อน้ำหนักเลยจุด C ไปค่าของโมเมนต์จะลดลงไปตามลำดับ ในกรณีอย่างนี้ เรียกว่า “น้ำหนักอยู่ในช่วง By” จะทำให้ค่าของโมเมนต์ที่จุด y เพิ่ม แต่เมื่อน้ำหนักเคลื่อนที่เลยจุด y ไปแล้ว ซึ่งน้ำหนักเคลื่อนที่จะอยู่ในช่วง Ay ค่าของโมเมนต์ที่จุด y จะลดลง เมื่อมีการเคลื่อนที่ไปเรื่อยๆ ก็จะทำให้ค่าของโมเมนต์ที่จุด y มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ รายละเอียด ดังนี้

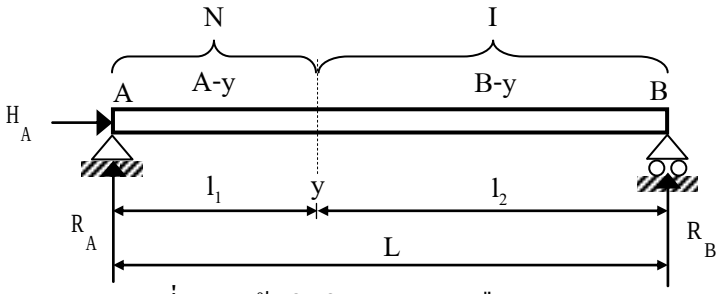
$$\therefore \quad \Delta M = S - N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

ในเมื่อ :-

ΔM = โมเมนต์ที่เปลี่ยนแปลงที่รอยตัด y เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง

S = โมเมนต์ที่เพิ่มขึ้นที่รอยตัด y เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ในช่วง B - y

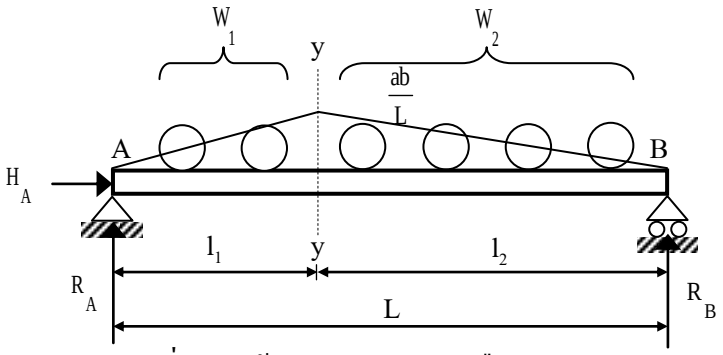
N = โมเมนต์ที่ลดลงที่รอยตัด y เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ในช่วง A -y



ภาพที่ 4.24 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : วรรธนา พันธ์สว่าง(2545)

ในขณะเดียวกันสมมติน้ำหนักเคลื่อนที่กระทำบนคาน AB โดยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้ ดังนี้



ภาพที่ 4.25 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล.(2535)

ในเมื่อ :-

W_1 = น้ำหนักเคลื่อนที่ทั้งหมดในช่วง A-y

W_2 = น้ำหนักเคลื่อนที่ทั้งหมดในช่วง B-y

i = ค่าโมเมนต์สูงสุดที่ y ของเส้นอิทธิพลของโมเมนต์

ดังนั้น :-

$$S = W_2 \times (\frac{i}{b})$$

$$N = W_1 \times (\frac{i}{a})$$

แทนค่า I , D ในสมการที่ (1)

$$\Delta M = W_2 \times (\frac{i}{b}) - W_1 \times (\frac{i}{a}) \quad \text{.....(4.11)}$$

เพื่อที่จะให้ค่าของโมเมนต์สูงสุดที่ y , $\Delta M = 0$

$$W_1 \times (\frac{i}{a}) = W_2 \times (\frac{i}{b}) \quad \text{.....(4.12)}$$

$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_2}{b} \quad \text{.....(4.13)}$$

จากสมการที่ 5 จะเห็นว่ากรณีที่มากสุด y ก็ต่อเมื่ออัตราเฉลี่ยของน้ำหนักในช่วง Ay และ By เท่ากัน ดังนี้

$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_2}{b}$$

$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_1 + W_2}{a + b} = \frac{W_2}{b} \quad \text{.....(4.14)}$$

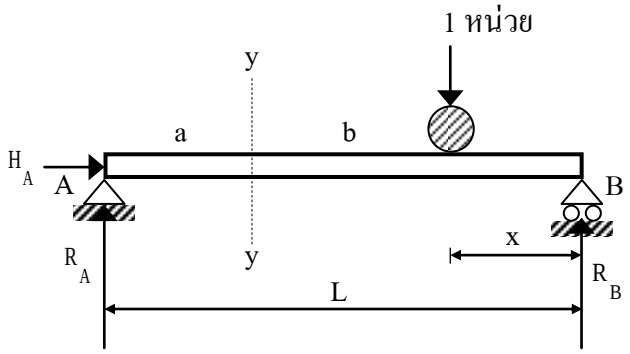
4.10 การเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัด

โมเมนต์จะมีค่ามากที่สุดที่สมบูรณ์สำหรับกรณีคานยื่นที่จุดเดียวกันกับที่แรงเฉือนมีค่าที่มากที่สุดอย่างสมบูรณ์เกิดขึ้น คือที่ฐานรองรับ ถึงแม้ว่าจะมีแรงกระทำแบบเป็นจุดที่มีตำแหน่งอยู่ที่บริเวณปรายสุดของคานก็ตาม โมเมนต์จะเป็นตัวกำหนดขนาดหน้าตัดคานและส่งผลต่อเสาอีกด้วยและสำหรับคานรองรับอย่างง่ายตำแหน่งวิกฤตของแรงกระทำของโมเมนต์ดัดที่มีค่ามากที่สุดอย่างสมบูรณ์ไม่สามารถที่จะหาได้จากการคำนวณเท่านั้นให้พิจารณากระทำด้วยแรงหนึ่งหน่วย (Unit Load) ดังแสดงในภาพที่ 4.25 เนื่องจากผังของโมเมนต์ดัดสำหรับชุดของแรงที่กระทำจุดนี้ประกอบด้วยชิ้นส่วนที่เป็นเส้นตรงที่มีค่าสูงที่สุดของแต่ละแรงกระทำต่อโครงสร้าง โมเมนต์ที่

สมบูรณ์จะเกิดขึ้นภายใต้แรงกระทำของแรงใดแรงหนึ่งภายในโครงสร้างที่เรากำลังพิจารณา (อภิชาต จิรัฐติยางกูร.2530:37)

สำหรับการสร้างค่าของแนวเส้นอิทธิพลที่มีค่ามากที่สุด (Envelope of Maximum Influence Load Values) คือกฎหรือสมการสำหรับการหาค่าของโมเมนต์ดัดที่มีค่ามากที่สุดอย่างสมบูรณ์ที่สุดและมีค่ายุ่งยากพอสมควร ในการคำนวณสำหรับฐานที่รองรับในลักษณะนอกเหนือจากคานยื่นหรือคานที่มีฐานรองรับอย่างง่าย วิธีการพื้นฐานที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาคือจะต้องสร้างแนวเส้นอิทธิพลสำหรับโมเมนต์ดัดที่จุดต้องการทราบค่าตามแนวยาวทั้งหมดของโครงสร้าง (คาน) แล้วทำการคำนวณหาโมเมนต์ดัดที่มีค่ามากที่สุดที่เกิดขึ้นในคานแต่ละจุดรวมทั้งตำแหน่งที่ทำให้เกิดค่าสูงสุดอย่างสมบูรณ์

ในการเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัดของโมเมนต์ดัดเราต้องสมมติที่จุด y ของคาน AB โดยมีน้ำหนัก 1 หน่วยเคลื่อนที่ B ไป A รายละเอียด ดังนี้

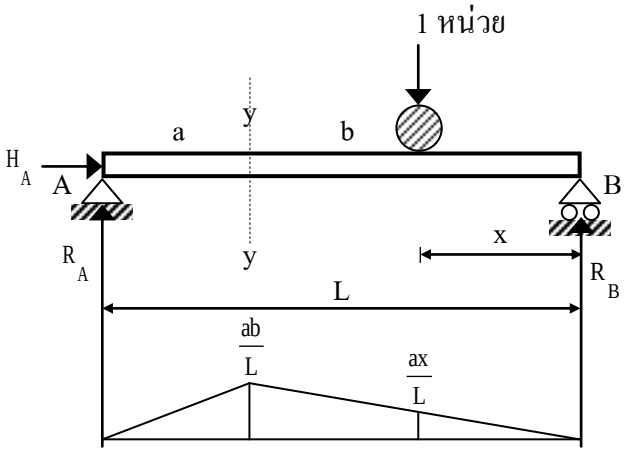


ภาพที่ 4.26 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน
ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

โดยกำหนดให้น้ำหนักจร 1 หน่วยเคลื่อนที่จาก B ไป A มีการแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

4.6.1 เมื่อน้ำหนักล้อเคลื่อนที่อยู่ระหว่าง BC โมเมนต์ที่จุด C จะมีค่าเท่ากับ $R_{A\,(a)}$ ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์จะเพิ่มขึ้นสม่ำเสมอในขณะที่น้ำหนักจร 1 หน่วยเคลื่อนที่จาก B ไป y โดยอิทธิพลของโมเมนต์ดัด จากจุด B ไปจุด y จะเป็นเส้นตรง

4.6.2 เมื่อน้ำหนักล้อเคลื่อนที่อยู่ระหว่าง Ay หรือน้ำหนักจร 1 หน่วยเคลื่อนที่เลยจุด y ไปแล้วโมเมนต์ที่จุด y จะมีค่าเท่ากับ $R_{B\,(b)}$ ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์จะลดลงอย่างสม่ำเสมอ ในขณะที่น้ำหนัก 1 หน่วยเคลื่อนที่จาก y ไป A โดยเส้นอิทธิพลของโมเมนต์ดัดจากจุด y ไป A จะเป็นเส้นตรง รายละเอียด ดังภาพที่ 4.26



ภาพที่ 4.27 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

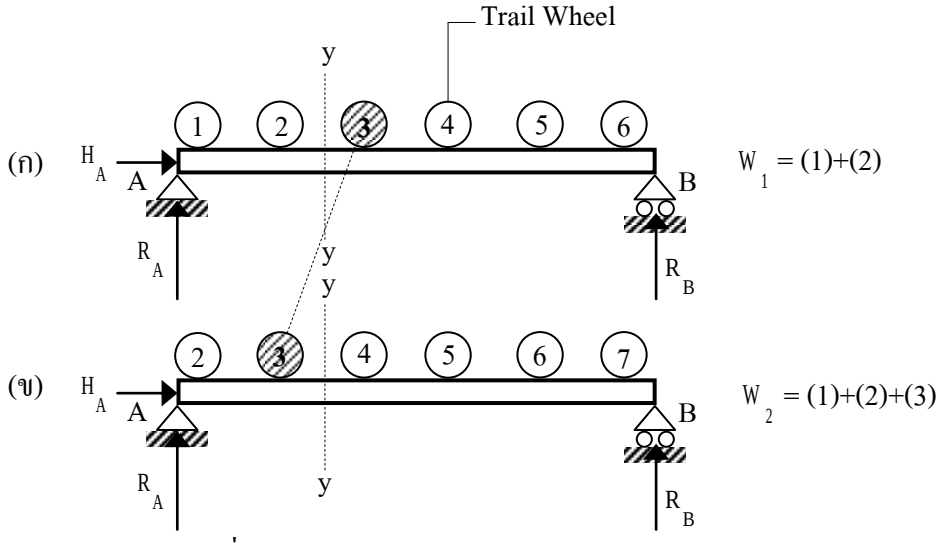
ในเมื่อ :-

W = น้ำหนักเคลื่อนที่ทั้งหมดบนโครงสร้าง

L = ช่วงความยาวของโครงสร้าง

ถ้าพิจารณาสมการที่ 4 เราจะเห็นว่า ค่าเฉลี่ยน้ำหนักทั้งหมดในช่วง Ay เท่ากับน้ำหนักเฉลี่ยบนโครงสร้างทั้งหมดก็จะทำให้เกิดโมเมนต์สูงสุดที่จุด y

ดังนั้นจากสมการที่ (1) ถึงสมการที่ (4) จึงพอสรุปได้ว่าตำแหน่งที่จะทำให้ค่าของโมเมนต์มากสุดที่รอยตัดใดๆ บนโครงสร้างเมื่อน้ำหนักเฉลี่ยบนช่วงโครงสร้างทั้งหมดมากกว่าน้ำหนักเฉลี่ยบนช่วง Ay โดยล้อถัดไป (Trail Wheel) จะอยู่ขวามือของรอยตัดภาพที่ ก. และมีค่าน้อยกว่าน้ำหนักเฉลี่ยบนช่วง Ay โดยล้อถัดไปอยู่ซ้ายมือของรอยตัดดังภาพที่ ข.

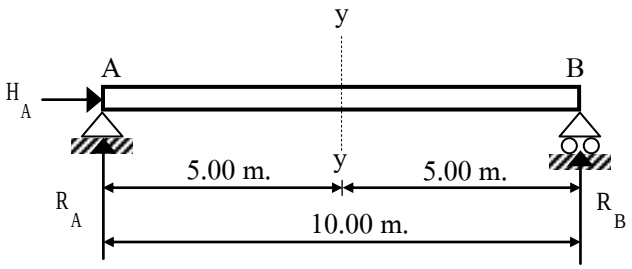


ภาพที่ 4.28 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

จากภาพที่ 4.28 ก และ ข ล้อที่ 3 เป็นล้อถัดไป Trail Wheel เป็นล้อที่ทำให้เกิดโมเมนต์มากสุดที่จุด y

ตัวอย่างที่ 11 คาน AB ยาว 10.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่กระทำ จงหาโมเมนต์มากสุดที่จุดกึ่งกลางของโครงสร้างคาน ดังภาพที่ 4.29



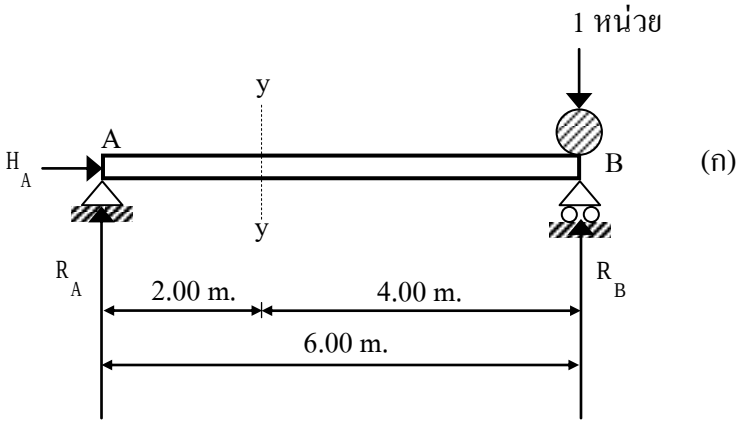
ภาพที่ 4.29 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

สำหรับการสร้างเส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนที่จุด y คือเมื่อล้อที่ 1 (Unit Load) เคลื่อนที่อยู่ระหว่าง y ไป B แรงดัดที่ y จะเท่ากับ $R_A \times R_y$ และจะเห็นได้ว่า R_A จะแปรผันอย่างสม่ำเสมอ เมื่อคูณด้วย Ay ซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะได้ภาพที่ 4.27 ของเส้นอิทธิพลสำหรับแรงดัดออกมาเป็นเส้นเฉียง และเมื่อ 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ระหว่าง C ไป A เส้นอิทธิพลบแรงดัดที่จุด y เท่ากับ $R_B \times By$

ตัวอย่างที่ 12 คาน AB ยาว 6.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่กระทำดังภาพที่ 4.29 และจงเขียนเส้นอิทธิพลหาโมเมนต์มากสุดที่จุด y - y

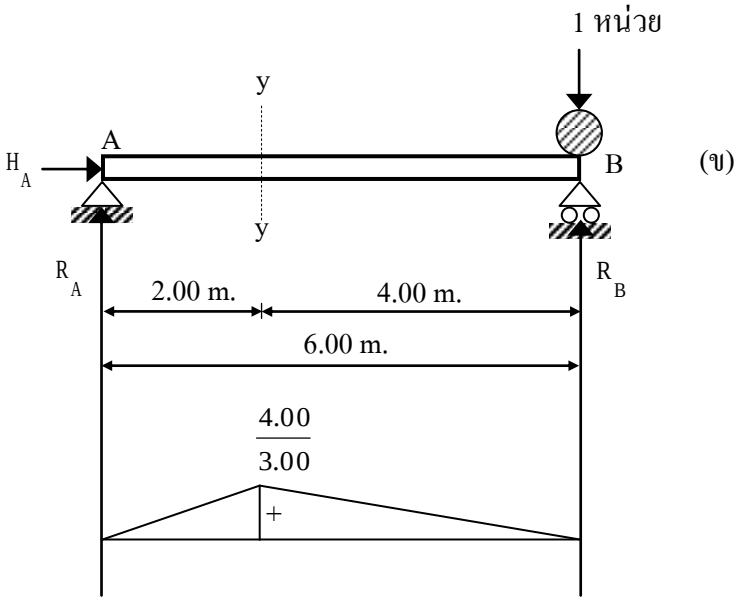


(ก)

ภาพที่ 4.30 เส้นอิทธิพลของแรงดัดที่จุด y-y

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

เขียน Free Body Diagram ของเส้นอิทธิพลหาโมเมนต์มากสุดที่จุด y - y



(ข)

เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ระหว่าง B ไป y ระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ที่จุด y เท่ากับ $R_A \times Ay$ เท่ากับ $\frac{2.00 \times 2.00}{3.00} = \frac{4.00}{5.00}$

และเมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ระหว่าง A ไป y ระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ที่จุด y เท่ากับ $R_B \times By$ เท่ากับ $\frac{1.00 \times 4.00}{3.00} = \frac{4.00}{3.00}$

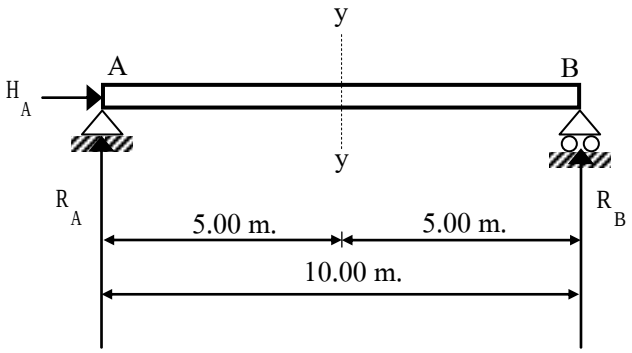
หมายเหตุ ขั้นตอนในการหาเส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนที่จุด y

สำหรับขั้นตอนในการคำนวณ โดยสมมติให้น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่จาก B ไป A เมื่อน้ำหนัก 1 หน่วย เคลื่อนที่อยู่ทางขวามือของจุด y คืออยู่ระหว่าง B ไป y แรงเฉือนระหว่าง Ay จะคงที่มีค่าเท่ากับ R_A

ดังนั้นจึงพอสรุปได้ว่าเมื่อ น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) อยู่ระหว่าง y ไป B เส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนที่จุด y จะเท่ากับเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับที่จุด A นั้นเอง และจะมีค่าระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. เท่ากับ $\frac{1.00 \times 4.00}{6.00} = \frac{2.00}{3.00}$

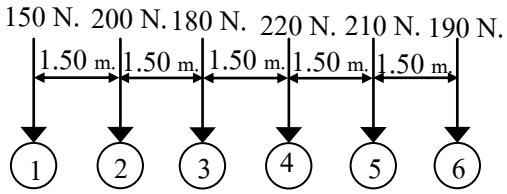
และเมื่อ 1 น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่เลยจุด y ไป อยู่ระหว่าง A ไป y เส้นอิทธิพลสำหรับแรงเฉือนที่จุด y จะเท่ากับเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ B และมีค่าระยะตั้งฉากกับแกน (Ordinate) ของ I.L. เท่ากับ $\frac{1.00 \times 2.00}{6.00} = \frac{1.00}{3.00}$ และมีเครื่องหมายเป็นลบ (–) รายละเอียด ดังภาพที่ 4.30

ตัวอย่างที่ 13 คาน AB ยาว 10.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่กระทำดังภาพที่ 4.30 และจงเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์มากสุดที่จุดกึ่งกลาง y - y



ภาพที่ 4.31 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



วิธีทำ

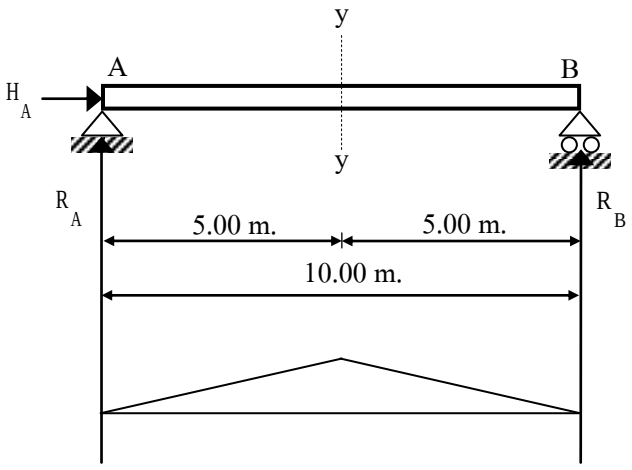
$W = 1{,}150$ N.

$L = 10.00$ m.

$a = 5.00$ m.

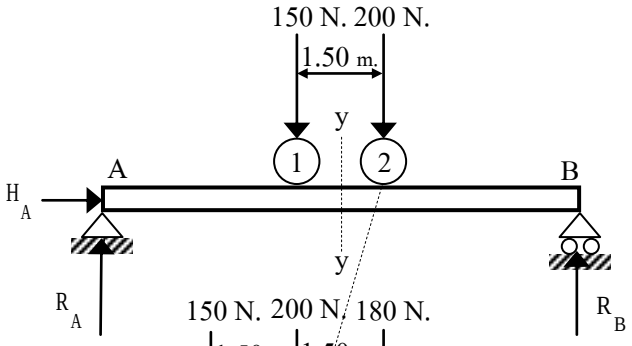
$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_2}{b}$$

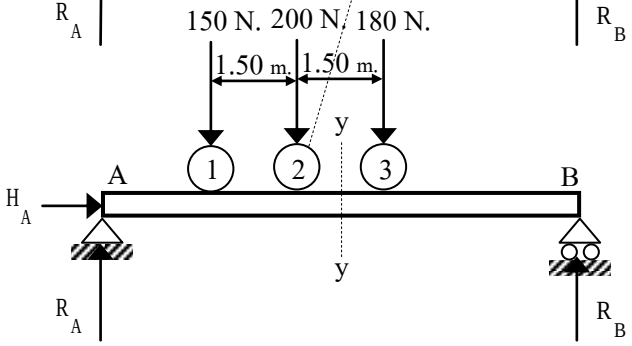
เขียน Free Body Diagram ของเส้นอิทธิพลหาโมเมนต์มากสุดที่จุด y - y



(ก)

1) เมื่อล้อที่ 2 เคลื่อนที่ออกไปจากจุด y-y



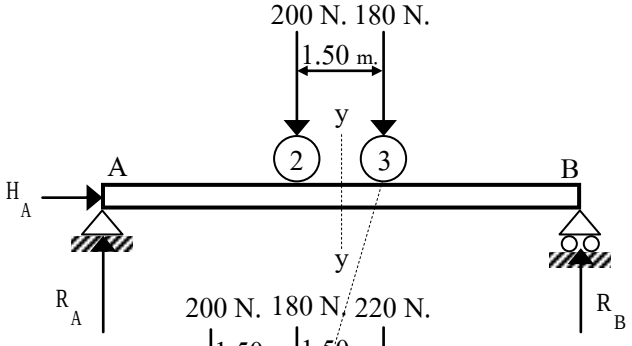


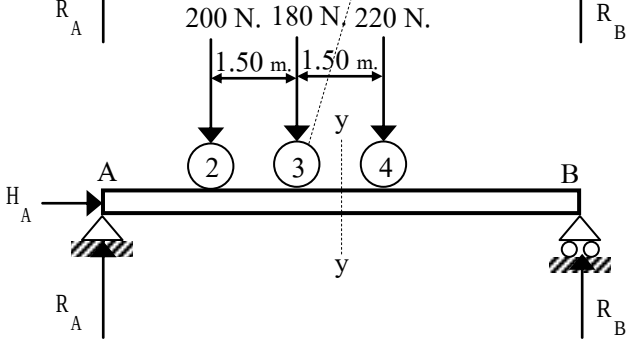
$$\frac{1{,}150}{10.00} > \frac{150}{5.00}$$

$$\frac{1{,}150}{10.00} > \frac{350}{5.00}$$

โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

2) เมื่อล้อที่ 3 เคลื่อนที่ออกไปจากจุด y-y

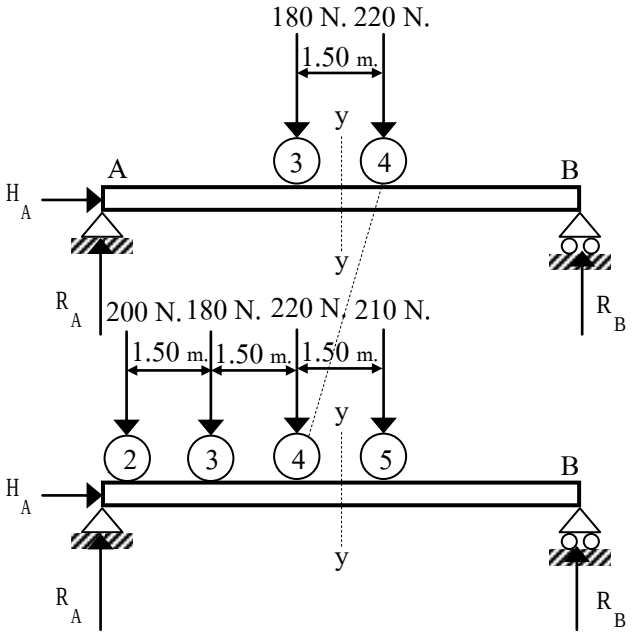




$$\frac{1,150}{10.00} > \frac{350}{5.00}$$

$$\frac{1,150}{10.00} > \frac{530}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

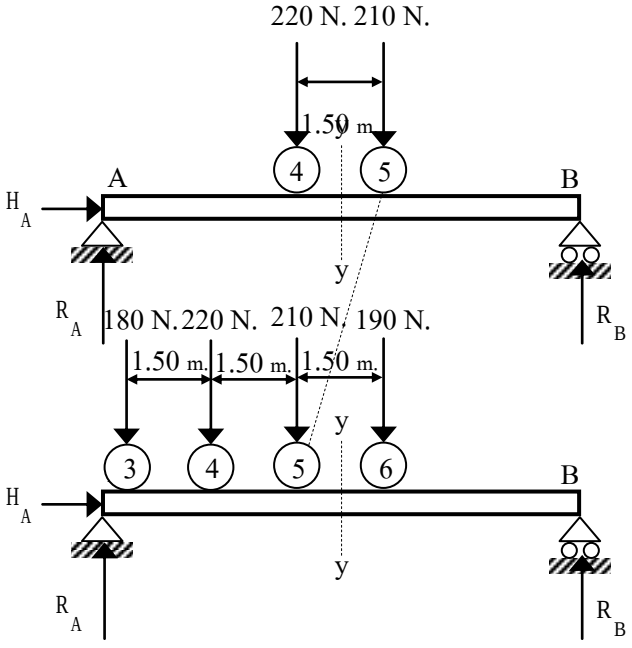
3) เมื่อล้อที่ 4 เคลื่อนที่ออกไปจากจุด y-y



$$\frac{1,150}{10.00} > \frac{530}{5.00}$$

$$\frac{1,150}{10.00} < \frac{750}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

4) เมื่อล้อที่ 5 เคลื่อนที่ออกไปจากจุด y-y



$$\frac{1{,}150}{10.00} < \frac{750}{5.00}$$

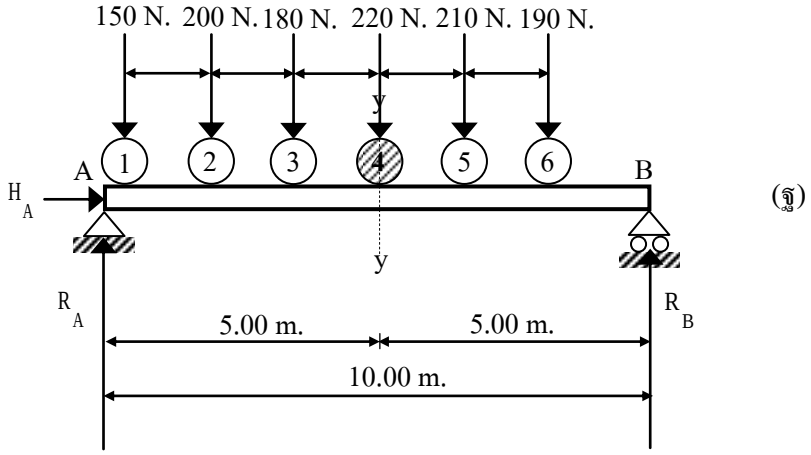
$$\frac{1{,}150}{10.00} < \frac{980}{5.00}$$ โมเมนต์สูงสุด

W = 1,150 N.

W = น้ำหนักช่วง Ac + Trail Wheel = 1,150 N.

∴ W = w , = 1,150 ~1,150 ใช้ไม่ได้ น้ำหนัก W ต้องมากกว่า w

ฉะนั้นโมเมนต์มากสุดเมื่อล้อที่ 4 อยู่ที่รอยตัด y



(ฐ)

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 10.00 - 190\times 2.00 - 210\times 3.50 - 220\times 5.00 = 0$$

$$- 180\times 6.50 - 200\times 8.00 - 150\times 9.50$$

$$R_A \times 15.00 - 380 - 735 - 1{,}100 - 1{,}170 - 1{,}600 - 1{,}425 = 0$$

$$R_A \times 10.00 - 6{,}410 = 0$$

$$R_B \times 20.00 = +6{,}410$$

$$R_A = +\frac{6{,}410}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +641 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 10.00 + 150\times 0.50 + 200\times 2.00 + 180\times 3.50 = 0$$

$$+220\times5.00+210\times6.50+190\times8.00$$

$$-R_B\times10.00+75+400+630+1{,}100 = 0$$

$$+1{,}365+1{,}520$$

$$-R_B\times10.00-5{,}090 = 0$$

$$-R_B\times10.00 = -5{,}090$$

$$-R_B = -\frac{50{,}90}{10.00}$$

$$\therefore\ R_B = +590\ \text{N.}\ (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0\ \uparrow^{+}\downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 150 - 200 - 180 - 220 - 210 - 190 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 590 N.

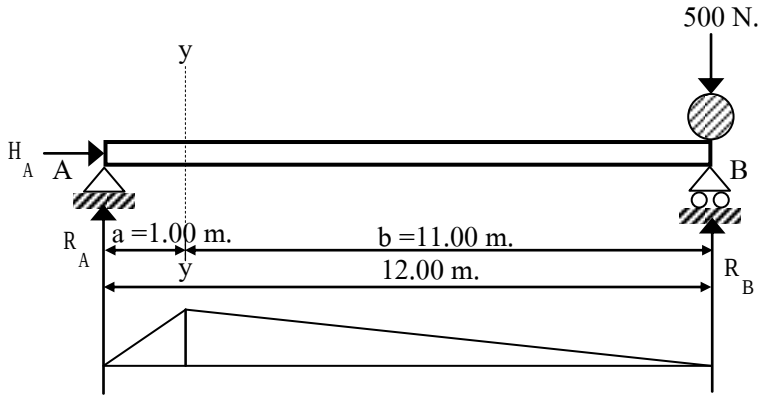
$$R_A + 590 - 1{,}150 = 0$$

$$R_A - 641 = 0$$

$$\therefore\ R_A = +641\ \text{N.}\ (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 641 N. ($\uparrow^{+}$) และ R_B เท่ากับ 590 N. ($\uparrow^{+}$) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 14 น้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนคานโดยเคลื่อนที่จาก A ไป B คานมีความยาว 12.00 m. มีน้ำหนัก 600 N. จงคำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุด B โดยเคลื่อนน้ำหนักจากจุด A ไปทีละ 1.00 m. ดังภาพที่ 4.32



ภาพที่ 4.32 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

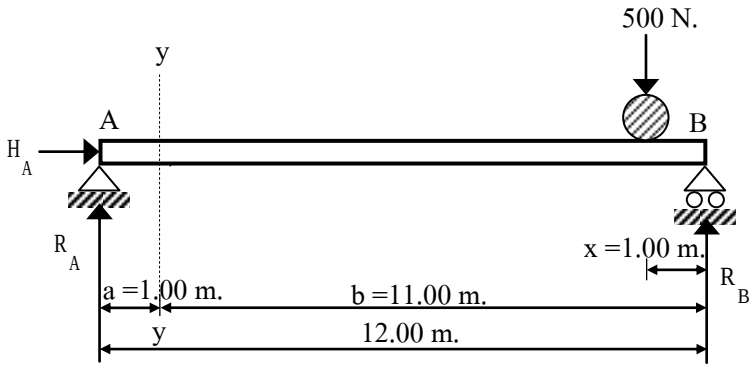
เขียน Free Body Diagram ของเส้นอิทธิพลหาโมเมนต์มากสุดที่จุด y - y

1) เมื่อน้ำหนักในช่วง Ay

$\{Mx = R_A \times$ระยะทางจาก A –y (a) หรือ $\frac{ax}{L} \times (P)\}$

$\{My = \frac{ax}{L} \times (P)\}$

(1) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 1.00 m.



(ก)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 1.00 \times 500}{12.00} = 41.67 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 1.00 = 0$$

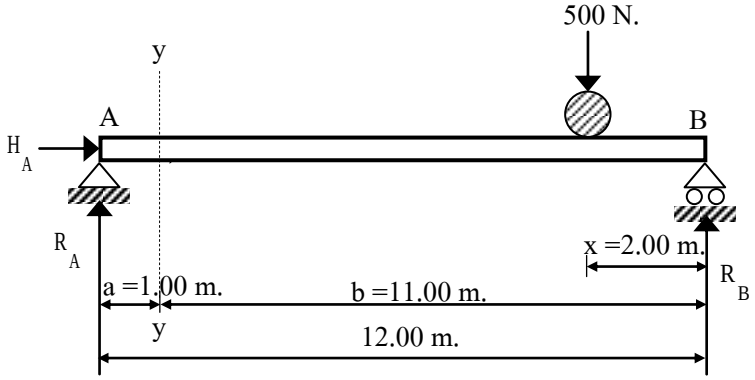
$$R_A \times 12.00 - 500 = 0$$

$$R_A = +\frac{500}{12.00}$$

$$R_A = +41.67 \text{ N.}$$

$$Mx = 41.67 \times 1.00 = +41.67 \text{ N-m.}$$

(2) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 2.00 m.



(ข)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00\times 2.00\times 500}{12.00} = 83.33 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00\times 11.00\times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500\times 2.00 = 0$$

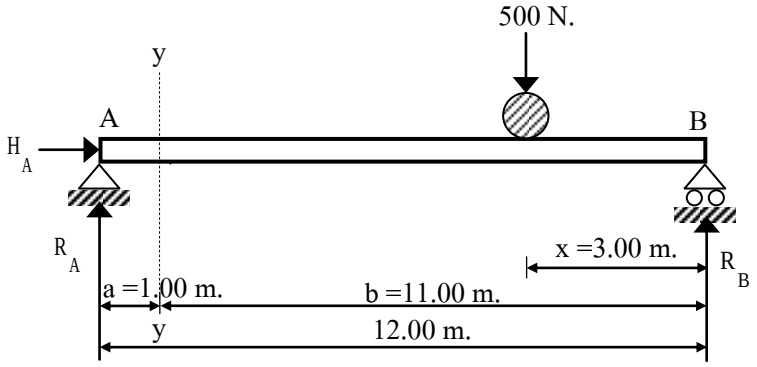
$$R_A \times 12.00 - 1{,}000 = 0$$

$$R_A = +\frac{1{,}000}{12.00}$$

$$R_A = +83.33 \text{ N.}$$

$$Mx = 83.33\times 1.00 = +83.33 \text{ N-m.}$$

(3) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 3.00 m.



(ค)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00\times 3.00\times 500}{12.00} = 125 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00\times 11.00\times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500\times 3.00 = 0$$

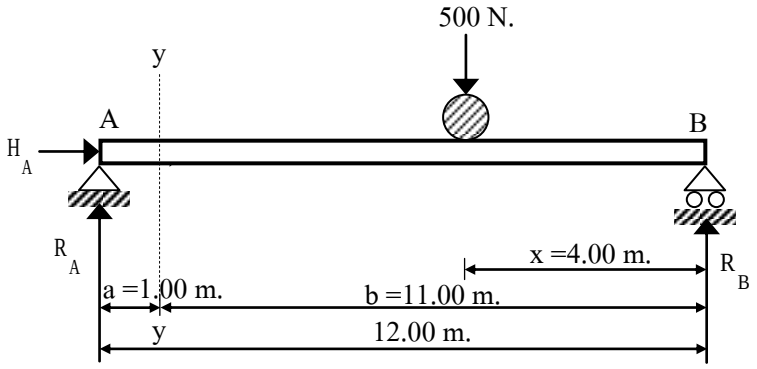
$$R_A \times 12.00 - 1{,}500 = 0$$

$$R_A = +\frac{1{,}500}{12.00}$$

$$R_A = +125 \text{ N.}$$

$$Mx = 125\times 1.00 = +125 \text{ N-m.}$$

(4) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 4.00 m.



(ง)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 4.00 \times 500}{12.00} = 166.67 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 4.00 = 0$$

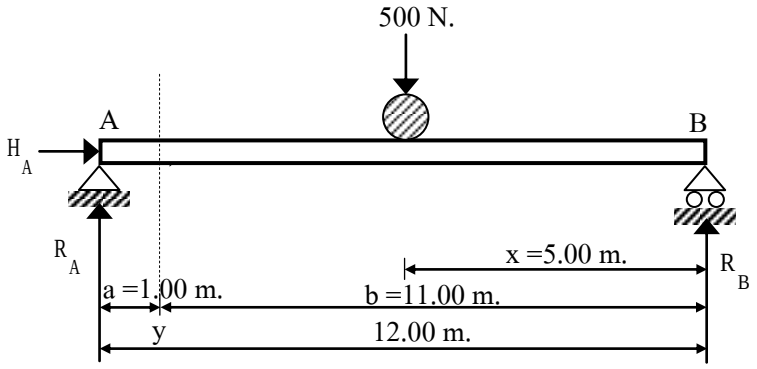
$$R_A \times 12.00 - 2{,}000 = 0$$

$$R_A = +\frac{2{,}000}{12.00}$$

$$R_A = +166.67 \text{ N.}$$

$$Mx = 166.67 \times 1.00 = +166.67 \text{ N-m.}$$

(5) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 5.00 m.



(จ)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 5.00 \times 500}{12.00} = 208.83 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 5.00 = 0$$

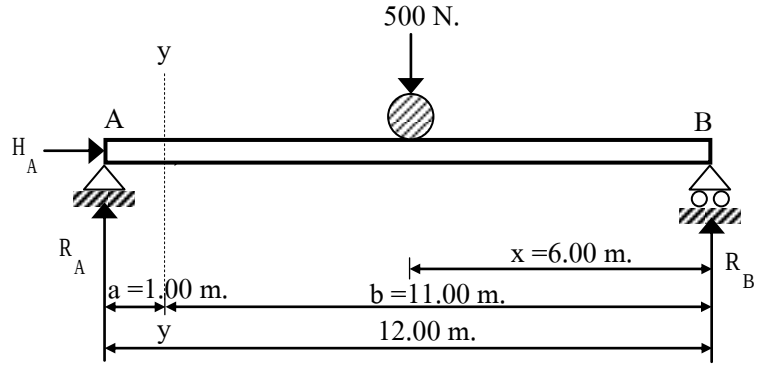
$$R_A \times 12.00 - 2{,}500 = 0$$

$$R_A = +\frac{2{,}500}{12.00}$$

$$R_A = +208.83 \text{ N.}$$

$$Mx = 208.83 \times 1.00 = +208.83 \text{ N-m.}$$

(6) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 6.00 m.



(ฉ)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 6.00 \times 500}{12.00} = 208.83 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 6.00 = 0$$

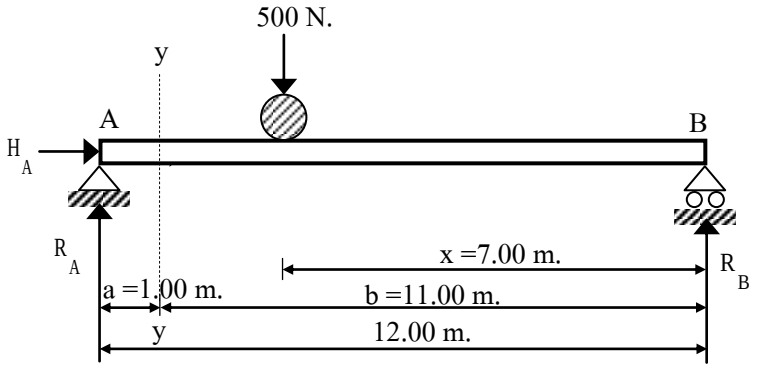
$$R_A \times 12.00 - 3{,}000 = 0$$

$$R_A = +\frac{3{,}000}{12.00}$$

$$R_A = +250 \text{ N.}$$

$$Mx = 250 \times 1.00 = +250 \text{ N-m.}$$

(7) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 7.00 m.



(ช)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 7.00 \times 500}{12.00} = 208.83 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 7.00 = 0$$

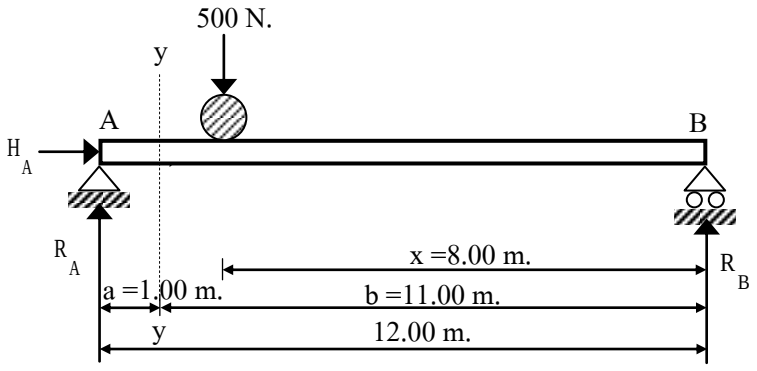
$$R_A \times 12.00 - 3{,}500 = 0$$

$$R_A = +\frac{3{,}500}{12.00}$$

$$R_A = +291.67 \text{ N.}$$

$$Mx = 291.67 \times 1.00 = +291.67 \text{ N-m.}$$

(8) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 8.00 m.



(ช)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 8.00 \times 500}{12.00} = 208.83 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 8.00 = 0$$

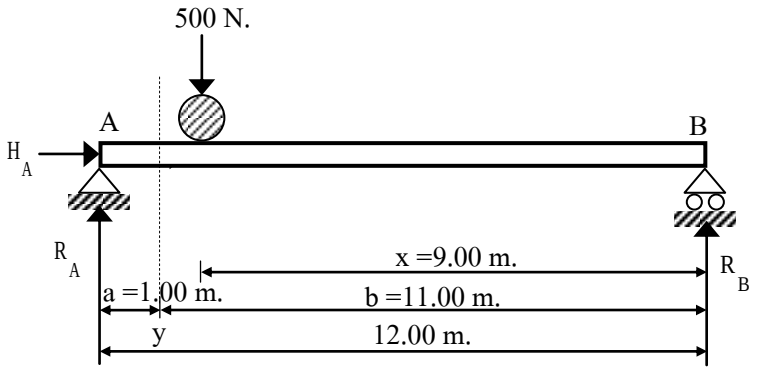
$$R_A \times 12.00 - 4{,}000 = 0$$

$$R_A = +\frac{4{,}000}{12.00}$$

$$R_A = +333.33 \text{ N.}$$

$$Mx = 333.33 \times 1.00 = +333.33 \text{ N-m.}$$

(9) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 9.00 m.



(ญ)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00 \times 9.00 \times 500}{12.00} = 375 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00 \times 11.00 \times 500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 9.00 = 0$$

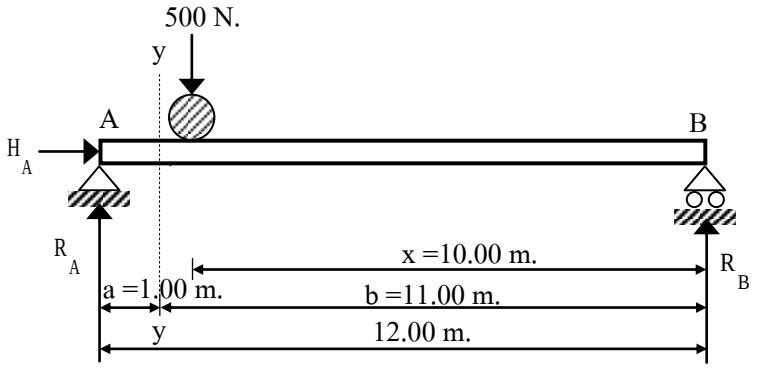
$$R_A \times 12.00 - 4{,}500 = 0$$

$$R_A = +\frac{4{,}500}{12.00}$$

$$R_A = +375 \text{ N.}$$

$$Mx = 375 \times 1.00 = +375 \text{ N-m.}$$

(10) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 10.00 m.



(ฐ)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00\times10.00\times500}{12.00} = 416.67 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00\times11.00\times500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500\times10.00 = 0$$

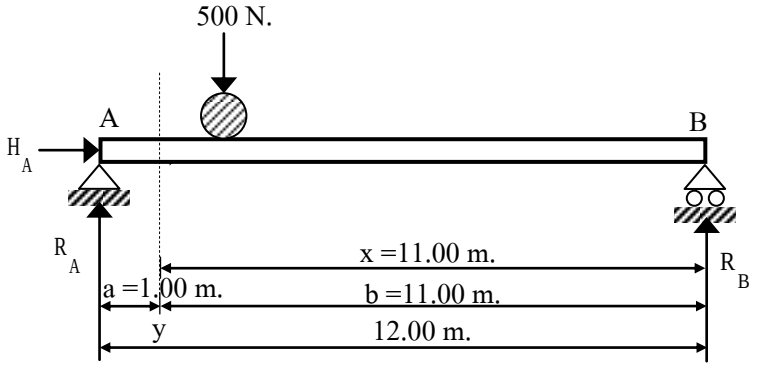
$$R_A \times 12.00 - 5{,}000 = 0$$

$$R_A = +\frac{5{,}000}{12.00}$$

$$R_A = +416.67 \text{ N.}$$

$$Mx = 416.67\times1.00 = +416.67 \text{ N-m.}$$

(11) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 11.00 m.



(ฌ)

$$Mx = \frac{ax}{L} = \frac{1.00\times11.00\times500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$My = \frac{ab}{L} = \frac{1.00\times11.00\times500}{12.00} = 458.33 \text{ N-m.}$$

$$R_A \times 12.00 - 500 \times 11.00 = 0$$

$$R_A \times 12.00 - 5{,}500 = 0$$

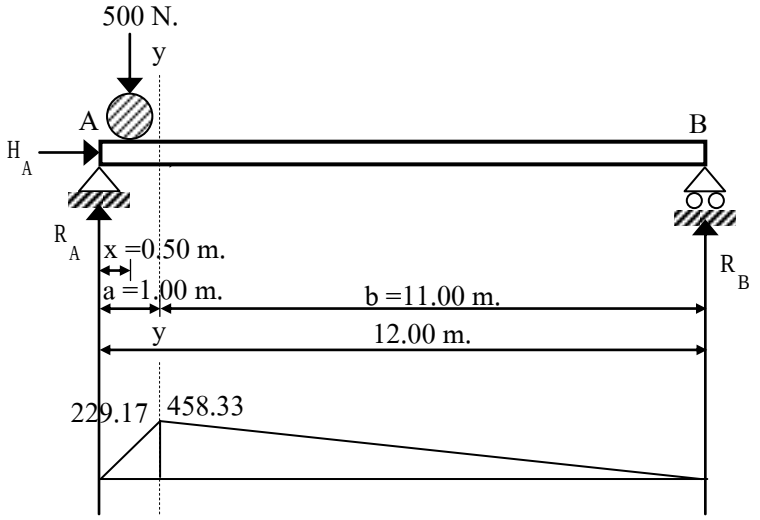
$$R_A = +\frac{5{,}500}{12.00}$$

$$R_A = +458.33 \quad \text{N.}$$

$$Mx = 458.33 \times 1.00 = +458.33 \quad \text{N-m.}$$

2. เมื่อน้ำหนักอยู่ในช่วง A y

{M at x – R_B ×ระยะทางจาก B ถึง y (b) }



(ค)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times 12.00 - 500 \times 0.50 = 0$$

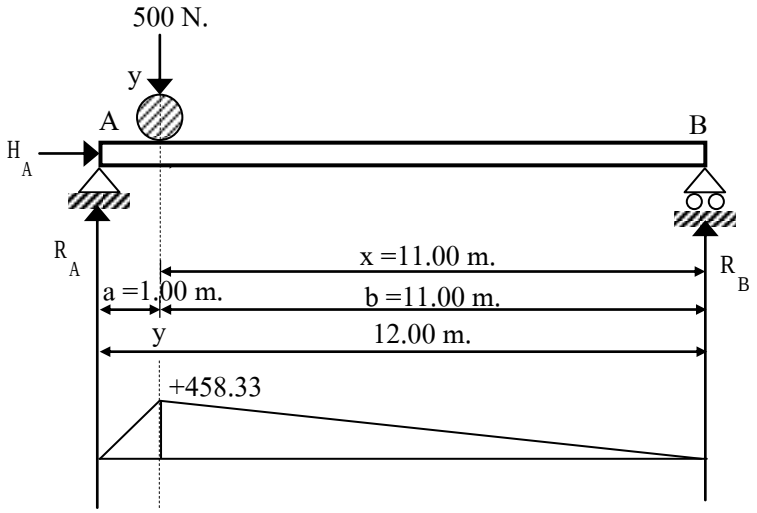
$$-R_B \times 12.00 - 250 = 0$$

$$-R_B = \frac{250}{12.00}$$

$$-R_B = +20.83 \quad \text{N.}$$

$$Mx = 20.83 \times 11.00 = +229.17 \quad \text{N-m.}$$

(12) เขียน Free Body Diagram ระยะทางจาก B – x เท่ากับ 12.00 m.



(ต)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ (+ ↺ -)

$$-R_B \times 12.00 + 500 \times 1.00 = 0$$

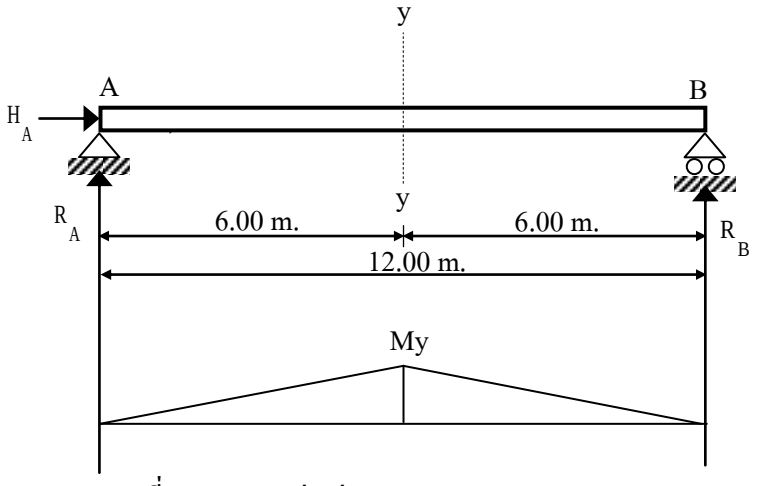
$$-R_B \times 12.00 - 500 = 0$$

$$-R_B = -\frac{500}{12.00}$$

$$R_B = +41.67 \text{ N.}$$

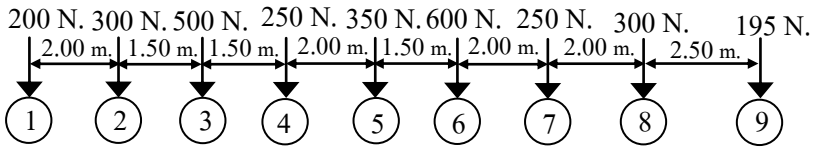
$$Mx = 41.67 \times 1.00 = +41.67 \text{ N-m.}$$

ตัวอย่างที่ 15 คาน AB ยาว 12.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่ดังภาพที่ 4.33 จงหาโมเมนต์มากที่สุดกึ่งกลางของโครงสร้างคาน



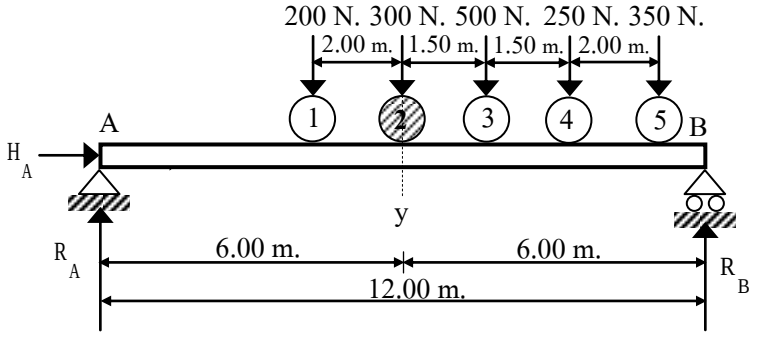
ภาพที่ 4.33 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



วิธีทำ

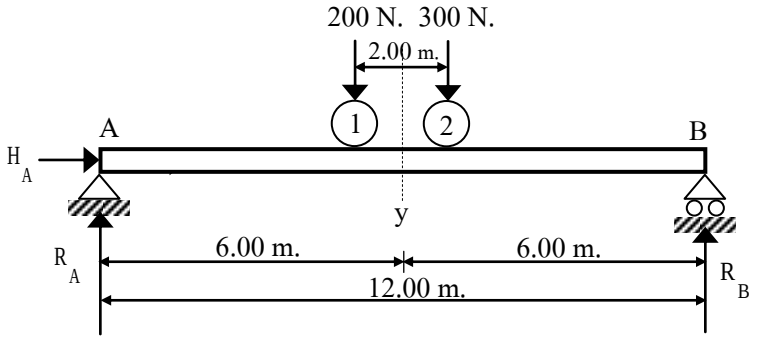
(1) เมื่อล้อที่ 1 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 2 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคาน เท่ากับ W = 1,600 N.



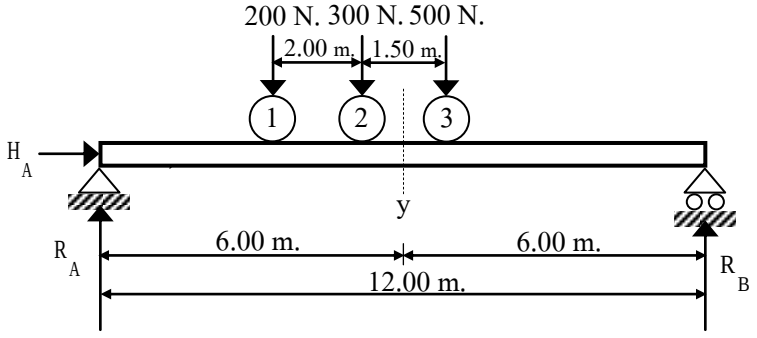
(ก)

ก) ขวามือ

$$\frac{1{,}600}{12.00} > \frac{200}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ข)

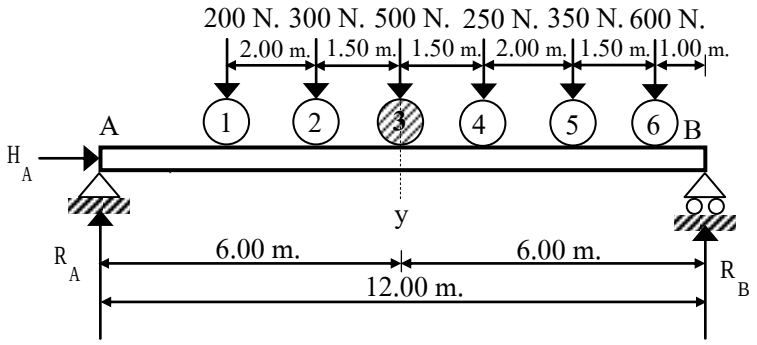


(ค)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{1,600}{12.00} > \frac{500}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

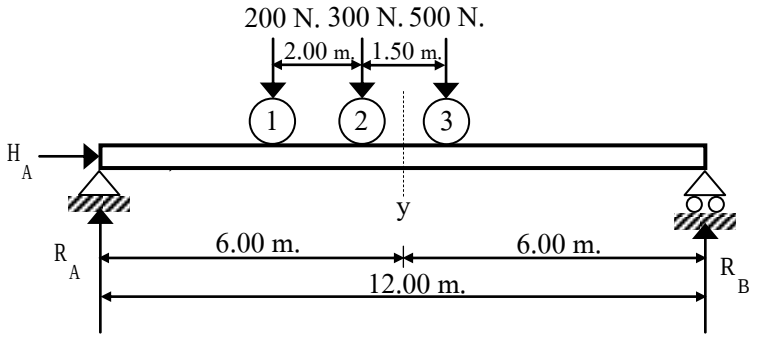
(2) เมื่อล้อที่ 2 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 3 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 2,200 N.



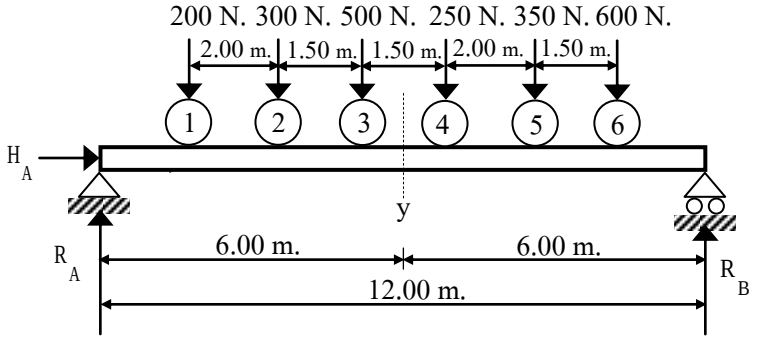
(ง)

ก) ขวามือ

$$\frac{2,200}{12.00} > \frac{500}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(จ)

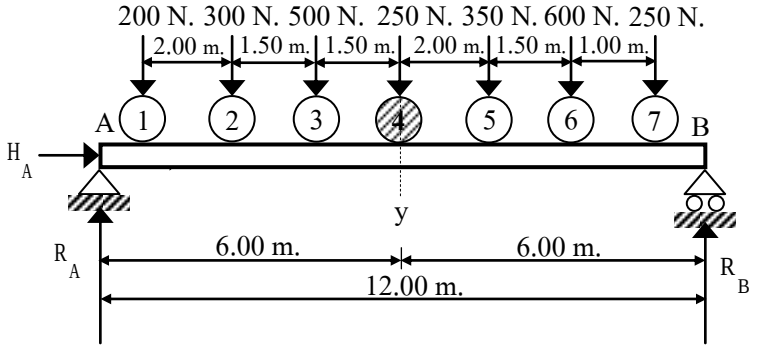


(ฉ)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{2,200}{12.00} < \frac{1,000}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

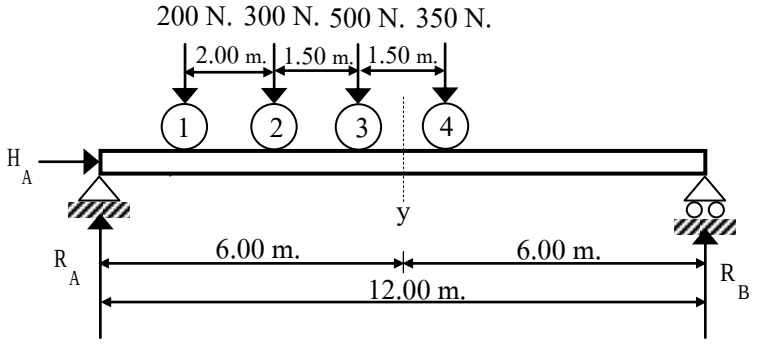
(3) เมื่อล้อที่ 3 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 4 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 2,450 N.



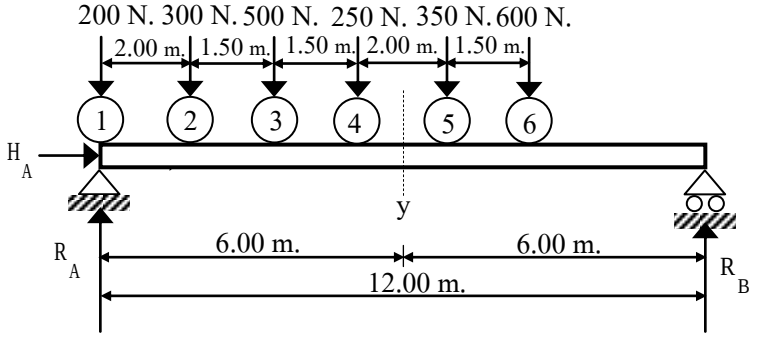
(ช)

ก) ขวามือ

$$\frac{2,450}{12.00} > \frac{1,000}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ซ)

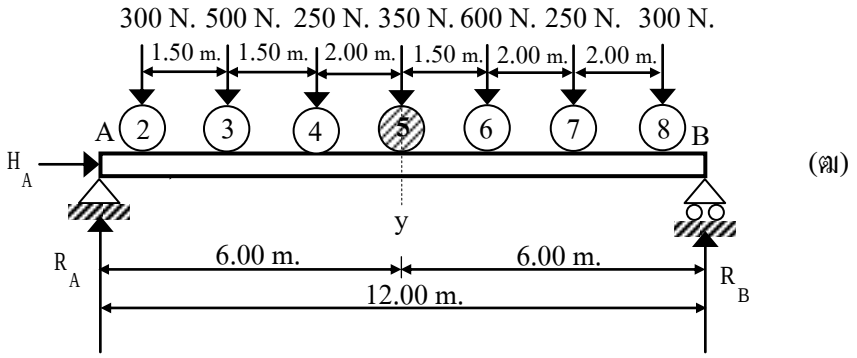


(ญ)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{2,450}{12.00} < \frac{1,250}{6.00}$$ **โมเมนต์สูงสุด**

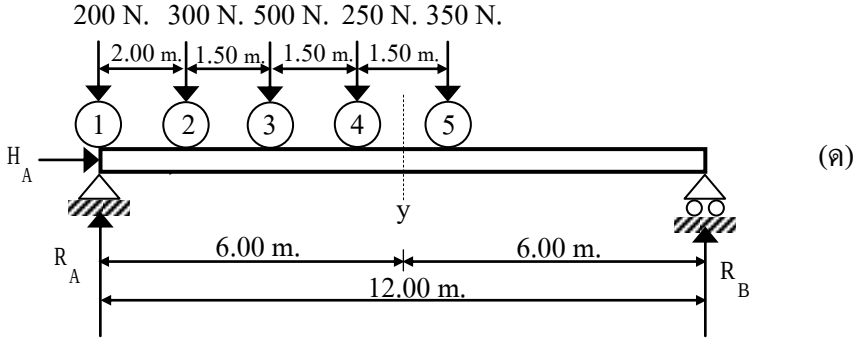
(4) เมื่อล้อที่ 4 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 5 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 2,550 N.



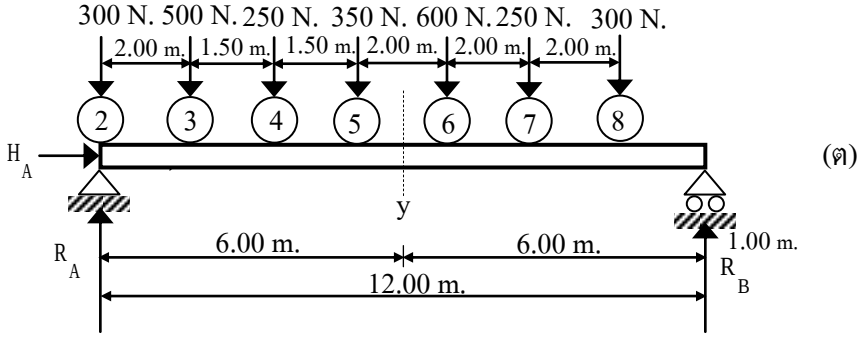
(ฌ)

ก) ขวามือ

$$\frac{2,550}{12.00} > \frac{1,050}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ด)

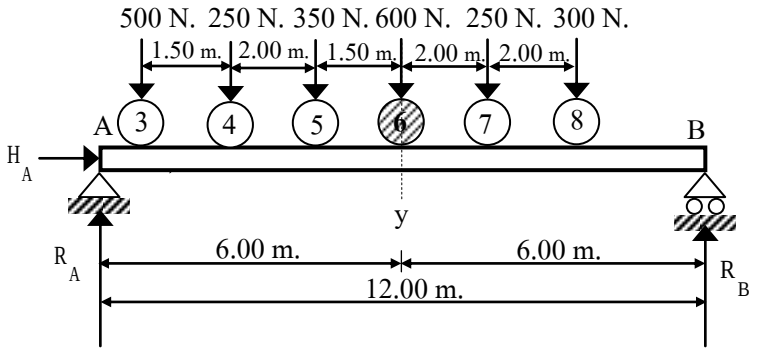


(ต)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{2,550}{12.00} < \frac{1,400}{6.00}$$ **โมเมนต์สูงสุด**

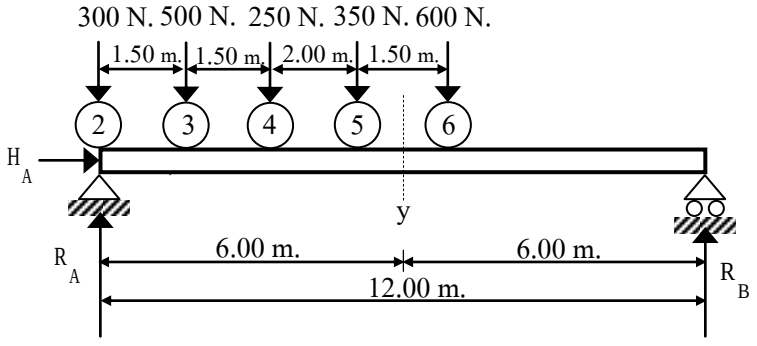
(5) เมื่อล้อที่ 5 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 6 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 2,250 N.



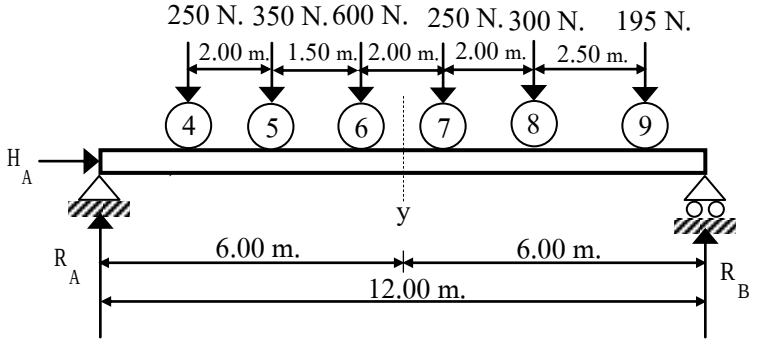
(ถ)

ก) ขวามือ

$$\frac{2,250}{12.00} > \frac{1,100}{6.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ท)

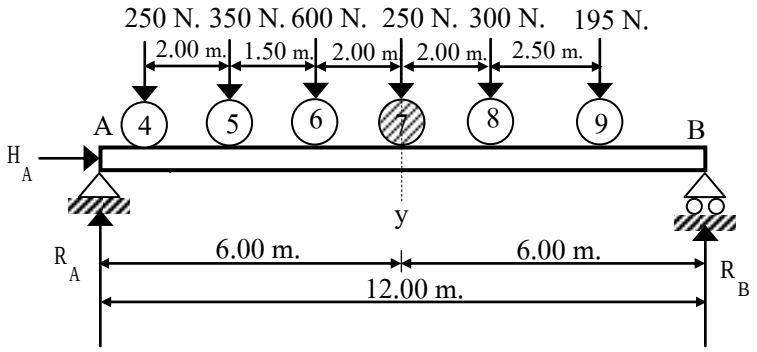


(ธ)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{2,550}{12.00} < \frac{1,400}{6.00} \qquad \textbf{โมเมนต์สูงสุด}$$

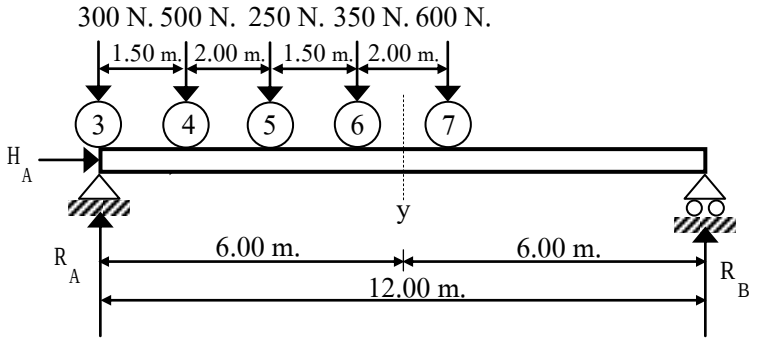
(6) เมื่อล้อที่ 6 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 7 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 1,945 N.



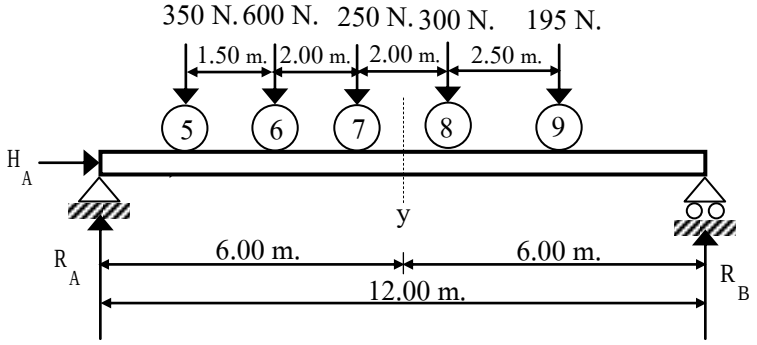
(น)

ก) ขวามือ

$$\frac{1,945}{12.00} < \frac{1,200}{6.00} \qquad \textbf{โมเมนต์สูงสุด}$$



(บ)



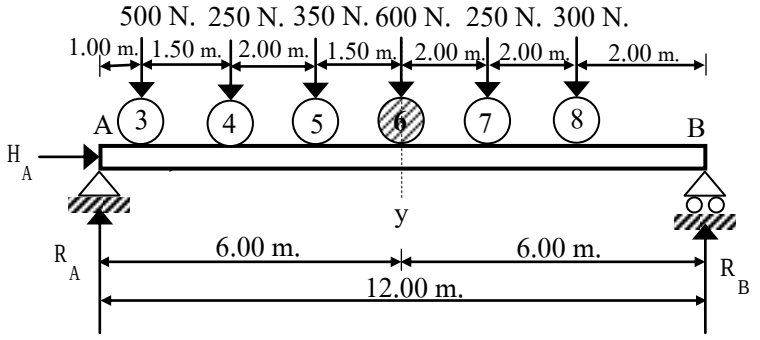
(ป)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{1{,}945}{12.00} \quad < \quad \frac{1{,}400}{6.00} \qquad \textbf{โมเมนต์สูงสุด}$$

ดังนั้น W = 1,945 N. เมื่อล้อ 5, 6 และ 7 + Trail Wheel

$\therefore$ โมเมนต์สูงสุดเมื่อล้อที่ 7 อยู่ที่จุด ดังนี้



(ผ)

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 12.00 - 300\times 2.00 - 250\times 4.00 - 600\times 6.00 = 0$$

$$- 350\times 7.50 - 250\times 9.50 - 500\times 11.00$$

$$R_A \times 12.00 - 600 - 1{,}000 - 3{,}600 - 2{,}625 - 2{,}375 - 5{,}500 = 0$$

$$R_A \times 12.00 - 15{,}700 = 0$$

$$R_B \times 12.00 = +15{,}700$$

$$R_A = +\frac{15{,}700}{12.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}308.33 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 12.00 + 500\times 1.00 + 250\times 2.50 + 350\times 4.50 = 0$$

$$+ 600\times 6.00 + 250\times 8.00 + 300\times 10.00$$

$$-R_B \times 12.00 + 500 + 625 + 1{,}575 + 3{,}600 = 0$$

$$+ 2{,}000 + 3{,}000$$

$$-R_B \times 12.00 - 11{,}300 = 0$$

$$-R_B \times 12.00 = -11{,}300$$

$$-R_B = -\frac{11{,}300}{12.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +941.67 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 300 - 500 - 250 - 350 - 600 - 250 - 300 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 941.67 N.

$$R_A + 941.67 - 2{,}250 = 0$$

$$R_A - 1{,}308.33 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}308.33 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาโมเมนต์สูงสุด Maximum at 6.00 m.

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0 \quad {}^{+}\circlearrowright{}^{-}$

$$1{,}308.33 \times 6.00 - 500 \times 5.00 - 250 \times 3.50 = 0$$

$$-350 \times 1.50 + My$$

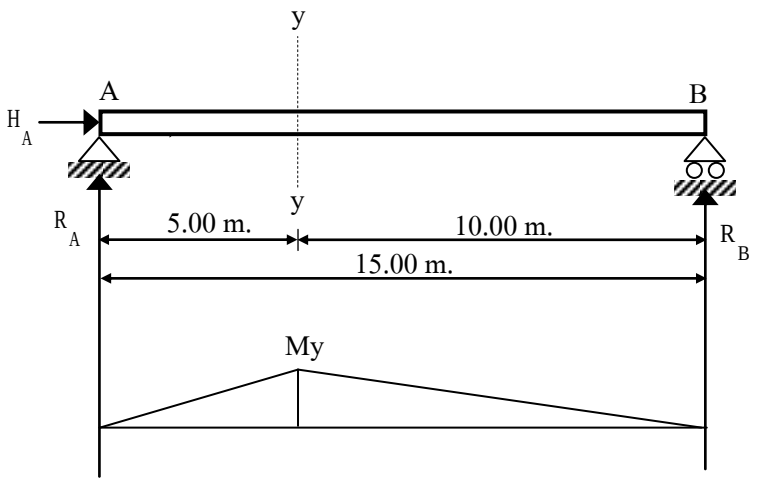
$$7{,}850 - 2{,}500 - 875 - 525 + My = 0$$

$$My = 3{,}950 \text{ N-m.}$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 1,308.33 N. $(\uparrow^+)$ **ตอบ**

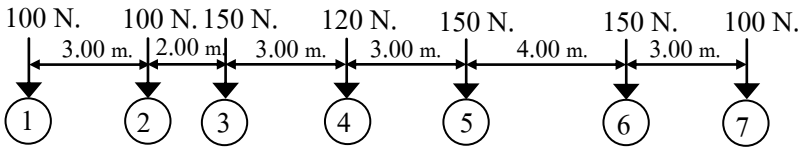
และ R_B เท่ากับ 941.67 N. $(\uparrow^+)$ และ My = 3,950 N-m.

ตัวอย่างที่ 16 คาน AB ยาว 15.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่ดังภาพที่ 4.34 จงหาโมเมนต์มากที่สุดกึ่งกลางโครงสร้างของคาน



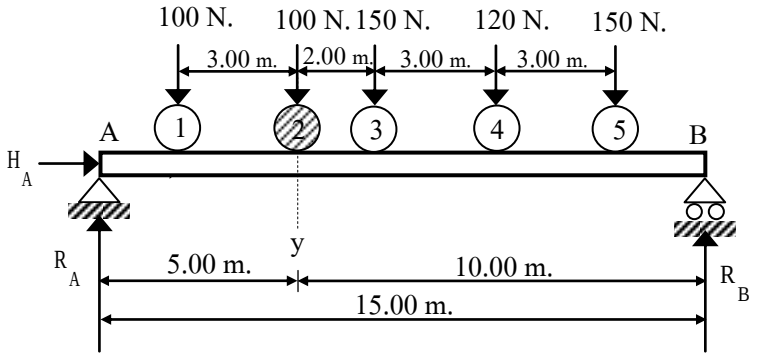
ภาพที่ 4.34 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)



วิธีทำ

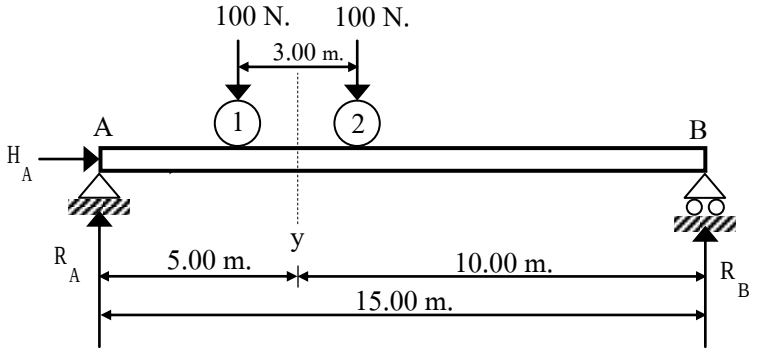
(1) เมื่อล้อที่ 1 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 2 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 620 N.



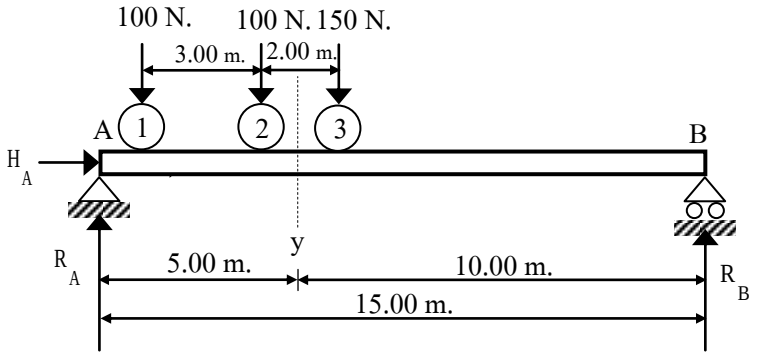
(ก)

ก) ขวามือ

$$\frac{620}{15.00} > \frac{100}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ข)

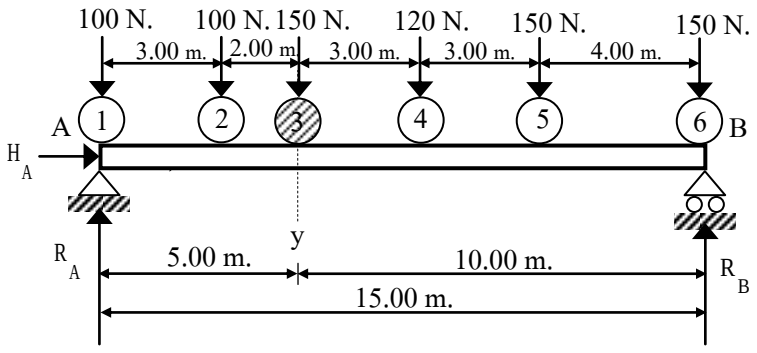


(ค)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{620}{15.00} > \frac{200}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

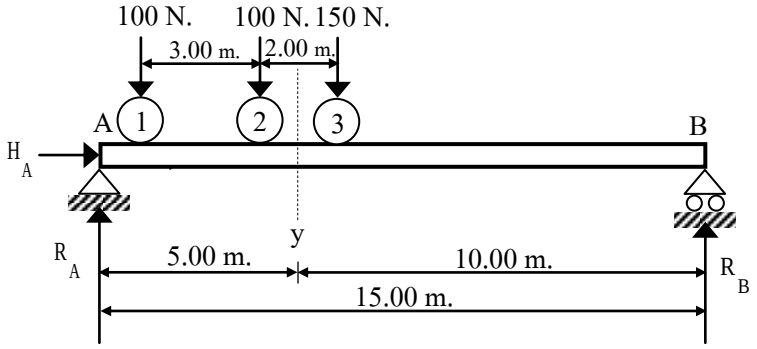
(2) เมื่อล้อที่ 2 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 3 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 2,200 N.



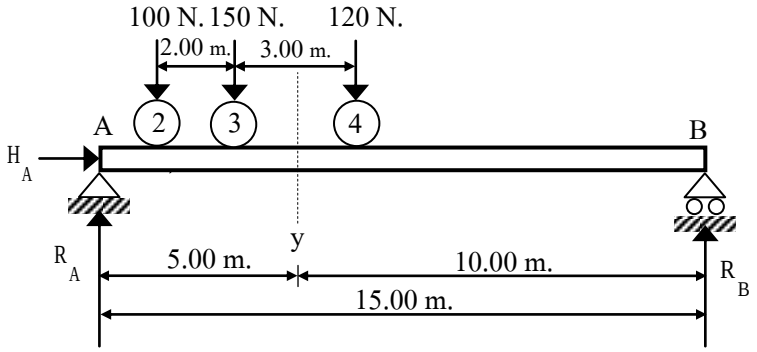
(ง)

ก) ขวามือ

$$\frac{770}{15.00} > \frac{100}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(จ)



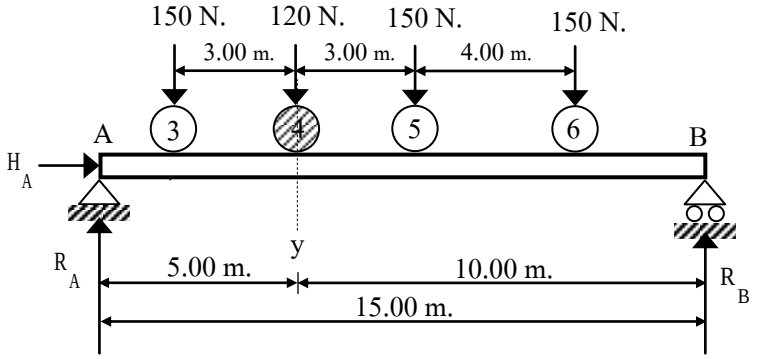
(ฉ)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{770}{15.00} > \frac{250}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

(3) เมื่อล้อที่ 3 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 4 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 570 N.

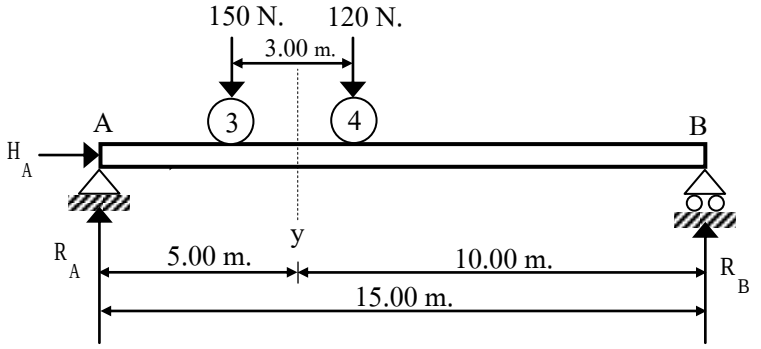
.



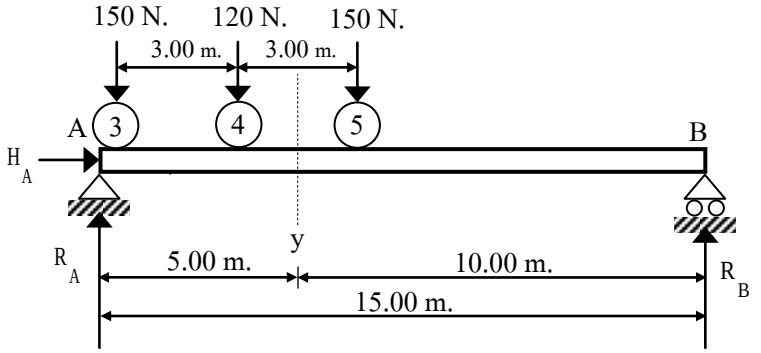
(ช)

ก) ขวามือ

$$\frac{570}{15.00} > \frac{150}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ช)

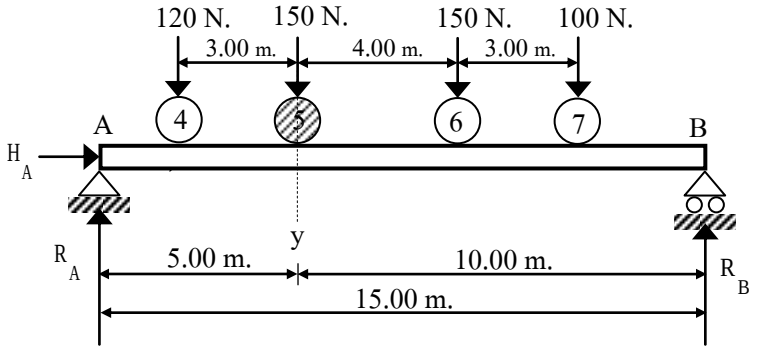


(ญ)

ข) ซ้ายมือ

$$\frac{570}{15.00} > \frac{150}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด

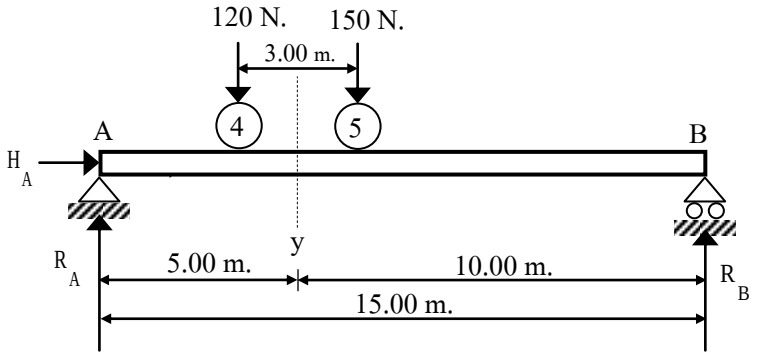
(3) เมื่อล้อที่ 4 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 5 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 520 N.



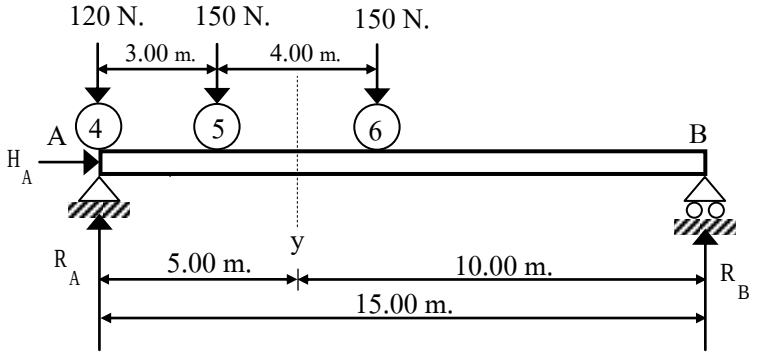
(ฌ)

ก) ขวามือ

$$\frac{520}{15.00} > \frac{120}{5.00}$$ โมเมนต์ยังไม่สูงสุด



(ค)

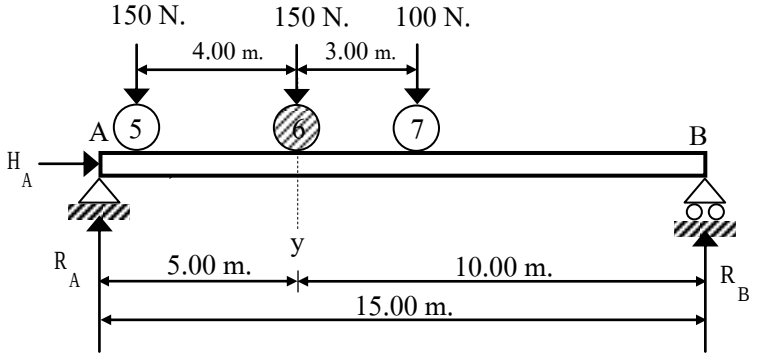


(ต)

ก) ขวามือ

$$\frac{520}{15.00} < \frac{270}{5.00}$$ **โมเมนต์สูงสุด**

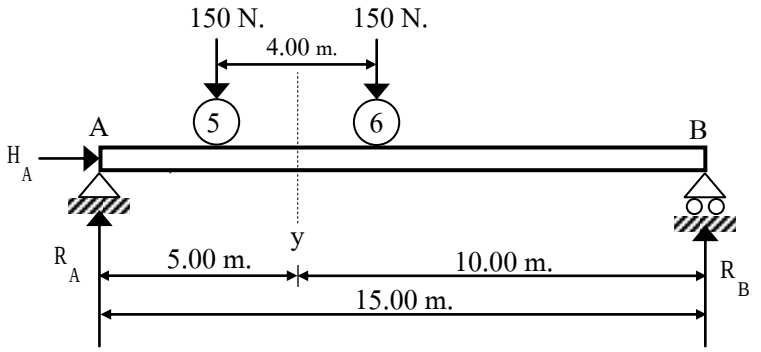
(3) เมื่อล้อที่ 5 เคลื่อนที่ออกไป ล้อที่ 6 อยู่ที่รอยตัด y-y น้ำหนักที่บนโครงสร้างคานเท่ากับ W = 400 N.



(ฉ)

ก) ขวามือ

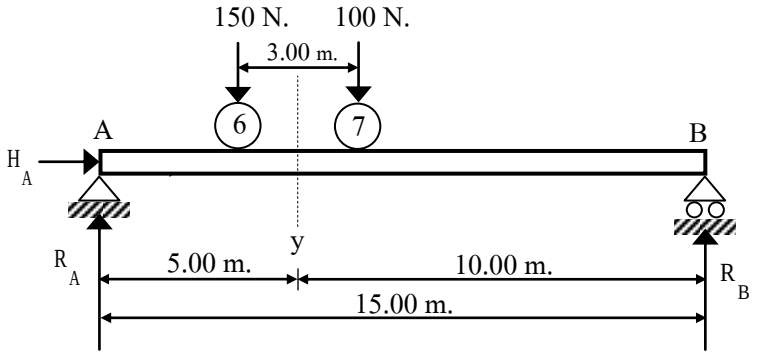
$$\frac{400}{15.00} < \frac{150}{5.00}$$ **โมเมนต์สูงสุด**



(ท)

ก) ขวามือ

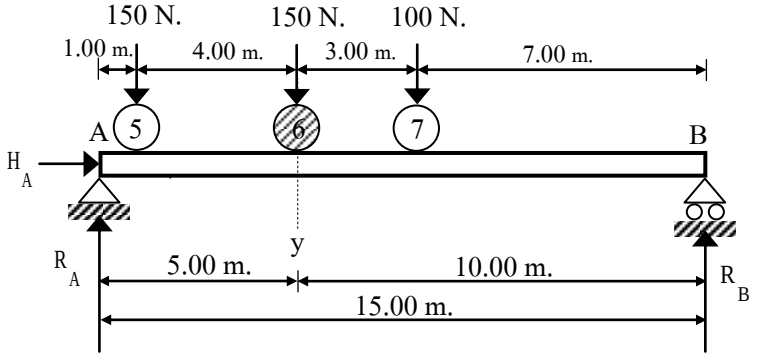
$$\frac{400}{15.00} < \frac{150}{5.00}$$ **โมเมนต์สูงสุด**



(ธ)

ดังนั้น W = 1,945 N. เมื่อล้อ 5, 6 และ 7 + Trail Wheel

∴ โมเมนต์สูงสุดเมื่อล้อที่ 6 อยู่ที่จุด y-y ดังนี้



(น)

ตรวจสอบ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 15.00 - 100\times 7.00 - 150\times 10.00 - 150\times 14.00 = 0$$

$$R_A \times 15.00 - 700 - 1{,}500 - 2{,}100 = 0$$

$$R_A \times 15.00 - 4{,}300 = 0$$

$$R_B \times 15.00 = +4{,}300$$

$$R_A = +\frac{4{,}300}{15.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +286.67 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 15.00 + 100\times 8.00 + 150\times 5.00 + 150\times 1.00 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 + 800 + 750 + 150 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 - 1{,}700 = 0$$

$$-R_B \times 15.00 = -1{,}700$$

$$-R_B = -\frac{1{,}700}{15.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +113.33 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 150 - 150 - 100 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 941.67 N.

$$R_A + 113.33 - 400 = 0$$

$$R_A - 286.67 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +286.67 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาโมเมนต์สูงสุด Maximum at 5.00 m.

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$286.67\times 5.00 - 150\times 4.00 = 0$$

$$7 = 0$$

$$1{,}433.35 - 600 + My = 0$$

$$My = 833.35 \text{ N-m.}$$

ดังนั้น แรงปฏิกิริยา R_A เท่ากับ 286.67 N. ($\uparrow^+$) **ตอบ**

และ R_B เท่ากับ 113.33 N. ($\uparrow^+$) และ My = 833.35 N-m.

4.11 การเขียนเส้นอิทธิพลบนคานที่รับตงพื้น

การเขียนเส้นอินอิทธิพลบนคานที่รับตงพื้น (Floor Beam) จะแตกต่างไปจากการเขียนเส้นอิทธิพลดังที่ได้กล่าวมาแล้วในช่วงแรกๆที่ผ่านมานั้น โดยเฉพาะการเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับโมเมนต์ (Moment) และแรงปฏิกิริยา (Reaction) จะไม่มีอะไรเปลี่ยนแปลงมากนักลักษณะการเขียนเส้นอิทธิพลเหมือนเดิม แต่ในลักษณะของแรงเฉือนนั้นจะมีค่าแตกต่างจากคานธรรมดาโดยทั่วไป ดังนั้นลักษณะเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนจึงเปลี่ยนแปลงไปไม่เหมือนเดิม

ส่วนกรณีคานหลัก (Girder) ช่วงยาวถูกใช้สะพาน ภาระจรมักไม่กระทำบนคานหลักนี้โดยตรง แต่จะถูกถ่ายทอดมาโดยอาศัยคานซอย (Stringer) และระบบของคานพื้น (Floor Beam System) การจัดทำนองเดียวกันนี้ใช้ในสะพานโครงข้อหมุน ซึ่งรองรับล้อรถโดยผ่านทางพื้นสะพานไปยังคานซอย ซึ่งถูกถ่ายทอดไปยังคานพื้นและถ่ายทอดไปยังจุดช่วงแผ่นของโครงสร้างข้อหมุนอีกต่อเนื่องถ้าไม่คำนึงถึงรายละเอียดการก่อสร้าง เราอาจพิจารณาระบบนี้ดังในภาพที่ 4.33 ซึ่งมีคานหลัก AB รองรับคานพื้น ซึ่งรอบรับคานซอย ซึ่งวางขนานกับคานหลัก ส่วนของคานหลักระหว่างคานพื้น เช่น a-b,b-c เป็นต้น เรียกว่าช่วงแผ่น (Panels) และจุดปรายของช่วงแผ่น เป็นต้น เช่น a,b,c เป็นต้น เรียกว่าจุดช่วงแผ่น (Panel Points) เราสมมติว่าคานซอยแต่ละคานถูกรองรับอย่างเรียบง่ายบนคานพื้น ดังนั้น ภาระ P ที่กระทำบนคานซอยใดๆ จะถูกถ่ายทอดไปยังคานหลักเฉพาะที่จุดช่วงแผ่นที่เกี่ยวข้อง ฉะนั้น คานหลัก (หรือโครงข้อหมุน) จึงถูกกระทำเฉพาะที่จุดช่วงแผ่นไม่ว่าภาระแบบใดจะทำบนคานซอย การแบ่งภาระระหว่างจุดช่วงแผ่นทั้งสองไม่มีผลเปลี่ยนแปลงต่อแรงปฏิกิริยาที่จุด A และ B ต่อแรงเฉือนภายในของคานหลักระหว่างจุดช่วงแผ่นสองแผ่นที่อยู่ตัดกันจะมีค่าคงที่ ดังนั้น เรามักเรียกแรงเฉือนที่หน้าตัดใดๆ ของคานหลักนี้ว่าแรงเฉือนช่วงแผ่น (Panel Shear) โมเมนต์หลักของคานหลักระหว่างจุดช่วงแผ่นสองจุดที่อยู่ถัดกันไปส่วนมากจะเป็นเส้นตรงเสมอ

สำหรับแนวเส้นอิทธิพลของคานหลักที่ทำหน้าที่รองรับพื้น จะพบว่าแรงต่างๆ ได้แก่ น้ำหนักจร และน้ำหนักคงที่ เป็นต้น น้ำหนักต่างๆ ที่กล่าวมารวมถึงพื้นด้วยจะถูกถ่ายลงไปที่คานรองรับพื้น (Floor Beam) แล้วส่งต่อไปยังคานเชิงประกอบด้านข้าง (Side Girders) และท้ายที่สุดจะถูกรองรับด้วยเสา เมื่อพื้นถูกสมมติให้เป็นแผ่นพื้นทางเดียวและถูกแบ่งชิ้นส่วนย่อยเป็นช่วงความ

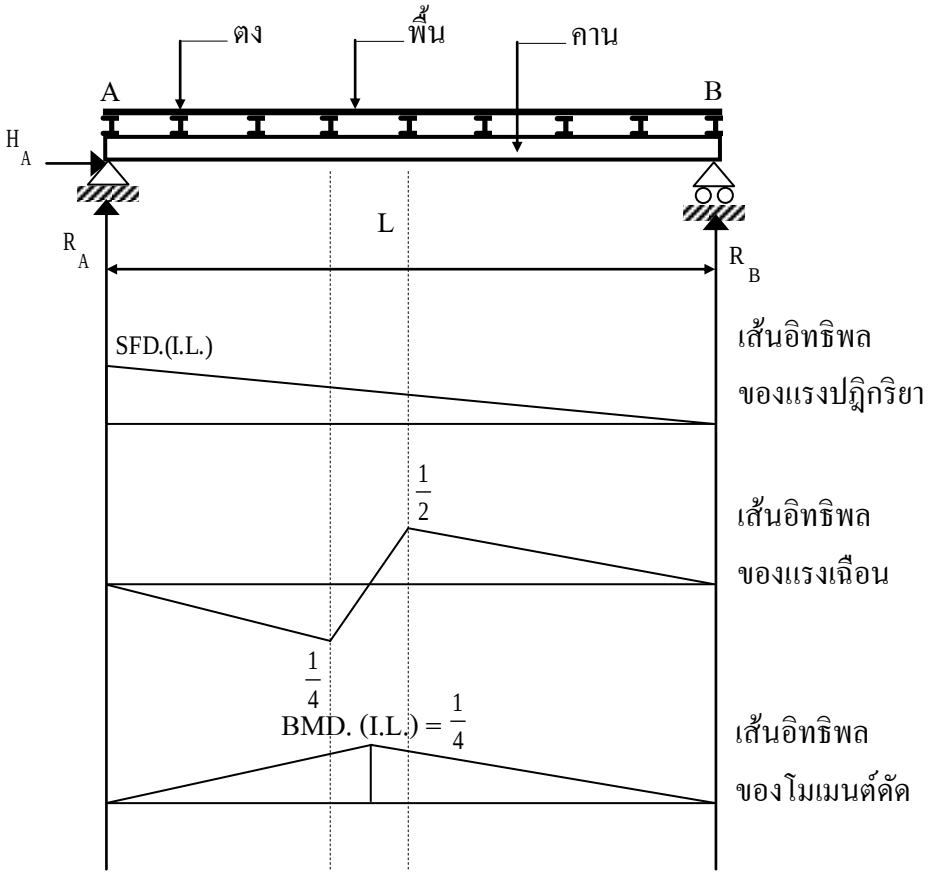
ยาวของที่รองรับอย่างง่ายที่อยู่นิ่งบนคานพื้น นอกจากนั้นคานเชิงประกอบจะถูกรองรับอย่างง่ายบนเสา เนื่องจากคานประกอบเป็นชิ้นส่วนที่รองรับอย่างง่ายที่อยู่นิ่งเป็นคานพื้น นอกจากนั้นคานเชิงประกอบจะถูกรองรับอย่างง่ายบนเสา เนื่องจากคานประกอบเป็นชิ้นส่วนที่รองรับแรงกระทำหลักในระบบนี้ บางครั้งจำเป็นต้องสร้างแนวเส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดของคานอุตสาหกรรมที่ถูกกระทำด้วยแรงกระทำแบบเป็นจุดที่มีค่ามาก ในกรณีนี้จะพบว่าแรงกระทำขนาดหนึ่งหน่วย (Unit Load) บนแผ่นพื้นจะถูกส่งถ่ายไปยังคานประกอบที่จุดซึ่งมีการสัมผัสกับคานพื้นนั้นที่จุด A B C และD เป็นต้น จุดดังกล่าวนี้จะถูกเรียกว่า จุดที่อยู่บนแผ่นพื้น (Panel Point) และแผ่นรองระหว่างจุดดังกล่าวนี้จะถูกเรียกว่า แผ่นพื้น (Panel) เช่น คาน ดังแสดงในภาพที่ 4.33

ในบางกรณีคานซอยอาจถูกรองรับแบบเรียบง่ายโดยมีส่วนยื่นก็ได้แต่ส่วนใหญ่ถูกรองรับแบบเรียบง่าย ดังภาพที่ 4.34

สำหรับการเขียนเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา (Reaction) แรงเฉือน (Shear) และโมเมนต์ (Moment) เป็นต้น สามารถใช้น้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) เราก็เอาน้ำหนักนั้นคูณเข้าไปกับค่าที่แสดงผลในการเขียนเส้นอิทธิพล ก็จะได้ค่าของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ หรือค่าของแรงเฉือน ซึ่งเกิดจากค่าน้ำหนักที่เคลื่อนที่ในโครงสร้างนั้นๆ

ในขณะที่กรณีน้ำหนักเคลื่อนที่เป็นน้ำหนักชนิดแผ่กระจายสม่ำเสมอค่าของโมเมนต์หรือค่าของแรงเฉือนซึ่งเกิดจากน้ำหนักที่มากระทำ เราก็จะหาได้โดยเอาพื้นที่ของเส้นอิทธิพลคูณด้วยน้ำหนักแผ่กระจายสม่ำเสมอ (W) เป็นต้น

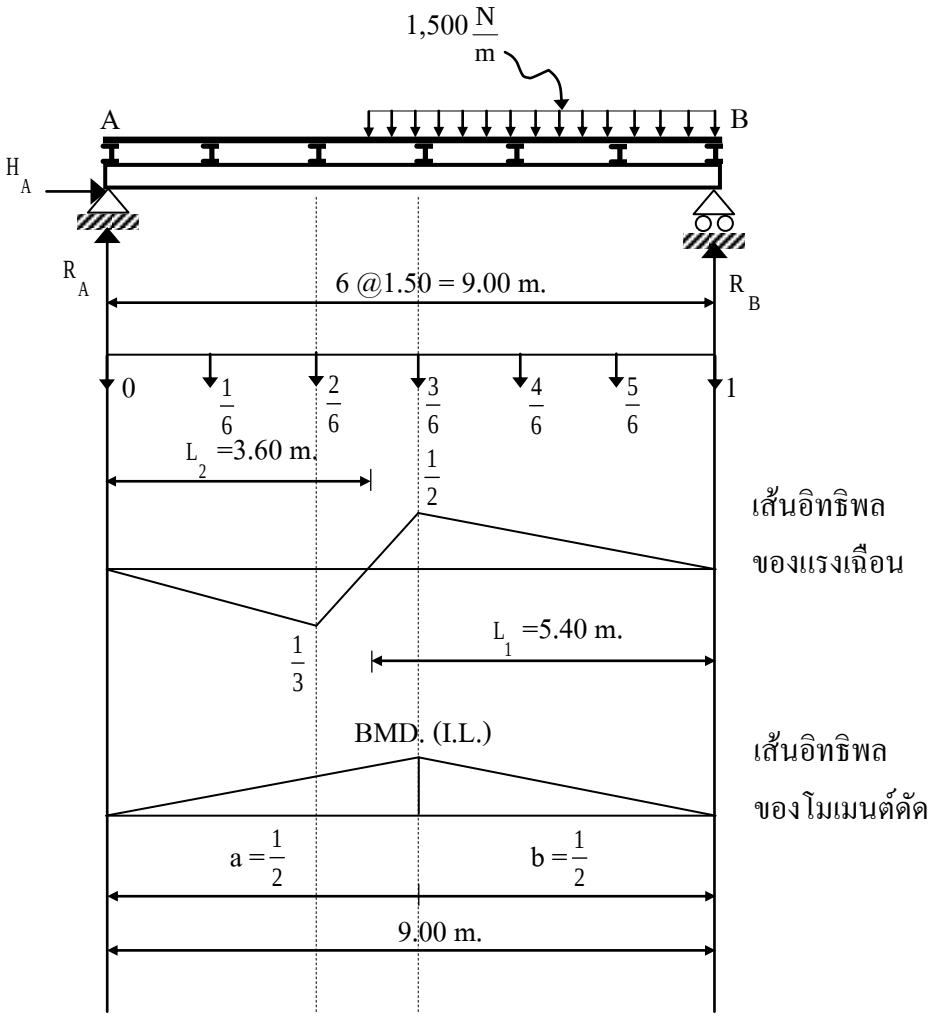
ตัวอย่างที่ 17 สมมติคาน AB มีความยาวเท่ากับ L มีตงวางเป็นระยะๆ โดยแบ่งการวางออกเป็น 8 ช่วง (Panel) มีน้ำหนักบรรทุกจรเท่ากับ 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่ไปบนพื้นโดยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จะสามารถสร้างเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดบนคาน AB ได้ ดังภาพที่ 4.35



ภาพที่ 4.35 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร.(2535)

ตัวอย่างที่ 18 สมมติคาน AB มีความยาวเท่ากับ L มีตงวางเป็นระยะๆ โดยแบ่งการวางออกเป็น 8 ช่วง (Panel) มีน้ำหนักบรรทุกจรเท่ากับ 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่ไปบนพื้นโดยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จะสามารถสร้างเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดบนคาน AB ได้ ดังภาพที่ 4.36



ภาพที่ 4.36 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาความยาว L_1 และ L_2

ก ด้านขวา $= \dfrac{\frac{1}{2}\times 1.50}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})} = 0.90$ m.

ข ด้านซ้าย $= \dfrac{\frac{1}{3}\times 1.50}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})} = 0.60$ m.

$\therefore \quad L_1 = 5.40$ m.

$\therefore \quad L_2 = 3.60$ m.

ขั้นตอนที่ 2 หาแรงเฉือนในช่วง 2 และ 3

แรงเฉือน = W×(พื้นที่ใต้เส้นอิทธิพล)

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 4.50\times 1{,}500+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 0.90\times 1{,}500$$

$\therefore$ แรงเฉือน = 2,025 N- m.

ตรวจสอบ $= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5.40\times 1{,}500$

$\therefore$ แรงเฉือน = 2,025 N.

ขั้นตอนที่ 3 หาโมเมนต์ที่จุด 3

$$M = \frac{ab}{L} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{L} = \frac{L}{4}$$

$$M_3 \quad \frac{1{,}500\times 9.00}{4} = 3{,}375 \text{ N- m.}$$

ตรวจสอบ = โมเมนต์มากที่สุดที่จุด 3

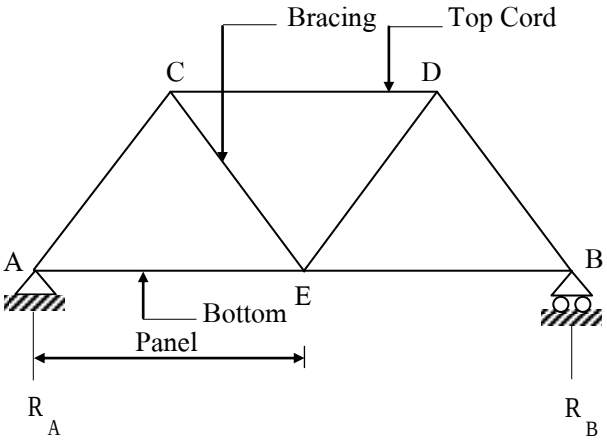
$$M_3 = \frac{ab}{L} = \frac{4.50\times 4.50\times 1{,}500}{9} = 3{,}375 \text{ N- m.}$$

4.12 การเขียนเส้นอิทธิพลบนโครงข้อหมุน

โครงสร้างข้อหมุนโดยทั่วไปจะถูกใช้เป็นชิ้นส่วนที่รองรับแรงกระทำหลักของสะพาน ดังนั้น ในการออกแบบจึงมีความสำคัญในการสร้างแนวเส้นอิทธิพลของแต่ละแนวชิ้นส่วน ในส่วนของแรงที่กระทำต่อพื้นของสะพานเริ่มแรกจะส่งถ่ายไปให้คานตามยาว (Stringers) ซึ่งจะส่งถ่ายไปยังแรงกระทำไปยังคานที่รองรับพื้นแล้วส่งต่อไปยังจุดต่อตามขื่อ (Bottom) ของโครงถัก ภาพที่ 4.35 เนื่องจากชิ้นส่วนของโครงถักมีผลกระทบจากแรงที่กระทำที่จุดต่อ เพื่อให้ค่าของแนวอิทธิพลของชิ้นส่วนโดยแรงกระทำแต่ละจุดต่อตามแผ่นพื้นที่มีแรงกระทำหนึ่งหน่วยแล้วใช้วิธีจุดต่อหรือภาคตัดเพื่อคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วน ถ้าชิ้นส่วนรับแรงดึงจะถูกพิจารณาให้มีค่าเป็นบวกถ้าชิ้นส่วนใดรับแรงอัดจะถูกพิจารณาให้มีค่าเป็นลบ แนวเส้นอิทธิพลของชิ้นส่วน จะถูกสร้างโดยการวาดภาพจากข้อมูลและทำการเชื่อมต่อจุดพิกัดให้เป็นแนวเส้นตรงระหว่างจุดดังกล่าวนั้น

สำหรับการสร้างเส้นอิทธิพลสำหรับแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนก็ใช้วิธีเดียวกันกับที่กล่าวมาข้างต้น คือ ให้น้ำหนักจรบรรทุกจรหนึ่งหน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่ไปบนโครงสร้างนั้น และคำนวณหาแรงภายในชิ้นส่วนของโครงสร้างนั้นๆ (วินิต ช่อวิเชียร,2526:143)

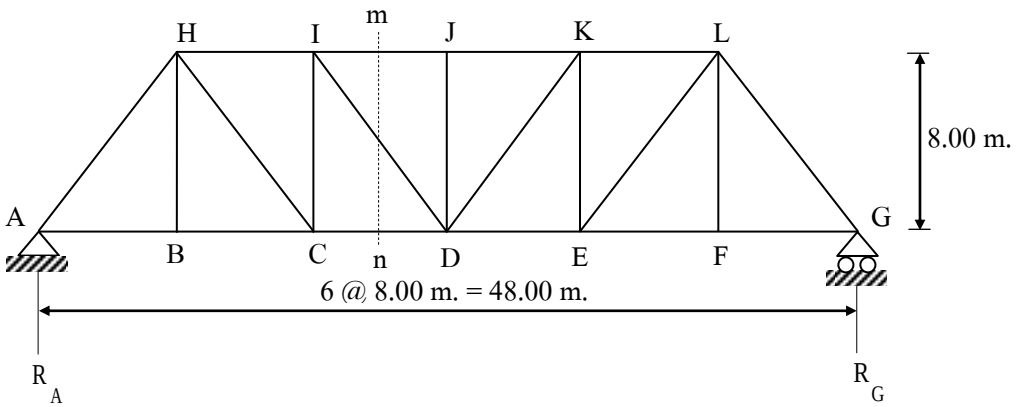
และเส้นอิทธิพลสำหรับสะพานของโครงข้อหมุนเขียนขึ้นเมื่อภาระหนึ่งหน่วยเคลื่อนที่ผ่านคอร์ดที่รับภาระซึ่งเป็นคร์อดที่รับภาระระบบพื้น เราจะสมมติว่าคานซอยมีที่รองรับแบบเรียบง่ายและวางพาดอยู่บนคานพื้น ทำให้ได้เส้นอิทธิพลเป็นเส้นตรงระหว่างจุดช่วงแผ่นสองจุดที่อยู่ถัดจากกันออกไปนั้น



ภาพที่ 4.37 ชิ้นส่วนของโครงถักสะพาน

ที่มา : วรรธนา พันธ์สว่าง (2545)

ตัวอย่างที่ 19 สำหรับโครงข้อหมุนแบบแพร์ท ซึ่งมีคร์อดบนและล่างขนานกัน มีความยาว 48.00 m. สูง 8.00 m. ดังภาพที่ 4.38 จงเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับ แรง N_{AH} ในชิ้นส่วน ah, แรง N_{bh} ในชิ้นส่วน bh, แรง N_{ci} ในชิ้นส่วน ci,แรง N_{cd} ในชิ้นส่วน cd และ แรง N_{di} ในชิ้นส่วน di เป็นต้น



ภาพที่ 4.38โครงข้อหมุนแบบแพร์ท

ที่มา : R.C. Hibbeler (1994)

วิธีทำ

สำหรับในการเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยา R_A เขียนเป็นเส้นเต็ม ส่วน R_G เขียนเป็นเส้นประดังภาพที่ 4.36 ข.

สมมติว่า ภาระหนึ่งหน่วยเคลื่อนที่เป็นระยะ x m. จากจุด A ไปทางขวามือ เส้นอิทธิพล **สำหรับ** N_{AH} แสดงในภาพที่ 4.36 ค. สามารถหาได้ ดังนี้

สำหรับจุก A $\quad \Sigma F_y = 0 \ \uparrow^+ \downarrow_-$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $N_{AH} = 0$

$8 \le x \le 48$ จะได้ $N_{AH} = \sqrt{2R_A}$

$0 \le x \le 8$ จะได้ $N_{AH} =$ แปรเป็นเส้นตรง

สำหรับ N_{AH} แสดงในภาพ 4.36 ง. สามารถหาได้ ดังนี้

สำหรับจุก B $\quad \Sigma F_y = 0 \ \uparrow^+ \downarrow_-$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $N_{BH} = 0$

เมื่อ $x = 8$ จะได้ $N_{BH} = 1$

เมื่อ $x \ge 16$ จะได้ $N_{BH} = 0$

สำหรับที่อื่นๆ จะได้ $N_{BH} =$ เป็นเส้นตรง

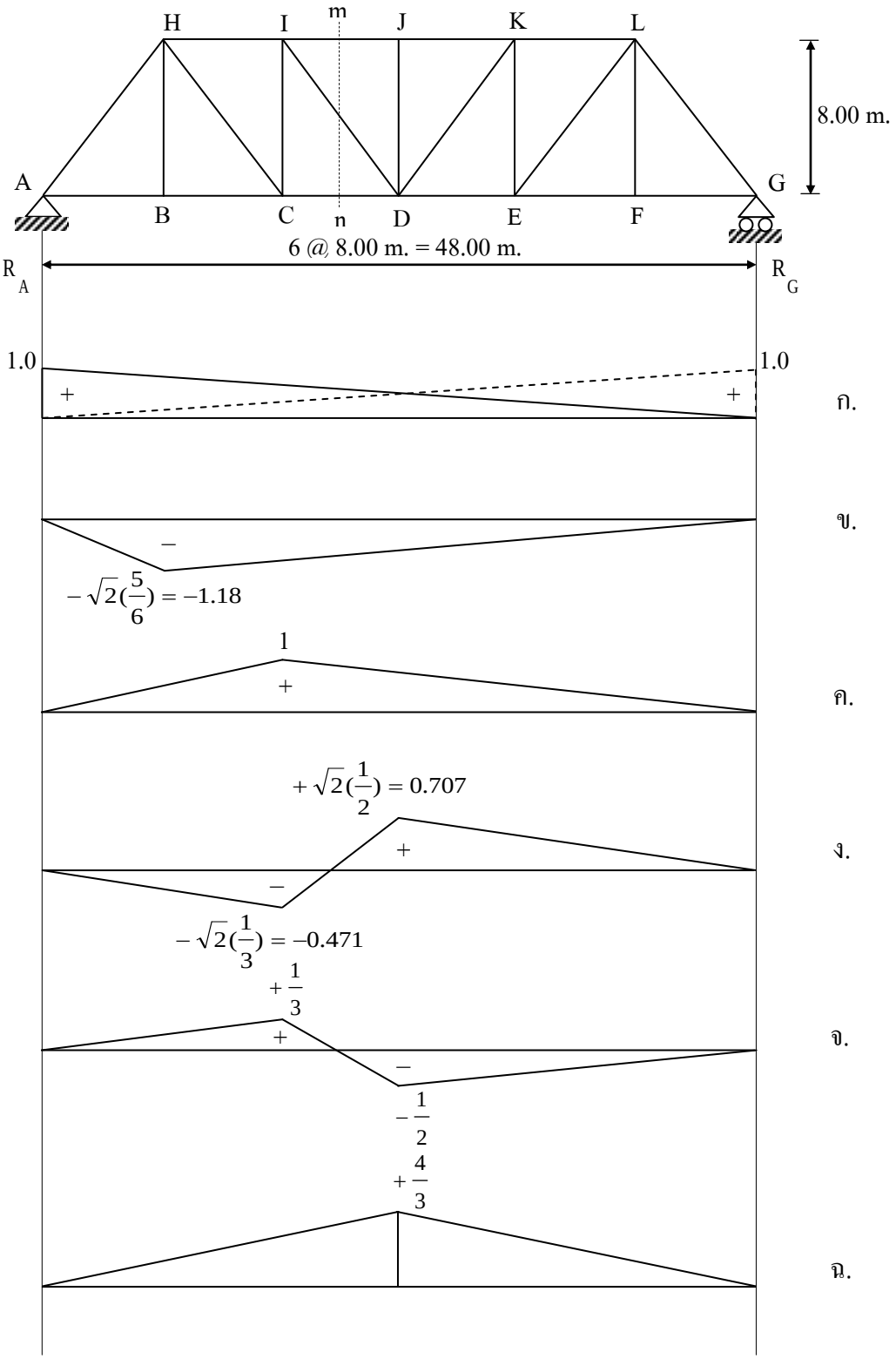
เส้นอิทธิพลสำหรับ N_{DI} แสดงในภาพ 4.36 จ. สามารถหาได้ ดังนี้

สำหรับจุก B $\quad \Sigma F_y = 0 \ \uparrow^+ \downarrow_-$

สำหรับส่วนตัดอิสระทางด้านขวาหรือด้านซ้ายของหน้าตัด m-n

$0 \le x \le 16$ จะได้ $N_{CD} = 32 \times \sqrt{\frac{R_G}{8}} = 4\ R_G$

$16 \le x \le 48$ จะได้ $N_{CD} = 16 \times \sqrt{\frac{R_G}{8}} = 2\ R_A$


H
I
m
J
K
L
8.00 m.
A
G
B
C
n
D
E
F
6 @ 8.00 m. = 48.00 m.
R A
R G
1.0
1.0
+
+
ก.
ข.
−
$-\sqrt{2}(\frac{5}{6}) = -1.18$
1
+
ค.
$+\sqrt{2}(\frac{1}{2}) = 0.707$
+
ง.
−
$-\sqrt{2}(\frac{1}{3}) = -0.471$
$+\frac{1}{3}$
+
จ.
−
$-\frac{1}{2}$
$+\frac{4}{3}$
ฉ.

บทสรุป

1) แรงปฏิกิริยาเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P(y)}{L}$ ……(4.16)

เมื่อน้ำหนัก P เคลื่อนที่ต่อไปเท่ากับระยะ y

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P(x+y)}{L}$ ……(4.17)

ผลที่เกิดจากการที่น้ำหนัก P เปลี่ยนไปเท่ากับระยะ y

แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{P(y)}{L}$ ……(4.18)

ตามปกติแล้วจะมีล้อที่เคลื่อนที่ที่อยู่หลายล้อ ฉะนั้นถ้าล้อที่เคลื่อนที่เท่ากับระยะ y

$\therefore$ แรงปฏิกิริยา $R_A = \frac{\sum Px}{L}$ ……(4.19)

2) การพิจารณาน้ำหนักที่เคลื่อนที่บนโครงสร้าง จาก B ไป A

$\therefore \Delta R = \frac{\sum P(y_1)}{L} - P_1$ ……(4.20)

ในเมื่อ

ΔR = การเปลี่ยนแปลงของแรงปฏิกิริยาเนื่องจากการเคลื่อนของน้ำหนักจากตำแหน่งหนึ่งไปอีกตำแหน่งหนึ่ง

$\sum P$ = ผลรวมของน้ำหนักบรรทุกๆ ล้อที่อยู่บนโครงสร้าง

y_1 = ระยะที่ล้อ P_1 ห่างจากล้อถัดไป

L = ความยาวของช่วงโครงสร้าง

P_1 = น้ำหนักที่เคลื่อนที่ออกจากโครงสร้าง

ในกรณีที่มีล้ออื่นเข้ามาในช่วงของโครงสร้างขณะเคลื่อนที่ สมการที่ 5 ก็จะเปลี่ยนเป็นดังนี้

$\therefore \Delta R = \frac{\sum P(y_1)}{L} + \frac{\sum P(y_1)}{L} - P_1$ ……(4.21)

ในเมื่อ :-

P' = ล้อที่เคลื่อนเข้าในโครงสร้างขณะที่เคลื่อนที่

y' = ระยะ P' เคลื่อนเข้ามาในช่วงของโครงสร้าง

3) การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับแรงเฉือน

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} + \frac{P'(y')}{L} - P_1 \quad \text{.....(4.22)}$$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1 - \frac{P'(a)}{L} + \frac{Z(b)}{L} \quad \text{.....(4.23)}$$

ΔV = การเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่เปลี่ยนตำแหน่ง

ΣP = ผลรวมของน้ำหนักบรรทุกๆ ล้อที่อยู่บนโครงสร้าง

P_1 = น้ำหนักเคลื่อนที่ออกไปจากรอยตัด y-y

P' = น้ำหนักเคลื่อนที่ออกไปจากโครงสร้าง

Z = น้ำหนักเคลื่อนที่เข้ามาในช่วงของโครงสร้างขณะที่เคลื่อนที่

a = ระยะ P' เคลื่อนที่ออกไปจากโครงสร้าง

y_1 = ระยะที่ล้อ P_1 อยู่ห่างจากรอยตัด y-y

b = ระยะที่ Z เคลื่อนที่เข้ามาในช่วงของโครงสร้าง

หมายเหตุ

1) เมื่อมีน้ำหนักเข้ามาในโครงสร้างขณะที่เคลื่อนที่ใช้สมการที่ (1)

2) เมื่อน้ำหนัก Z เข้ามาในโครงสร้างและน้ำหนัก P' ออกไปจากโครงสร้างขณะเคลื่อนที่ใช้สมการ (2)

3) เมื่อมีน้ำหนัก Z เข้ามาในช่วงโครงสร้างขณะเคลื่อนที่แต่ไม่มีน้ำหนักล้อหนึ่งล้อใดเคลื่อนออกไปจากโครงสร้างให้ใช้สมการ รายละเอียด ดังนี้

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\Sigma P(y_1)}{L} - P_1 + \frac{P'(y')}{L} \quad \text{.....(4.24)}$$

การสร้างเส้นอิทธิพลเนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่สำหรับโมเมนต์

$$\therefore \quad \Delta M = S - N \quad \text{.....(4.25)}$$

ในเมื่อ :-

ΔM = โมเมนต์ที่เปลี่ยนแปลงที่รอยตัด y เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง

S = โมเมนต์ที่เพิ่มขึ้นที่รอยตัด y เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ในช่วง B - y

N = โมเมนต์ที่ลดลงที่รอยตัด y เนื่องจากน้ำหนักเคลื่อนที่ในช่วง A -y

ในเมื่อ :-

W_1 = น้ำหนักเคลื่อนที่ทั้งหมดในช่วง A-y

W_2 = น้ำหนักเคลื่อนที่ทั้งหมดในช่วง B-y

i = ค่าโมเมนต์สูงสุดที่ y ของเส้นอิทธิพลของโมเมนต์

ดังนั้น :-

$$S = W_2 \times (\frac{i}{b})$$

$$N = W_1 \times (\frac{i}{a})$$

แทนค่า I , D ในสมการที่ (1)

$$\Delta M = W_2 \times (\frac{i}{b}) - W_1 \times (\frac{i}{a}) \quad \text{.....(4.26)}$$

เพื่อที่จะให้ค่าของโมเมนต์สูงสุดที่ y , $\Delta M = 0$

$$W_1 \times (\frac{i}{a}) = W_2 \times (\frac{i}{b}) \quad \text{.....(4.27)}$$

$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_2}{b} \quad \text{.....(4.28)}$$

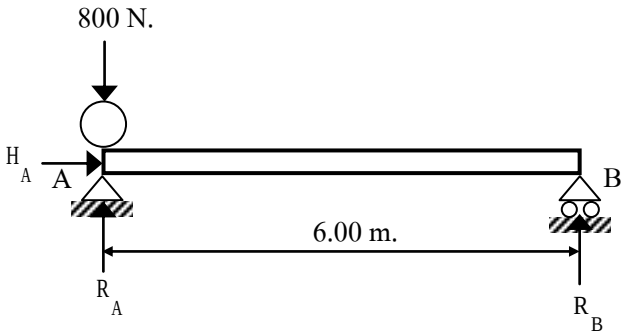
จากสมการที่ 5 จะเห็นว่ากรณีที่มากสุด y ก็ต่อเมื่ออัตราเฉลี่ยของน้ำหนักในช่วง Ay และ By เท่ากัน ดังนี้

$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_2}{b}$$

$$\frac{W_1}{a} = \frac{W_1 + W_2}{a + b} = \frac{W_2}{b} \quad \text{.....(4.29)}$$

แบบฝึกหัด

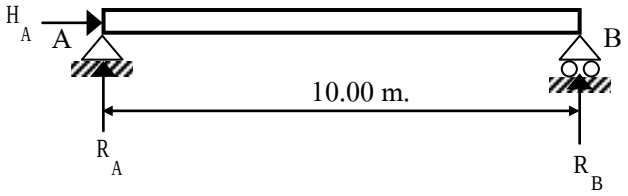
1. คาน AB มีความยาว 6.00 m. มีน้ำหนักกระทำบนคาน 800 N. เคลื่อนที่บนคาน A ไป B ไปทีละ 1.00 m. จงคำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาที่จุด B ดังภาพที่ 4.38 (R_B = 800 N.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 4.38 คานอย่างง่าย (Simple Beam)
ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

2. โครงสร้างยาว 10.00 m. มีน้ำหนักรถไฟผ่าน โดยเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง B ไป A จงหาแรงปฏิกิริยามากสุดที่จุด A ดังภาพที่ 4.39 (R_A =816.35 N. R_B = 413.35 N.)และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 4.39 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์.(2546)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

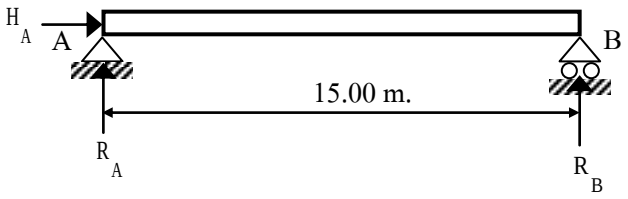
……

……

……

……

3. โครงสร้างยาว 12.00 m. มีน้ำหนักบรรทุกผ่าน โดยเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง B ไป A จงหาแรงปฏิกิริยามากสุดที่จุด A ดังภาพที่ 4.40 (R_A = 1,039.68 N., R_B =670.32 N.)



ภาพที่ 4.40 คานอย่างง่าย (Simple Beam)

ที่มา : บูรฉัตร ฉัตรวีระ(2545)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

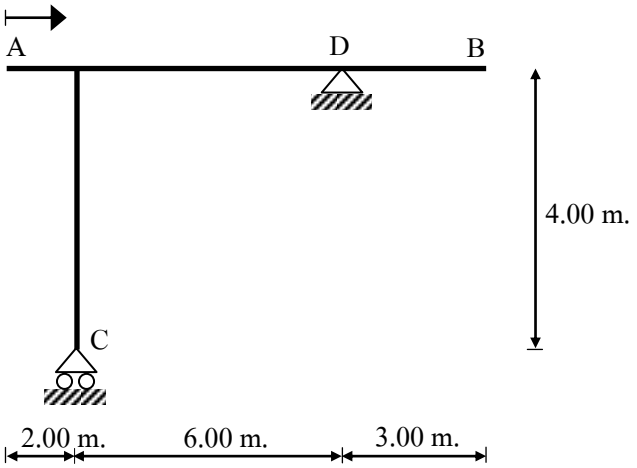
……

……

……

……

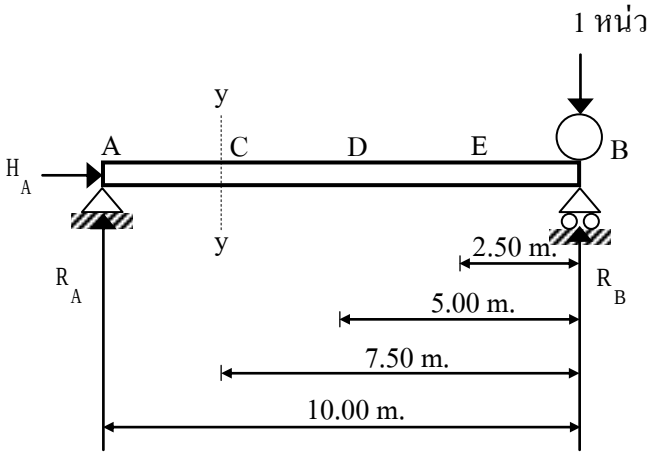
4. จงเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ D เมื่อน้ำหนักบรรทุก 1 หน่วยเคลื่อนที่จาก A ไป B ดังภาพที่ 4.41 (R_D =1.55 N.)



ภาพที่ 4.41 โครงข้อแข็ง (Rigid Farm)
ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

5. จงหาค่าแรงเฉือนสูงสุดที่จุด A B C D E และเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y ดังภาพที่ 4.42 (A = 0 N.,B= 0 N., C= 0.75 N., D=0.50 N., E= 0.25 N.)



ภาพที่ 4.42 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

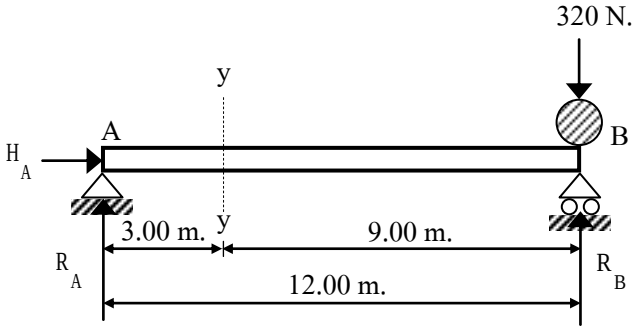
……

……

……

……

6. จงหาเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y-y ดังภาพที่ 4.43 (y^{+}=240 N.,y- = 80 N)



ภาพที่ 4.43 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:224)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

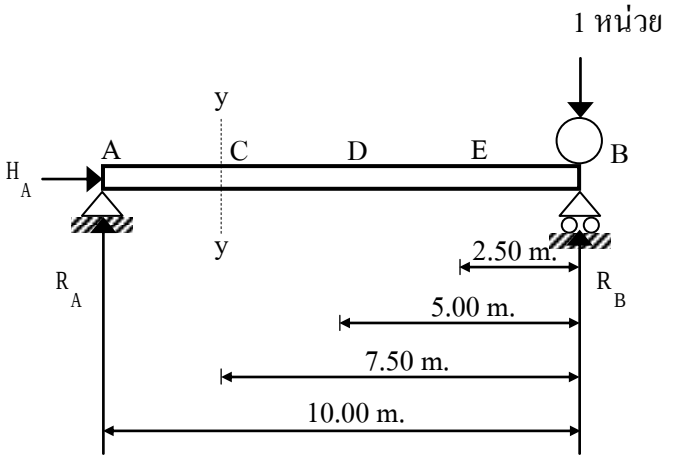
……

……

……

……

7. จงหาค่าแรงเฉือนสูงสุดที่จุด A B C D E และเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y ดังภาพที่ 4.44 (A=0 N.B=0.25 N.C=0.75 N.D=0.50 N.E=0.25 N.)



ภาพที่ 4.44 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูร.(2530)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

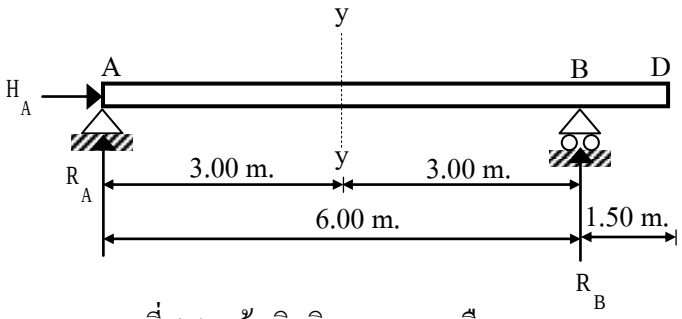
……

……

8. จงหาเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงเฉือนที่รอยตัด y-y ดังภาพที่ 4.45 และให้คำนวณหาแรงเฉือนที่รอยตัด y-y ที่มีค่ามากที่สุด เนื่องจาก

8.1 น้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบแผ่กระจายสม่ำเสมอเท่ากับ 600 N-m

8.2 น้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบกระทำเป็นจุดขนาดเท่ากับ 1,200 N-m ระยะห่างเท่ากับ 1.20 m. ($V_y = 0.50$ N.)



ภาพที่ 4.45 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2553)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

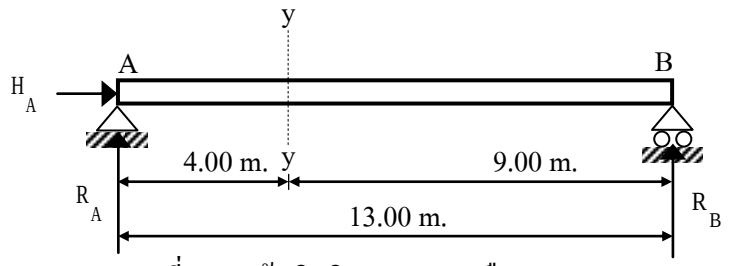
……

……

……

……

9. จากภาพที่ 4.46 คาน AB ยาว 15.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จงหาแรงเฉือนมากที่สุด ที่รอยตัดห่างจาก A เป็นระยะ 5.00 m. (Rmax =547.08 N.)



ภาพที่ 4.46 เส้นอิทธิพลของแรงเฉือน

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล.(2535).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

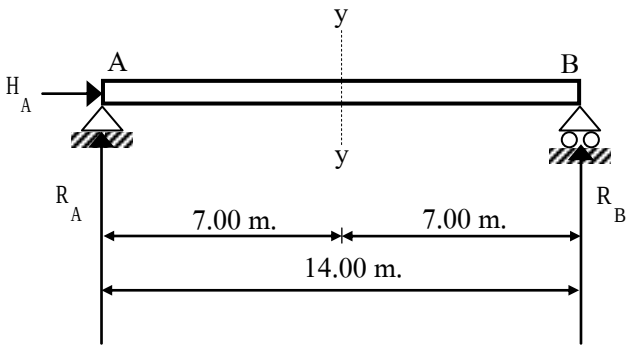
……

……

……

……

10. คาน AB ยาว 14.00 m. มีน้ำหนักเคลื่อนที่กระทำดังภาพที่ 4.47 และจงเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์มากสุดที่จุดกึ่งกลาง y – y (Mmax=2,058 N-m.)



ภาพที่ 4.47 คานช่วงเดียว (Simple Beam)

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร.(2535).

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

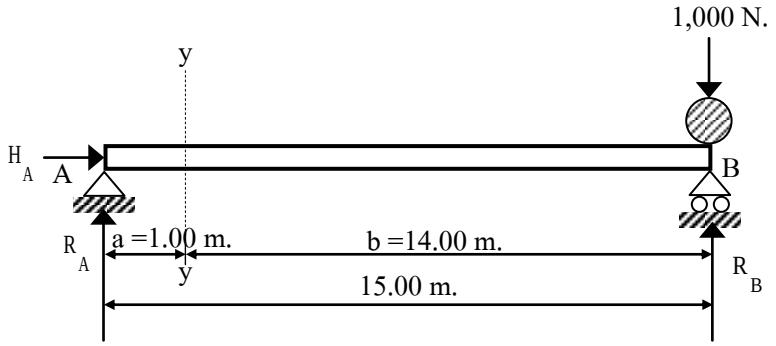
……

……

……

……

11. มีน้ำหนักเคลื่อนที่ไปบนโครงสร้าง (คาน) โดยเคลื่อนที่จาก A ไป B คานมีความยาว 15.00 m. มีน้ำหนัก 1,000 N. โดยเคลื่อนน้ำหนักจากห่างจากจุด A ไปทีละ 1.00 m. จงเขียนเส้นอิทธิพลของโมเมนต์มากสุดที่จุด y - y ดังภาพที่ 4.48 (Mmax=66.67 N.-m)



ภาพที่ 4.48 เส้นอิทธิพลของแรงดัดที่จุด y-y
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร.(2535)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

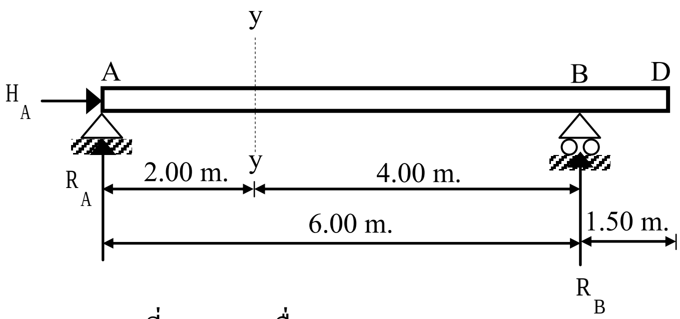
……

……

12. จงหาเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงดัด (Moment) ที่รอยตัด y-y ดังภาพที่ 4.49 และให้คำนวณหาแรงดัดที่รอยตัด y-y ที่มีค่าบวกสูงสุดและมีค่าลบสูงสุด ที่จุด y เนื่องจาก (M_y = 720 N-m.)

   12.1 น้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบแผ่กระจายสม่ำเสมอเท่ากับ 600 N/m

   12.2 น้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบกระทำเป็นจุดขนาดเท่ากับ 1,200 N.ระยะห่างเท่ากับ 1.20 m.

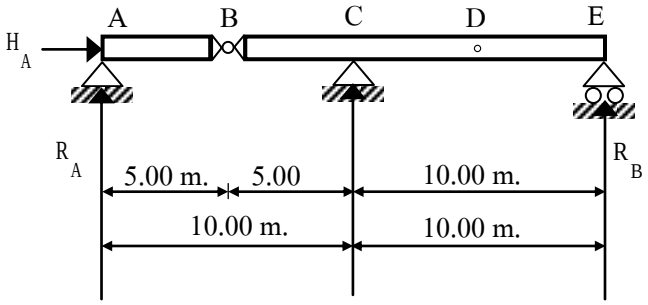


ภาพที่ 4.49 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...
………………………………………………………………………………………………………...

13. จงคำนวรหาโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวกมากที่สุด ที่สามารถเกิดขึ้นที่จุด D ในคานแสดงในภาพที่ 4.50 เนื่องจากแรงกระทำเป็นจุดขนาด 1,000 N. แรงจรที่กระจายสม่ำเสมอขนาด 850 $\frac{N}{m}$ และแรงคงที่ขนาด 500 $\frac{N}{m}$ (M_D =25,000 N-m.)



ภาพที่ 4.50 คานอย่างอยาก (Determinate Beam)

ที่มา : จำรูญ ตันติพิศาลกุล. (2525)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

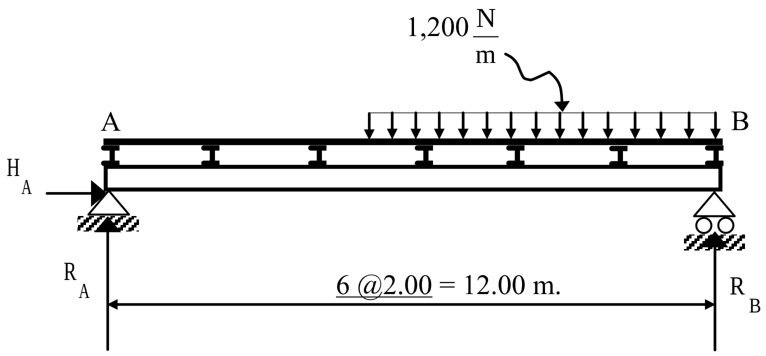
……

……

……

……

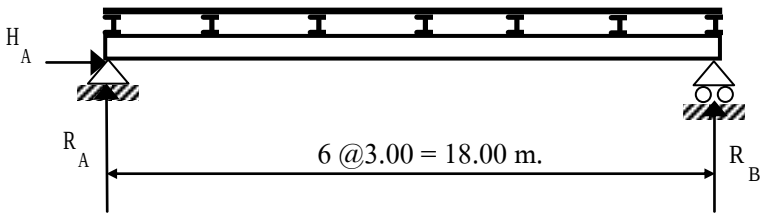
14. สมมติคาน AB มีความยาวเท่ากับ L มีตงวางเป็นระยะๆ โดยแบ่งการวางออกเป็น 6 ช่วง(Panel) มีน้ำหนักบรรทุกจรเท่ากับ 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่ไปบนพื้นโดยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จะสามารถสร้างเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดบนคาน AB ได้ดังภาพที่ 4.51 (M_3 =3,600 N-m.)



ภาพที่ 4.51 คานสะพานเพื่อห้าส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร.(2535)

…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...
…………………………………………………………………………………………………...

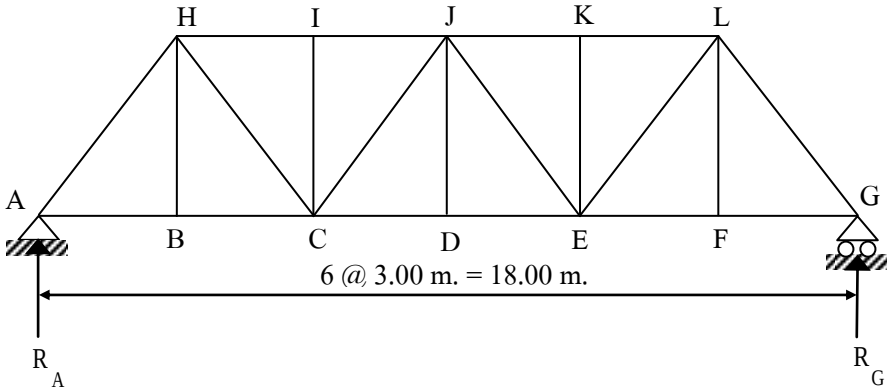
15. สมมติคาน AB มีความยาวเท่ากับ 18.00 m. มีน้ำหนัก W = 1,250 $\frac{N}{m}$ และมีตงพื้นวางเป็นระยะ โดยแบ่งการวางออกเป็น 6 ช่วง (Panel) มีน้ำหนักบรรทุกจรเท่ากับ 1 หน่วย (Unit Load) เคลื่อนที่ไปบนพื้นโดยน้ำหนักเคลื่อนที่จาก B ไป A จงหาแรงเฉือนมากที่สุดในช่วง 2-3 และโมเมนต์มากที่สุดที่จุด 3 ของคานใหญ่ ดังภาพที่ 4.52 (V_y = 15,625 N. และ M_3 = 1,125 N- m.)



ภาพที่ 4.52 คานสะพานเพื่อห้าส้นอิทธิพลของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
ที่มา : ตระกูล อร่ามรักษ์. (2535)

……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...
……...

16. สำหรับโครงข้อหมุนแบบแพร์ท ซึ่งมีคร์อดบนและล่างขนานกัน มีความยาว 48.00 m. สูง 8.00 m. ดังภาพที่ 4.53 จงเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับ แรง N_{AH} ในชิ้นส่วน AH, แรง N_{BH} ในชิ้นส่วน BH, แรง N_{CI} ในชิ้นส่วน CI,แรง N_{CD} ในชิ้นส่วน CD และ แรง N_{DI} ใน ชิ้นส่วน DI เป็นต้น (M_C mac. = 72,000 N. และน้ำหนัก คู่หนึ่ง = 15,333.33 N-m.)



ภาพที่ 4.53 โครงข้อหมุนแบบแพร์ท

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูร (2530:157)

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่1จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. หน่วยแรงต่างๆ ที่เกิดขึ้นภายในองค์อาคารต่างๆ นอกจากจะแปรผันตามขนาดของแรงกระทำแล้วยังขึ้นอยู่กับตำแหน่งของแรงที่ไม่กระทำด้วย

..... 2. การวางน้ำหนักบรรทุกจรที่บางช่วงคานอาจจะทำให้ค่าของโมเมนต์ที่ตำแหน่งเดียวกันของคานต่ำกว่าได้

..... 3. หลักการของมูลเลอร์ เบย์ลูร์กล่าวว่าแนวเส้นอิทธิพลซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของแนวแรงปฏิกิริยาของแรงเฉือนและโมเมนต์

..... 4. แผนภาพแรงเฉือนหรือโมเมนต์ดัดเขียนเพื่อแสดงภาระของคานเมื่อมีแรงกระทำในตำแหน่งคงที่

..... 5. แผนภาพแรงเฉือนหรือโมเมนต์เขียนเพื่อจะแสดงภาระของคานเมื่อแรงกระทำในตำแหน่งคงที่

..... 6. คานหลัก (Girder) ช่วงยาวถูกใช้ในงานสะพาน ภาระจรมักไม่กระทำบนคานหลักนี้โดยตรง แต่จะถูกถ่ายทอดมาโดยอาศัยคานซอยและคานรอง

..... 7. การเปลี่ยนแปลงของแรงปฏิกิริยาเนื่องจากการเคลื่อนที่จากตำแหน่งหนึ่งไปอีกสองตำแหน่งถัดไป

..... 8. คานซอยที่มีรองรับเรียบง่ายและวางพาดอยู่บนพื้นทำให้ได้เส้นอิทธิพลเป็นเส้นตรงจุดที่อยู่ถัดไปจากกันออกไป

..... 9. สำหรับการสร้างเส้นอิทธิพลสำหรับแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนโดยให้น้ำหนักจรหนึ่งหน่วย (Unit Load) หยุดนิ่ง ณ จุดใดจุดหนึ่ง

..... 10. การเขียนแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนและโมเมนต์สามารถใช้น้ำหนักหนึ่งหน่วย (Unit Load) คูณเข้าไปกับค่าที่แสดงผลในการเขียนเส้นอิทธิพล

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. หลักการของมูลเลอร์ เบย์ลูร์ เกี่ยวกับเส้นอิทธิพล คือข้อใด
   ก. รูปแบบการทรุดตัวหรือการเสียรูปของคาน เมื่อคานถูกแรงกระทำซึ่งไม่เป็นฟังก์ชั่นของตำแหน่งภายในโครงสร้าง
   ข. รูปแบบการทรุดตัวหรือเกิดจากแรงเฉือนโมเมนต์จะไม่ควบคู่ทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุจะมีค่าเป็นศูนย์
   ค. แนวเส้นอิทธิพลเป็นฟังก์ชั่นของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
   ง. แนวเส้นอิทธิพลไม่เป็นฟังก์ชั่นของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด
2. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้องมากที่สุด
   ก. ตำแหน่งที่ไม่ต่างกันของน้ำหนักบรรทุกทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรงในโครงสร้าง
   ข. ค่าสูงสุดของเส้นอิทธิพลอยู่ที่จุด A และน้ำหนักบรรทุกสูงสุดที่เคลื่อนที่ได้อิสระ
   ค. รูปร่างของเส้นอิทธิพลมีประโยชน์มากในการหาตำแหน่งของน้ำหนักบรรทุกที่จะทำให้เกิดค่าสูงสุดของปริมาณใดปริมาณหนึ่ง
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
3. ความหมายของเส้นอิทธิพลที่ถูกต้องคือข้อใด
   ก. แผนภาพแรงเฉือนหรือโมเมนต์เขียนเพื่อจะแสดงภาระของคานเมื่อมีแรงกระทำในตำแหน่งใดๆ ก็ได้
   ข. กราฟที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชั่นน้ำหนักที่กระทำในแนวดิ่งและแนวราบ
   ค. น้ำหนักที่กระทำปกติมีแรงลัพธ์ แรงปฏิกิริยา แรงเฉือนเฉพาะจุดบนคาน
   ง. ผังของแรงเฉือน โมเมนต์ดัด แสดงถึงภาระของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่เคลื่อนที่เฉพาะจุดเท่านั้น
4. ประโยชน์ของเส้นอิทธิพล คือข้อใด
   ก. ใช้เพื่อหาค่าสูงสุดของแรงเฉือนในแต่ละช่วงของคานที่รับตงพื้น
   ข. ใช้เพื่อหาค่าต่ำสุดของโมเมนต์ในแนวเส้นอิทธิพลได้เป็นอย่างดี
   ค. สามารถคำนวณได้โดยตรงที่มิต้องอาศัยกราฟของเส้นอิทธิพลจะกระทำได้อย่างรวดเร็ว
   ง. ข้อ ก และ ค ถูกต้อง

5. ในการเขียนเส้นอิทธิพล (Influence Line) สำหรับค่าแรงปฏิกิริยาเมื่อมีน้ำหนัก 1 หน่วย (Unit Load) กระทำต่อโครงสร้างเคลื่อนที่จาก A ไป B หรือจาก B ไป A เราจะได้เส้นอิทธิพลที่ คือข้อใด
   ก. ได้เส้นอิทธิพลที่ A
   ข. ได้เสนอิทธิพลที่ B
   ค. ได้เส้นอิทธิพลที่จุดตัด y-y
   ง. ได้เส้นอิทธิพลที่กึ่งกลางคาน
6. น้ำหนักบรรทุกจรสำหรับสะพานทางหลวง (Highway Bridges) ระบุไว้ในมาตรฐาน คือข้อใด
   ก. มาตรฐาน วสท.
   ข. มาตรฐาน AREA
   ค. มาตรฐาน AASHTO
   ง. มาตรฐาน JAPAN H.B.
7. น้ำหนักบรรทุกจรใช้กับทางรถไฟ (Railroad Bridges) ระบุไว้ในมาตรฐาน คือข้อใด
   ก. มาตรฐาน วสท.
   ข. มาตรฐาน AREA
   ค. มาตรฐาน AASHTO
   ง. มาตรฐาน JAPAN H.B.
8. ใครคิดค้นระบบแรงหรือระบบบรรทุกจรกระทำแบบ E สำหรับสะพานและทางรถไฟ คือข้อใด
   ก. ทีโอเดอร์ คูเปอร์
   ข. ดีเค เสตนแมนท์
   ค. โธมัส เอดิสัน
   ง. ไอน์สไตน์
9. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง
   ก. เส้นอิทธิพลที่ต่างชนิดกันย่อมมีเงื่อนไขสำหรับค่าสูงสุดเหมือนๆ กัน
   ข. การหาค่าตำแหน่งที่ภาระนี้ต้องกระทำเพื่อให้เกิดความเค้นจรสูงสุด
   ค. การหาค่าตำแหน่งที่ภาระนี้ต้องกระทำเพื่อให้เกิดความเครียดจรสูงสุด
   ง. ถูกทุกข้อ

10. เส้นอิทธิพลบนโครงข้อหมุน ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องมากที่สุด

ก. โครงข้อหมุนจะถูกใช้เป็นชิ้นส่วนที่รองรับแรงกระทำหลักของสะพาน

ข. แรงกระทำต่อพื้นที่ของสะพานเริ่มแรกจะส่งถ่ายไปให้ตามความยาว

ค. แรงกระทำจะส่งต่อไปยังคานที่รองรับพื้นและส่งถ่ายไปยังจุดต่อตามขื่อ

ง. ถูกทุกข้อ

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

ชนะ กสิภาร์. (2528). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชวนพิมพ์ จำกัด.

ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ. (2546). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ. (2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ธีรยุทธ สุวรรณประทีปและคณะ.(2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เมธี หมั่นทำการ และคณะ. (2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์**.กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

มนัส อนุศิริ. (2548). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก.** กรุงเทพฯ: :ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ยิ่งศักดิ์ พรรณเชษฐ์. (2541). **กำลังวัสดุเบื้องต้น**.พิมพ์ครั้งที่ 4 มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546).**ทฤษฎีโครงสร้าง** ภาควิชาครุศาสตร์โยธา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บัญชา สุปรินายก (2537). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ.

บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข. (2541). **กลศาสตร์วิศวกรรมภาคสถิติศาสตร์.หน่วยสารบรรณ.** ขอนแก่น: คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ศิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2536). **กำลังวัสดุ**. กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 4 โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.

เสกสรร ศรียศ. (2550). **กลศาสตร์วิศวกรรม1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์. (2536). **กลศาสตร์วัสดุ,** กรุงเทพพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สมนึก กุลประภา. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

สนั่น เจริญเผ่าและคณะ.(2521). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก**.กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ ป.พาณิชย์สัมพันธ์.

สงวน วงษ์ชวลิตกุลและคณะ. (2541). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แม็คกรอ-ฮิลอินเตอร์เนชั่นแนลเอ็นเตอร์ไพร์ส อิงค์.

สมาน เจริญกิจพูลผลและคณะ. (2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สมนึก กุลประภา (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

สุธรรม สุริยมงคล (2528). **การวิเคราะห์โครงอาคารรับแรงกระทำด้านข้างด้วยวิธีโครงทดแทน.** วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย กรุงเทพฯ: เล่มที่ 1 กุมภาพันธ์ 2528.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

สุรศักดิ์ รายี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

อำนวย พาณิชกุล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วทัชภพ เดชพันธ์ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

วินิจ ช่อวิเชียร (2528).**ทฤษฎีโครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วินิต ช่อวิเชียร (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

วีระศักดิ์ กรัยวิเชียรและคณะ. (2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980). **Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Bresler, B., Lin, T.Y., and Scalzi, J.B.: (1963). **Design of Steel Structural**. 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York.

Elwyn E. Seelye. (1960). **Data book for civil engineers**. New York.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

J.B.Wilbur (1965). **Elementary Structural Analysis ,**2^{nd} Ed, Mc Graw-Hill,New York.

Timoshenko,S.P. (1969).**S.P. and D.H.Young: Throry of Structures**, 2ed Ed., McGraw-Hill New York,

YUAN-YU HSIEH (1995)**.Elementary theory of Structural,** U.S.A,Mexico.

หน่วยที่ 5 แรงภายในในชิ้นส่วนโครงข้อหมุน

เนื้อหาสาระการเรียนรู้

5.1 บทนำ

5.2 ประเภทของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก

5.3 สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหรือโครงถัก

5.4 พฤติกรรมของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก

5.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนหรือโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง

5.6 การหาแรงภายในโครงข้อหมุนหรือโครงถัก

จุดประสงค์การเรียนรู้

5.1 อธิบายความหมายของส่วนประกอบของโครงข้อหมุนหรือโครงถักได้

5.2 อธิบายประเภทของโครงข้อหมุนหรือโครงถักได้

5.3 อธิบายสมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงข้อหมุนหรือโครงถักได้

5.4 อธิบายคำจำกัดความพฤติกรรมของโครงข้อหมุนหรือโครงถักได้

5.5 บอกชนิดของแรงภายในชิ้นส่วนของโครงข้อหมุนและเครื่องหมายแทนแรงได้

5.6 สามารถคำนวณหาแรงภายในโครงข้อหมุนหรือโครงถักโดวิธีคำนวณจุดต่อและคำนวณส่วนตัดได้

แนวคิดในการสอน

สำหรับ**โครงถัก** (Truss Structural) หรือ **โครงข้อหมุน** เป็นโครงสร้างที่เกิดขึ้นจากการนำเอาชิ้นส่วนหรือองค์อาคารมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นรูปทรงเลขาคณิต มีวัตถุประสงค์เพื่อให้ได้โครงสร้างที่มีน้ำหนักที่เบาแต่สามารถรับน้ำหนักได้มากและวางพาดช่วงยาวได้อย่างดีและมีประสิทธิภาพ ได้แก่ โครงสร้างสะพาน โครงหลังคาของโรงงาน หอประชุม อัฒจรรย์กีฬา โรงอาหาร บ้านพักอาศัย และอาคารสาธารณะต่างๆ เป็นต้น โครงถักหรือโครงข้อหมุนโดยทั่วไปจำทำจากไม้และเหล็กรูปพรรณ และคอนกรีต (สำหรับคอนกรีตไม่ค่อยนิยมในปัจจุบัน) ในการออกแบบโครงถักจะต้องทราบแรงที่เกิดขึ้นภายในชิ้นส่วนแต่ละชิ้นที่นำมาประกอบเป็นโครงถักซึ่งการวิเคราะห์หาแรงภายในโครงถักซึ่งสามารถหาได้มีวิธีต่างๆ ดังนี้ วิธีกราฟฟิก (Graphical Method) วิธีคำนวณจุดต่อ

(Joint Method) และคำนวณส่วนตัด(Section Method) เป็นต้น ในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีคำนวณจุดต่อ และคำนวณส่วนตัดเท่านั้นในขณะเดียวกันจะใช้โครงถักแทนโครงข้อหมุน เป็นต้น

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

5.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

5.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

5.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

5.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

5.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

5.1 สื่อ Power Point

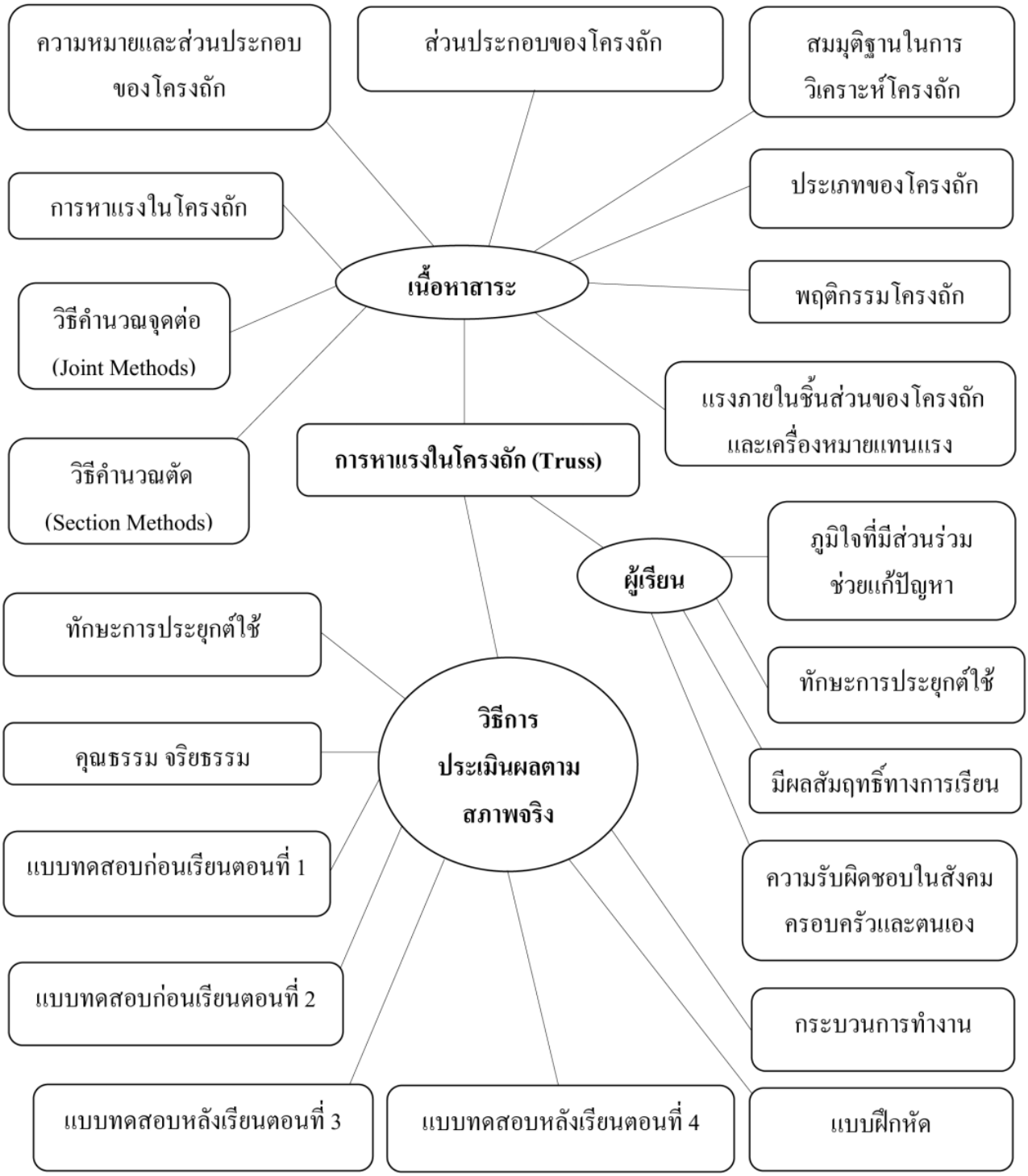
5.2 สื่อแผ่นใส

5.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

5.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 1 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. โครงถัก หมายถึง โครงข้อหมุนเป็นโครงสร้างที่เกิดขึ้นจากการเอาชิ้นส่วนหรือว่าองค์อาคารมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นรูปสี่เหลี่ยม

..... 2. รูปทรงพื้นฐานของโครงถัก คือ รูปสามเหลี่ยมประกอบด้วยชิ้นส่วนย่อยอย่างน้อย 4 ชิ้น

..... 3. โครงสร้างที่เป็นโครงถักจะประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้นมารวมกันเป็นโครงถักรูปแบบต่างๆ

..... 4. โครงสร้างอย่างง่าย คือ โครงสร้างแบบอินดีเทอร์มิเนทสแตติกส์

..... 5. โครงสร้างอย่างอยาก คือ โครงสร้างแบบอินดีเทอร์มิเนทสแตติกส์

..... 6. ประเภทของโครงถักสามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภท ได้แก่ โครงสร้างหลังคาและโครงสร้างสะพาน

..... 7. ในการคำนวณโครงถักจะต้องคำนวณชิ้นส่วนโครงถักก่อนถึงจะมาคำนวณหาแรงอัด

..... 8. แรงในชิ้นส่วนเป็น + แสดงว่าเป็นแรงดึง

..... 9. แรงในชิ้นส่วนเป็น – แสดงว่าเป็นแรงดึง

..... 10.ขั้นตอนในการคำนวณโครงถักเริ่มต้นด้วยการเขียนแผนผังอิสระของแรงต่อจากนั้นจึงหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ความหมายของโครงถัก คือข้อใด
   ก. การนำชิ้นส่วนมาประกอบกันโดยยึดปลายทั้งสองของชิ้นส่วนต่างๆ
   ข. การนำเอาชิ้นส่วนต่างๆ มาประสานกันโดยไม่ยึดปลายทั้งสองของชิ้นส่วนต่างๆ
   ค. รูปสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 3 ชิ้น โดยยึดปลายทั้งสองข้างด้วยหมุดย้ำ
   ง. โครงถักจะประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้นมารวมกันเป็นโครงถัก แบ่งได้เป็น 3 ชนิด
2. ส่วนประกอบของโครงถัก คือข้อใด
   ก. จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวนอน และค้ำยันในแนวเอียง
   ข. จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวดิ่ง และค้ำยันในแนวนอน
   ค. จันทัน ค้ำยันในแนวดิ่ง และค้ำยันในแนวเอียงและค้ำยันในแนวนอน
   ง. จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวดิ่ง และค้ำยันในแนวเอียง
3. ประเภทของโครงถัก มีกี่ประเภท คือข้อใด
   ก. มี 2 ประเภท
   ข. มี 3 ประเภท
   ค. มี 4 ประเภท
   ง. มี 5 ประเภท
4. รูปแบบของโครงถัก คือข้อใด
   ก. โครงถักหลังคา และโครงถักสะพาน
   ข. โครงถักหลังคา โครงถักสะพาน และโครงถักโดม
   ค. โครงถักหลังคา โครงถักสะพาน โครงถักโดม และโครงถักสนามกีฬา
   ง. โครงถักหลังคา โครงถักสะพาน โครงถักโดม โครงถักสนามกีฬา และโครงถักสนามกีฬา
5. โครงถักโครงหลังคา คือข้อใด
   ก. แบบโฮว์ (Howe Truss) และแบบเค (K-Truss)
   ข. (Howe Truss) และแบบแพรท (Pratt Truss)
   ค. แบบฟิงค์ (Fink Truss) และแบบบอลติมอ (Boltimore Truss)
   ง. แบบวอร์เรน (Worren Truss) และแบบเค (K-Truss)

6. ในการวิเคราะห์โครงถักให้ได้ค้าที่ถูกต้องและใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุดโดยมีข้อสมมุติฐานที่สำคัญ คือข้อใด
   ก. ชิ้นส่วนทุกชิ้นในโครงถักจะต้องมีความยาวเป็นเส้นเอียง
   ข. แนวเซ็นต์ทร์อยของแต่ละชิ้นส่วนที่ต่อกันจะพบกันที่จุดศูนย์กลางรอยต่อของชิ้นส่วน
   ค. น้ำหนักของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นส่วนมีค่ามากในการวิเคราะห์จะไม่นำมาเป็นองค์ประกอบในการพิจารณา
   ง. ถูกหมดทุกข้อ
7. ลักษณะเครื่องหมายของแรงในโครงถักสำหรับแรงดึง คือข้อใด
   ก. สัญลักษณ์ของแรงดึงเป็นบวก
   ข. สัญลักษณ์ของแรงอัดเป็นลบ
   ค. สัญลักษณ์ของแรงดึงเป็นบวกและลบสลับกันไป
   ง. ข้อ ก และ ง ถูกทุกข้อ
8. การวิเคราะห์หาแรงภายในที่เกิดขึ้นในโครงถัก สามารถแบ่งได้เป็นกี่วิธี คือข้อใด
   ก. แบ่งได้เป็น 2 วิธี
   ข. แบ่งได้เป็น 3 วิธี
   ค. แบ่งได้เป็น 4 วิธี
   ง. แบ่งได้เป็น 5 วิธี
9. วิธีจุดต่อ (Joint Methods) ที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. กำหนดทิศทางไปทางแกน X และ แกน Y
   ข. ใช้สมการสมดุล $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ และ $\Sigma M = 0$
   ค พิจารณาจุดต่อที่มีค่าไม่ทราบค่าเพียงสองตัว
   ง. ข้อ ค และ ข ถูกต้อง
10. วิธีจุดต่อ (Joint Methods) ที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. ทำการแตกแรงที่เอียงให้อยู่ในแนวแกน X และ แกน Y
   ข. ใช้สมการสมดุล $\Sigma F_x = 0$ และ $\Sigma F_y = 0$
   ค เมื่อทราบค่าแรงภายในที่จุดต่อแรกแล้ว ให้พิจารณาจุดต่อที่สองที่อยู่ติดกันและมีตัวไม่ทราบค่าไม่เกิน 2 ตัว
   ง. ถูกต้องหมดทุกข้อ

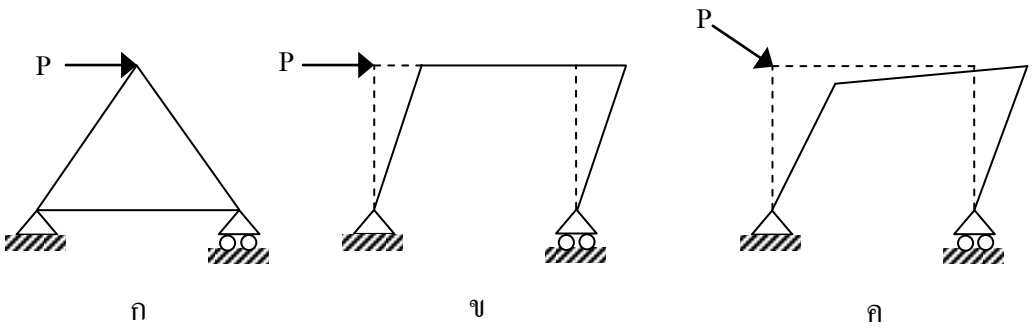
5.1 บทนำ

ในหน่วยนี้จะกล่าวถึงการหาความหมายและส่วนประกอบของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก ประเภทของโครงข้อหมุนหรือโครงถัก สมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก พฤติกรรมของโครงถัก แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักเครื่องหมายแทนแรงและการหาแรงในโครงถัก เป็นต้น เพราะว่านักศึกษาจะได้นำแรงในชิ้นส่วนของโครงสร้าง เป็นต้น แรงที่หาได้จากชิ้นส่วนของโครงถักสามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาขนาดของพื้นที่หน้าตัดของไม้และพื้นที่หน้าตัดของเหล็ก นอกจากนั้นยังมีการตรวจสอบแรงเฉือนและการโก่งตัวของโครงถักได้ต่อไป สำหรับในบทนี้จะใช้หรือเขียนโครงถักแทนโครงข้อหมุน เป็นต้น

5.1.1 ความหมายของโครงถัก

โครงข้อหมุนหรือโครงถัก (Truss) คือ การนำเอาชิ้นส่วนมาประกอบขึ้นเป็นรูปโครงสร้างแบบต่างๆ โดยยึดปลายทั้งสองของชิ้นส่วนต่างๆ ให้ยึดติดกันและสามารถถ่ายแรงให้กันได้ด้วยการเชื่อม (Welding) การใช้หมุดย้ำ (Rivet) หรือการใช้น็อต (Bolt) โครงสร้างที่นิยมใช้คือโครงถัก เช่น โครงหลังคาบ้านพักอาศัย โครงสร้างสะพาน โครงสร้างโรงงานอุตสาหกรรมต่างๆ เป็นต้น

สำหรับรูปทรงพื้นฐานของโครงถัก คือ รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 3 ชิ้นโดยยึดปลายของชิ้นส่วนด้วยหมุดย้ำ ดังแสดงในรูป 5.1 (ก) ซึ่งโครงถักลักษณะอย่างนี้จึงเป็นโครงสร้างที่มีเสถียรภาพมาก ส่วนโครงสร้างตามรูปที่ 5.1 (ข) และ 5.1 (ค) เป็นโครงสร้างที่มีรูปสี่เหลี่ยมเมื่อมีแรงทำต่อโครงสร้างจะทำให้โครงสร้างเกิดการเปลี่ยนรูปร่างได้ง่ายขึ้น ลักษณะโครงสร้างจึงไม่มีเสถียรภาพ



ภาพที่ 5.1 แสดงโครงสร้างถักแต่ละรูปทรง
ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541)

5.1.2 ส่วนประกอบของโครงถัก

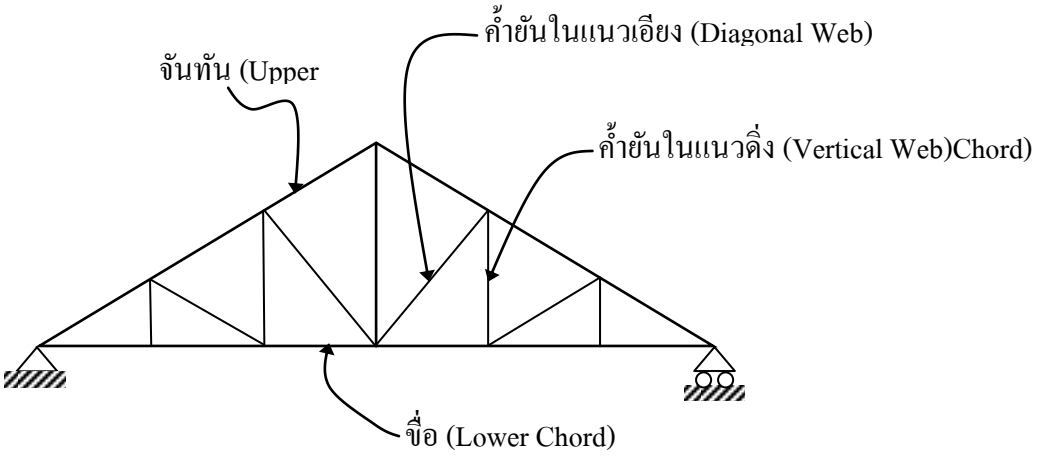
โครงสร้างที่เป็นโครงถัก (Truss) จะประกอบด้วยชิ้นส่วนหลายชิ้นมารวมกันเป็นโครงถักรูปแบบต่างๆ ซึ่งสามารถกำหนดชื่อเรียกส่วนประกอบต่างๆ ได้ 4 ชนิด ดังนี้

5.1.2.1 จันทัน (Upper Chord)

5.1.2.2 ขื่อ (Lowerl Chord)

5.1.2.3 ค้ำยันในแนวดิ่ง (Vertical Web)

5.1.2.4 ค้ำยันในแนวเอียง (Diagonal Web)



ภาพที่ 5.2 โครงสร้างถักแบบโฮว์

ที่มา : สนั่น เจริญเผ่า (2521)

5.2 บทนำ

5.2.1 ประเภทของโครงถัก

ประเทของโครงถักสามารถแบ่งออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ๆ ดังนี้

5.2.1.1โครงถักอย่างง่ายหรือแบบดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ (Statically Determinate Truss) เป็นโครงสร้างถักที่สามารวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล

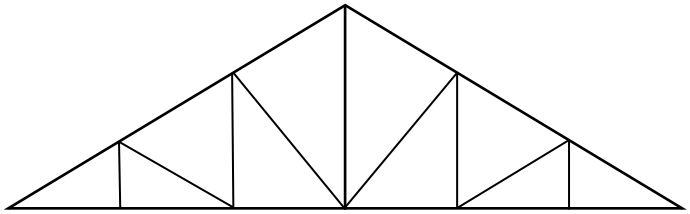
5.2.1.2 โครงถักอย่างยากหรือแบบอินดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ (Statically Indeterminate Truss) เป็นโครงถักที่ไม่สามารถหาค่าแรงต่างๆ ด้วยสมการสมดุลได้ ต้องใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงมาคำนวณหา

สำหรับในหน่วยการเรียนรู้นี้จะกล่าวถึงโครงถักอย่างง่ายหรือแบบแบบดีเทอร์มิเนทสแตติกส์เท่านั้น

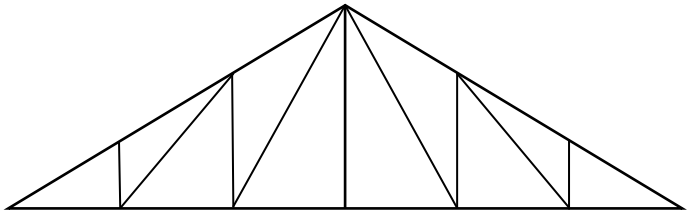
5.2.2 รูปแบบของโครงถัก

รูปแบบของโครงถักอาจแบ่งตามประเภทและลักษณะการใช้งานได้ 2 ประเภท ดังนี้

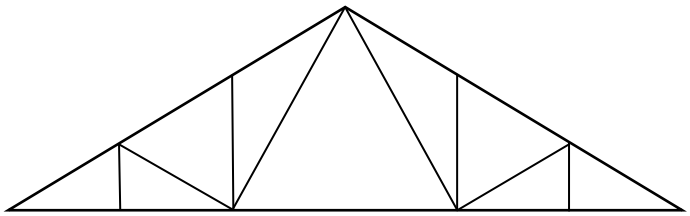
5.2.2.1 โครงถักแบบโครงหลังคา มีรูปแบบที่นิยมกัน ดังนี้



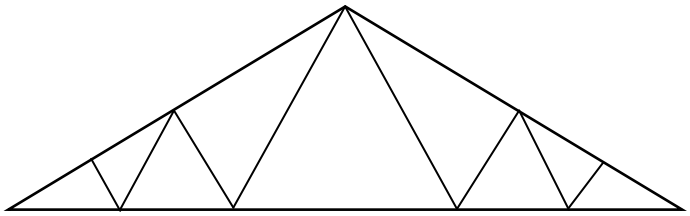
ก.แบบโฮว์ (Howe Truss)



ข.แบบแพรท (Pratt Truss)



ค.แบบแฟน (Fan Truss)

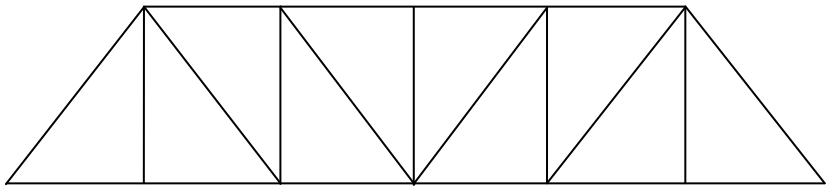


ง.แบบฟิงค์ (Fink Truss)

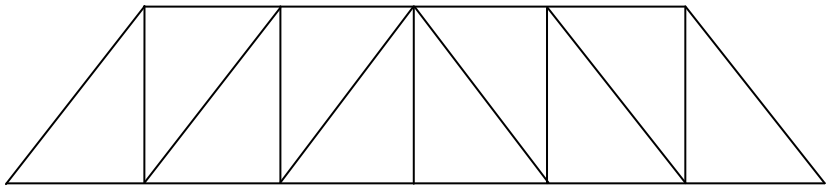
รูปภาพที่ 5.3 แสดงโครงถักแบบโครงหลังคา

ที่มา : อภิชาต จิรัฐยางกูร (2530)

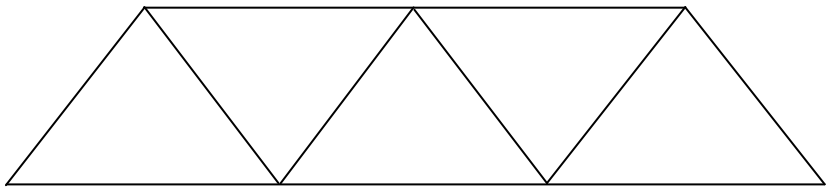
5.2.2.2 โครงถักแบบโครงสะพาน มีรูปแบบที่นิยมกัน ดังนี้



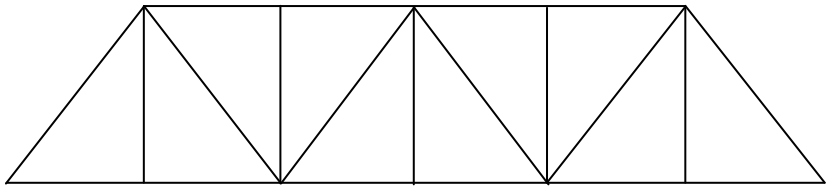
ก.แบบโฮว์ (Howe Truss)



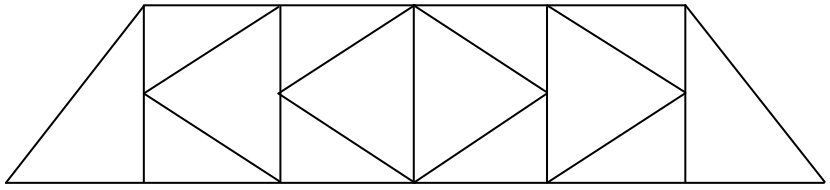
ข.แบบแพรท (Pratt Truss)



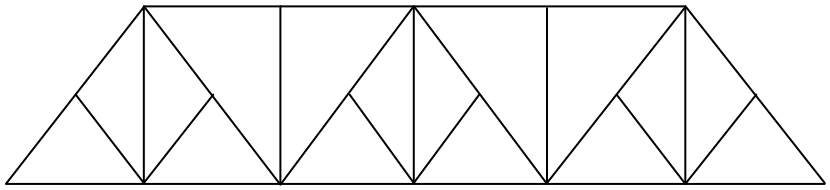
ค.แบบวอร์เรน (Warren Truss)



ง.แบบวอร์เรนมีค้ำยันแนวดิ่ง (Warren Truss with Vertical)



ข.แบบเค (K-Vertical)



ฉ.แบบบอลติมอร์ (Boltimore)

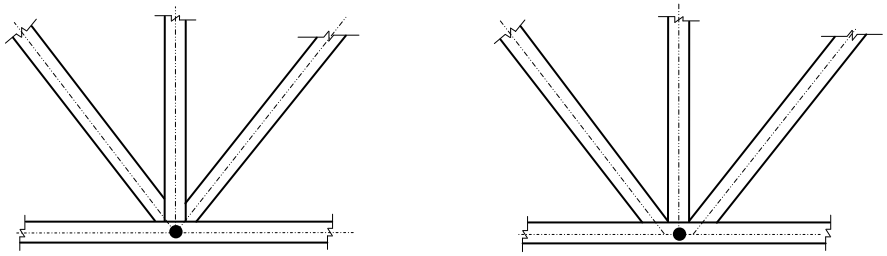
รูปภาพที่ 5.4 แสดงโครงถักแบบสะพาน
ที่มา : อภิชาต จิรัฐยางกูร (2530)

5.3 สมมติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก

ในการวิเคราะห์หาแรงภายในที่เกิดขึ้นภายในโครงถัก มีความจำเป็นที่จะต้องมีข้อตกลงหรือข้อสมติฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้องและใกล้เคียงกับความเป็นจริงให้มากที่สุด โดยมีข้อสมมติฐานที่สำคัญ ดังนี้

5.3.1 ชิ้นส่วนทุกชิ้นในโครงถักจะต้องมีความยาวเป็นเส้นตรง

5.3.2 แนวเซ็นต์ทรอยด์ของแต่ละชิ้นส่วนที่ต่อกันจะพบกันที่จุดศูนย์กลางของรอยต่อของชิ้นส่วน



ก.แบบถูกวิธี ข.แบบผิดวิธี

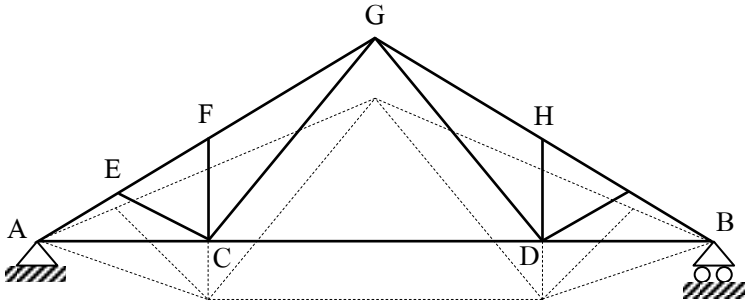
รูปภาพที่ 5.5 แสดงแนวแรงของชิ้นส่วน
ที่มา : สนั่น เจริญเผ่า (2521)

5.3.3 น้ำหนักของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมีค่าน้อยมากในการวิเคราะห์โครงสร้างจะไม่นำมาเป็นองค์ประกอบในการพิจารณา

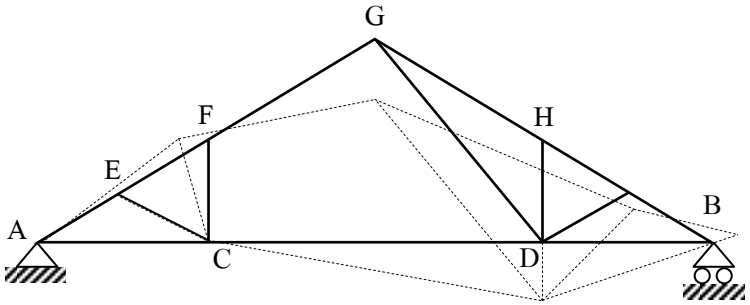
5.3.4 น้ำหนักบรรทุกที่กระทำกับโครงถักจะเป็นน้ำหนักแบบน้ำหนักกระทำเป็นจุด (Loint Load) ที่ตำแหน่งของข้อต่อเท่านั้น

5.4 พฤติกรรมของโครงถัก

ในการออกแบบและการวิเคราะห์หาแรงภายในโครงถักจำเป็นจะต้องออกแบบให้โครงถักมีเสถียรภาพไม่เปลี่ยนแปลงรูปร่างหรือไม่เกิดการเสียรูป ซึ่งรูปทรงเลขาคณิตที่ดีที่สุด คือ พิจารณาให้เป็นรูปสามเหลี่ยมหลายๆ รูปต่อกัน ตามรูปภาพที่ 5.4



ภาพที่ 5.6 แสดงพฤติกรรมของโครงถักเมื่อรับแรง
ที่มา : สุธรรม สุริยมงคล (2528)



ภาพที่ 5.7 แสดงพฤติกรรมของโครงถักกรณีที่ไม่มีชิ้นส่วน CG
ที่มา : สุธรรม สุริยมงคล (2528)

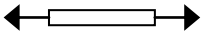
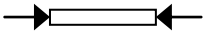
จากรูปภาพที่ 5.6 กรณีโครงถักที่ไม่มีชิ้นส่วน CG จะทำให้โครงถักขาดเสถียรภาพ เพราะว่ารูปทรงของโครงถักมีรูปสี่เหลี่ยม CFGD ทำให้โครงถักเมื่อรับแรงจะเกิดการเสียรูปค่อนข้างมากและพังเสียหายในที่สุด

สรุป หลักการออกแบบโครงถักที่ดีและมีเสถียรภาพจะต้องทำให้โครงถักเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangle) เพื่อให้เกิดการยึดรั้ง (Rigid)

5.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง

สำหรับแรงภายในชิ้นส่วนของโครงถัก โดยทั่วไปเมื่อทำการวิเคราะห์ แรงภายในชิ้นส่วนมี 2 แรง คือ แรงดึง (Tension ; T) และแรงอัด (Compaction ; C) สามารถใช้เครื่องหมายแทนแรงได้ดังนี้

ตารางที่ 5.1 แสดงสัญลักษณ์และเครื่องหมายที่ใช้แทนแรง

ชนิดแรง	สัญลักษณ์ตัวอักษร	เครื่องหมาย	สัญลักษณ์หัวลูกศร
แรงดึง (Tension)	T	+ (เครื่องหมายบวก)	
แรงอัด (Compression)	C	– (เครื่องหมายลบ)	

5.6 การหาแรงภายในโครงถัก (Truss)

การวิเคราะห์แรงภายในที่เกิดขึ้นในโครงถักต่างๆ นั้น สามารถแบ่งได้เป็น 3 วิธี ดังนี้

5.6.1 วิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method)

5.6.2 วิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method)

5.6.3 วิธีกราฟฟิก (Graphical Method)

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) และวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method) เท่านั้น เพราะว่าทั้งสองวิธีนี้จะให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องและใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด ส่วนวิธีกราฟฟิกนั้นเป็นวิธีที่หาค่าแรงภายในโดยประมาณเท่านั้นและจะมีความความคลาดเคลื่อนค่อนข้างมาก วิธีและขั้นตอนในการคำนวณโครงถักทั้ง 2 วิธี มีรายละเอียด ดังนี้

5.6.1 วิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method)

การคำนวณแรงภายในโดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) มีหลักในการคำนวณ คือให้พิจารณาจุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่าพียงสองตัว และใช้สมการของการสมดุล $\Sigma F_x = 0$ และ $\Sigma F_y = 0$ ในการแก้สมการค่าของแรงที่ไม่ทราบค่า สำหรับขั้นตอนในการคำนวณหาแรงในโครงถักโดยวิธีจุดต่อมีขั้นตอน ดังนี้

1) คำนวณหาค่าแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก

2) เขียนผังอิสระของแรง (Free Body Diagram)

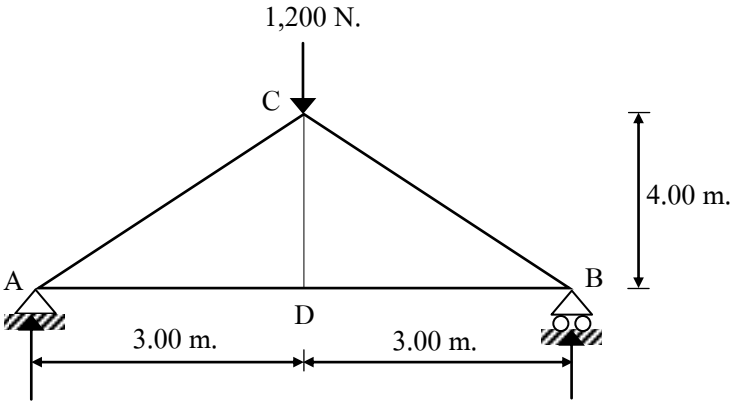
3) พิจารณาจุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่าที่มีจำนวนไม่เกิน 2 ตัวเท่านั้น โดยสมมุติให้แรงที่ไม่ทราบค่าเป็นแรงดึงไว้ก่อนเสมอ

4) แตกแรงที่เอียงในแนวแกน X และแนวแกน Y

5) ใช้สมการของการสมดุล $\Sigma F_x = 0$ และ $\Sigma F_y = 0$ คำนวณหาตัวไม่ทราบค่าโดยกำหนดให้แรงที่มีทิศทางขึ้นและไปทางขวาเป็นบวก กำหนดทิศทางลงและทิศทางลงไปทางซ้ายมีค่าเป็นลบ ถ้าแรงที่กำหนดได้มีค่าเป็นลบแสดงว่ามีการสมมุติหัวลูกศรผิด ให้กลับหัวลุกศรของแรงนั้นแล้วจึงคำนวณหาค่าแรงภายในโครงถักนั้นต่อไป

6) เมื่อทราบค่าแรงภายในโครงถักที่จุดต่อแรกแล้ว ให้พิจาณาจุดที่สองติดต่อกันและมีตัวไม่ทราบค่าไม่เกินสองตัว เพื่อคำนวณหาแรงในชิ้นส่วนของโครงถักที่ยังเหลือให้ครบ

ตัวอย่างที่ 5.1 จากภาพที่ 5.8 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.8 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1{,}200 \times 3.00 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 3{,}600 = 0$$

$$R_A \times 6.00 = 3{,}600$$

$$= \frac{3{,}600}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 6.00 + 1{,}200 \times 3.00 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 3{,}600 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 = -3{,}600$$

$$-R_B = -\frac{3{,}600}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 - 600 = 0$$

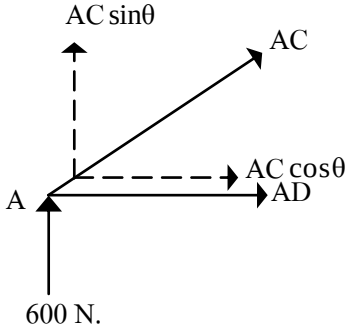
ดังนั้น R_A เท่ากับ 600 N.

$$1{,}200 + R_B - 600 = 0$$

$$R_B - 600 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ที่จุด A



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$AC + AC\sin\theta = 0$$

$$600 + AC\frac{4}{5} = 0$$

$$AC = -600 \times \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad AC = -750 \text{ N.} \text{ (แรงอัด)}$$

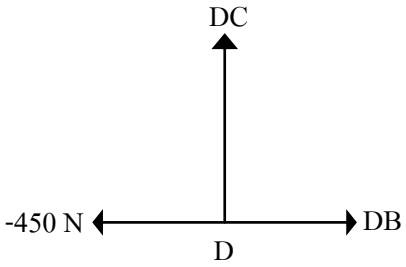
แรงตามแนวแกน ΣF_x = 0 $\uparrow^{+}\downarrow_{-}$

$AD + AC\cos\theta = 0$

$AD - AC\frac{3}{5} = 0$

$\therefore\ AD$ = 450 N. (แรงดึง)

ที่จุด D



แรงตามแนวแกน ΣF_y = 0 $\uparrow^{+}\downarrow_{-}$

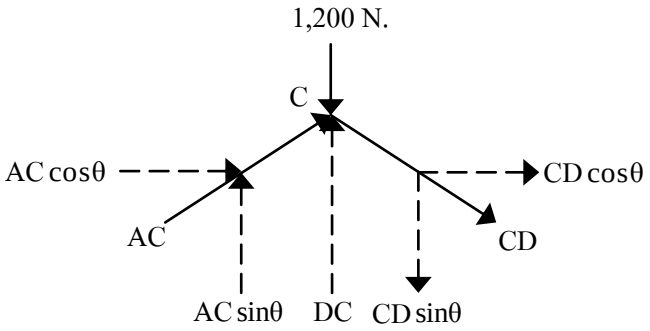
$DC = 0$

แรงตามแนวแกน ΣF_x = 0 $\overset{+}{\rightarrow}\overset{-}{\leftarrow}$

$-450 + DB = 450$

$\therefore\ DB$ = 450 N. (แรงดึง)

ที่จุด C



แรงตามแนวแกน ΣF_x = 0 $\overset{+}{\rightarrow}\overset{-}{\leftarrow}$

$AC\cos\theta + CD\cos\theta = 0$

$AC\times\frac{3}{5} + CB\times\frac{3}{5} = 0$

$-750\times\frac{3}{5} + CB\times\frac{3}{5} = 0$

$$-450 + CB \times \frac{3}{5} = 0$$

$$CB = 450 \times \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad CB = 750 \text{ N. (แรงดึง)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$AC \sin\theta - CB \sin\theta - 1{,}200 = 0$$

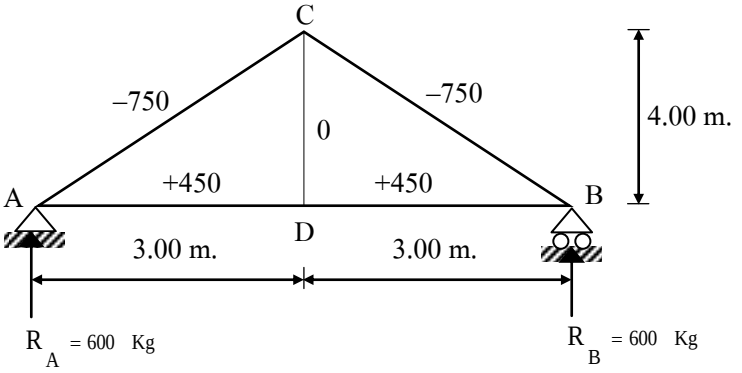
$$AC \times \frac{4}{5} + CB \times \frac{4}{5} - 1{,}200 = 0$$

$$750 \times \frac{4}{5} + CB \times \frac{4}{5} - 1{,}200 = 0$$

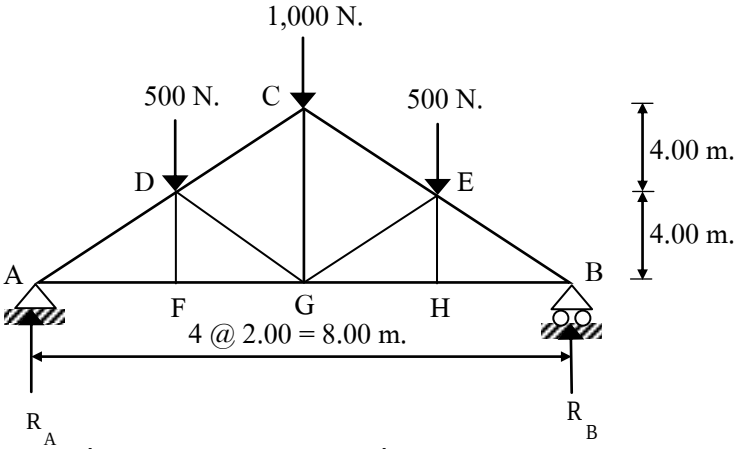
$$CB \times \frac{4}{5} - 600 = 0$$

$$CB = +600 \times \frac{5}{4}$$

$$\therefore \quad CB = +750 \text{ N. (แรงดึง)}$$



ตัวอย่างที่ 5.2 จากภาพที่ 5.9 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.9 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; ΣM_B $^{+}\circlearrowleft^{-}$ = 0

$$R_A \times 8.00 - 500 \times 6.00 - 1{,}000 \times 4.00 - 500 \times -2.00 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 8{,}000 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = +8{,}000$$

$$= +\frac{8{,}000}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 500 \times 6.00 + 1{,}000 \times 4.00 + 500 \times 2.00 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 8{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -8{,}000$$

$$= -\frac{8{,}000}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}000 - 500 - 500 = 0$$

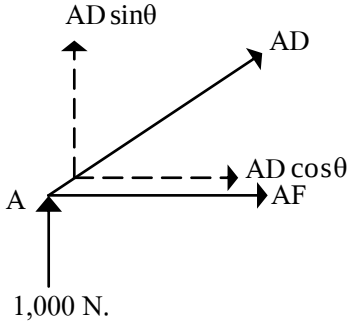
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,000 N.

$$1{,}000 + R_B - 2{,}000 = 0$$

$$R_B - 1{,}000 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ที่จุด A



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$AD\sin\theta + 1{,}000 = 0$$

$$AD \times \frac{4}{5.656} + 1{,}000 = 0$$

$$AD = -1{,}000 \times \frac{5.656}{4}$$

$$\therefore \quad AD = -1{,}414 \text{ N. (แรงอัด)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

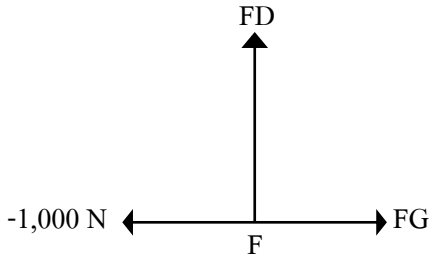
$$AF + AD\cos\theta = 0$$

$$AF + (-1{,}414.21) \times \frac{4}{5.66} = 0$$

$$AF - 1{,}000 = 0$$

$$\therefore \quad AF = +1{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด F



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

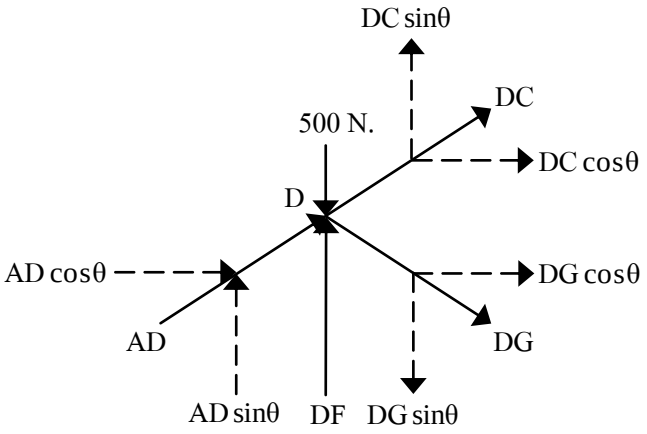
$$FD = 0$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

$$-1{,}000 + FG = 0$$

$$\therefore \quad FG = +1{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด D



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$AD\cos\theta - DG\cos\theta + DC\cos\theta = 0$$

$$AD\times\frac{4}{5.66} + DG\times\frac{4}{5.66} + DC\times\frac{4}{5.66} = 0$$

$$1{,}414\times\frac{4}{5.66} + DG\times\frac{4}{5.66} + DC\times\frac{4}{5.66} = 0$$

$$1{,}000 + (DG+DC)\times\frac{4}{5.66} = 0$$

$$(DG+DC) = -1{,}000\times\frac{5.66}{4}$$

$$\therefore\ (DG+DC) = -1{,}414 \quad \text{.....(1)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \overset{+}{\uparrow} \overset{-}{\downarrow}$

$$AD\sin\theta - DG\sin\theta + DC\sin\theta - 500 = 0$$

$$AD\times\frac{4}{5.656} + DG\times\frac{4}{5.66} + DC\times\frac{4}{5.66} - 500 = 0$$

$$1{,}414\times\frac{4}{5.66} + DG\times\frac{4}{5.66} + DC\times\frac{4}{5.66} - 500 = 0$$

$$500 + (DC+DG)\times\frac{4}{5.66} = 0$$

$$(DC - DG) = -500\times\frac{5.66}{4}$$

$$\therefore\ (DC - DG) = -707 \quad \text{.....(2)}$$

$$(DG+DC) = -1{,}414 \quad \text{.....(1)}$$

$$(DC-DG) = -707 \quad \text{.....(2)}$$

$$2DC = -2{,}121$$

$$\therefore \quad DC = -1{,}060 \text{ N. (แรงอัด)}$$

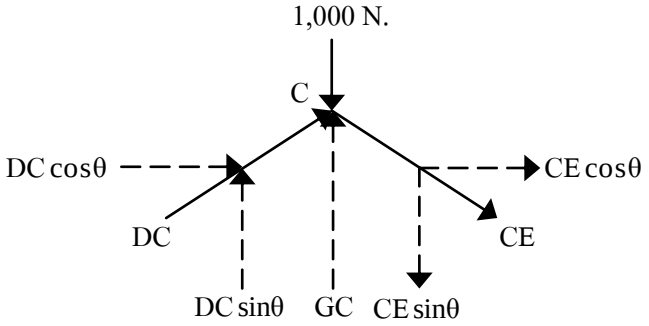
แทนค่าในสมการที่ (2)

$$(-1{,}060+DG) = -707$$

$$DG = -707+1{,}060$$

$$DG = -353 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ที่จุด C



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$DC\cos\theta + CE\cos\theta = 0$$

$$DC\times\frac{4}{5.66} + CE\times\frac{4}{5.66} = 0$$

$$1{,}060\times\frac{4}{5.66} + CE\times\frac{4}{5.66} = 0$$

$$750 + CE\times\frac{4}{5.656} = 0$$

$$CE = -750\times\frac{5.66}{4}$$

$$\therefore \quad CE = -1060 \text{ N. (แรงอัด)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

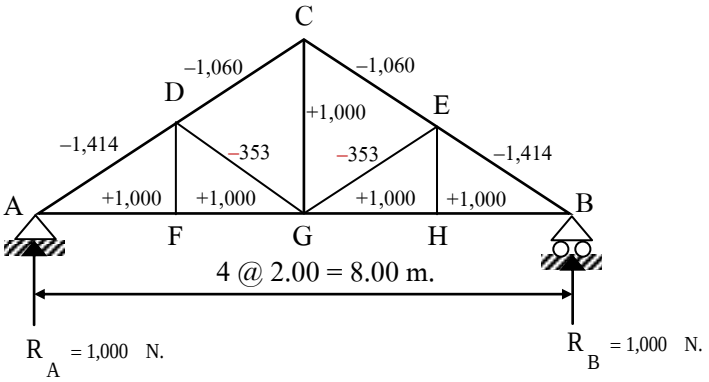
$$DC\sin\theta - CE\sin\theta + GC - 1{,}000 = 0$$

$$DC\times\frac{4}{5.66} + CE\times\frac{4}{5.66} + GC - 1{,}000 = 0$$

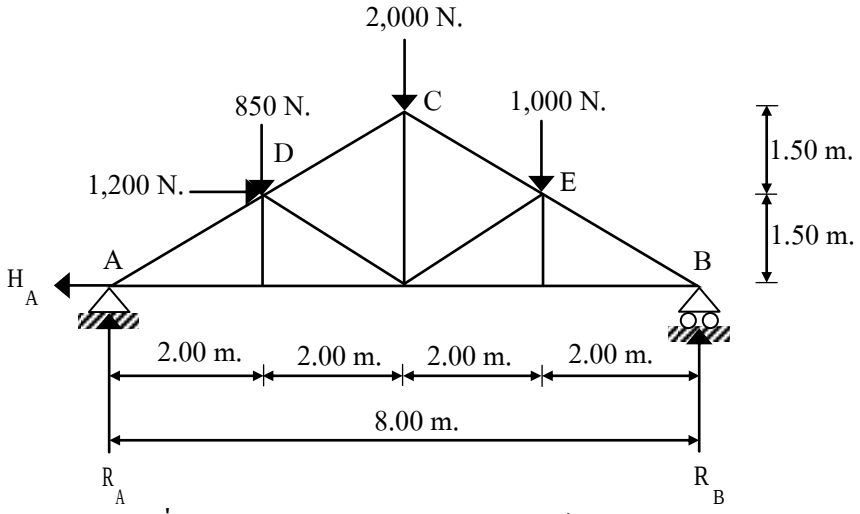
$$1{,}060\times\frac{4}{5.66} - 1{,}060\times\frac{4}{5.66} + GC - 1{,}000 = 0$$

$$GC - 1{,}000 = 0$$

$$\therefore \quad GC = +1{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$



ตัวอย่างที่ 5.3 จากภาพที่ 5.10 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.10 โครงสร้างหลังคาถักแบบโฮว์

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B $\Sigma M_B = 0$ (+↺)

$$R_A \times 8.00 - 1{,}000 \times 2.00 - 2{,}000 \times 4.00 - 850 \times 6.00 + 1{,}200 \times 1.50 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 2{,}000 - 8{,}000 - 5{,}100 + 1{,}800 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 13{,}300 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = +13{,}300$$

$$R_A = +\frac{13{,}300}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +1{,}662.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B $= 0$

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 1{,}000 \times 6.00 + 2{,}000 \times 4.00 + 850 \times 2.00 - 1200 \times 1.50 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 6{,}000 + 8{,}000 + 1{,}700 + 1{,}800 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 17{,}500 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -17{,}500$$

$$-R_B = -\frac{17{,}500}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}187.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0$ $\overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$

$$H_A + 1{,}200 = 0$$

$$\therefore \quad H_A = -1{,}200 \text{ N.} \quad (\overset{-}{\leftarrow})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 850 - 2{,}000 - 1{,}000 = 0$$

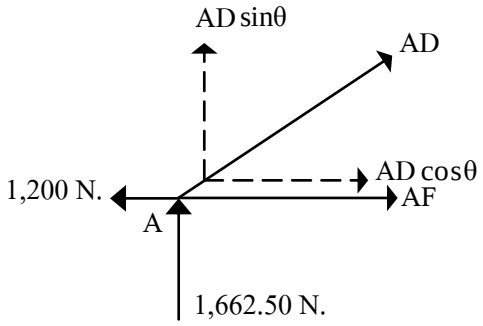
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,662.50 N.

$$1{,}662.50 + R_B - 850 - 2{,}000 - 1{,}000 = 0$$

$$R_B - 2{,}187.50 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}187.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ที่จุด A



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$AD\sin\theta + 1{,}662.50 = 0$$

$$AD \times \frac{3}{5} + 1{,}662.50 = 0$$

$$AD = -1{,}662.50 \times \frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad AD = -2{,}770.83 \text{ N. (แรงอัด)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

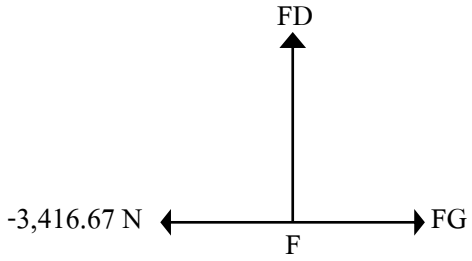
$$AF + AD\cos\theta - 1{,}200 = 0$$

$$AF + (-2{,}770.83) \times \frac{4}{5} - 1{,}200 = 0$$

$$AF - 3{,}416.67 = 0$$

$$\therefore \quad AF = +3{,}416.67 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด F



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

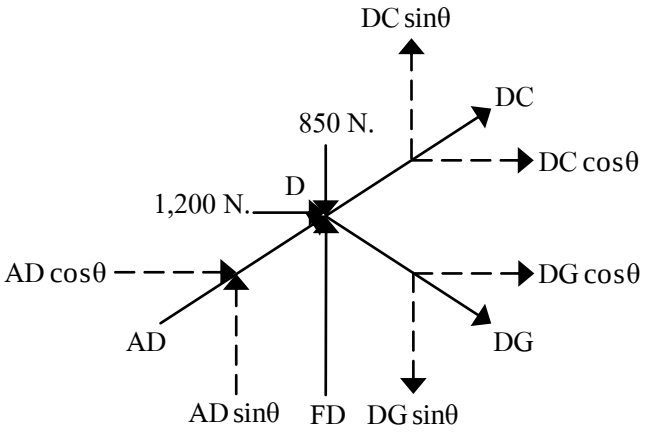
$$FD = 0$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

$$-3{,}416.76 + FG = 0$$

$$\therefore \quad FG = +3{,}416.76 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด D



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$AD\cos\theta + DG\cos\theta + DC\cos\theta + 1{,}200 = 0$$

$$AD\times\frac{4}{5} + DG\times\frac{4}{5} + DC\times\frac{4}{5} + 1{,}200 = 0$$

$$2{,}770.83\times\frac{4}{5} + DG\times\frac{4}{5} + DC\times\frac{4}{5} + 1{,}200 = 0$$

$$3{,}416.64 + (DG+DC)\times\frac{4}{5} = 0$$

$$(DG+DC) = -3{,}416.64\times\frac{5}{4}$$

$$\therefore\ (DG+DC) = -4{,}270.83 \quad \text{.....(1)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \overset{+}{\uparrow} \overset{-}{\downarrow}$

$$AD\sin\theta - DG\sin\theta + DC\sin\theta + FD - 850 = 0$$

$$AD\times\frac{3}{5} + DG\times\frac{3}{5} + DC\times\frac{3}{5} + 0 - 850 = 0$$

$$2{,}770.83\times\frac{3}{5} + DG\times\frac{3}{5} + DC\times\frac{3}{5} - 850 = 0$$

$$812.50 + (DC+DG)\times\frac{3}{5} = 0$$

$$(DC - DG) = -812.50\times\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ (DC - DG) = -1{,}354.16 \quad \text{.....(2)}$$

จากสมการที่ (1) – (2)

$$(DG+DC) = -4{,}270.83 \quad \text{.....(1)}$$

$$(DC–DG) = -1354.16 \quad \text{……..….(2)}$$

$$2DC = -5625$$

$$\therefore\ DC = -2{,}812.50 \text{ N. (แรงอัด)}$$

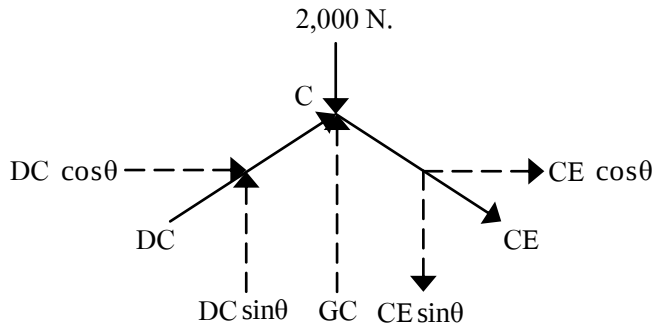
แทนค่าในสมการที่ (2)

$$(-2{,}812.50 - DG) = -1{,}354.16$$

$$-DG = -1{,}354.16 + 2{,}812.50$$

$$DG = +1{,}458.34 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด C



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \ \overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$

$$DC\cos\theta + CE\cos\theta = 0$$

$$DC\times\frac{4}{5} + CE\times\frac{4}{5} = 0$$

$$2{,}812.50\times\frac{4}{5} + CE\times\frac{4}{5} = 0$$

$$1{,}166.67 + CE\times\frac{4}{5} = 0$$

$$\therefore\ CE = -1458.35 \text{ N. (แรงอัด)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$

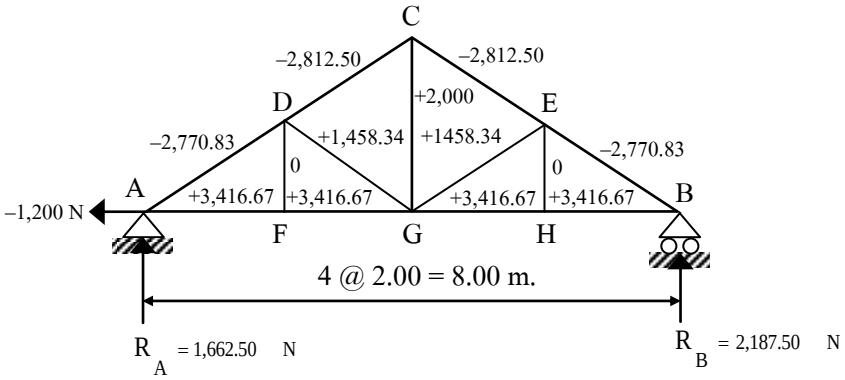
$$DC\sin\theta - CE\sin\theta + GC - 2{,}000 = 0$$

$$DC\times\frac{3}{5} - CE\times\frac{3}{5} + GC - 2{,}000 = 0$$

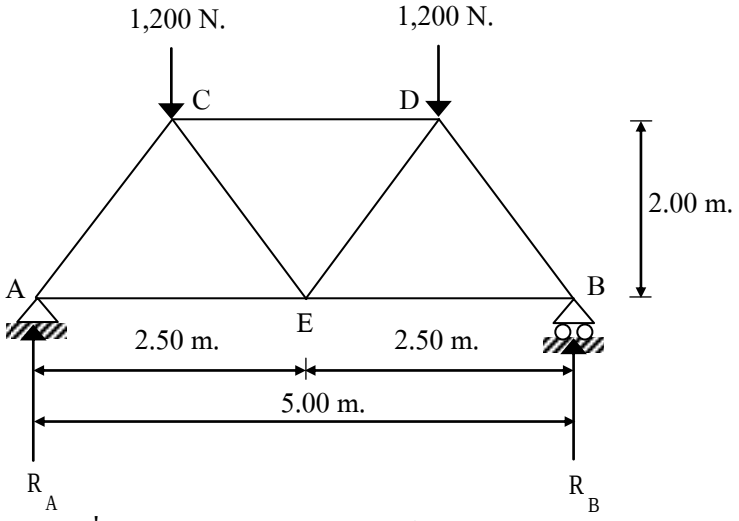
$$-1{,}458.35\times\frac{3}{5} + 1458.35\times\frac{3}{5} + GC - 2{,}000 = 0$$

$$GC - 2{,}000 = 0$$

$$\therefore\ GC = +2{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$



ตัวอย่างที่ 5.4 จากภาพที่ 5.11 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.11 โครงสร้างถักแบบวอร์เรน

ที่มา : สมนึก กุลประภา. (2535)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1,200 \times 3.75 - 1,200 \times 1.25 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 4,500 - 1,500 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 6,000 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 6,000$$

$$= \frac{6,000}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1,200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}200 \times 1.25 + 1200 \times 3.75 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}500 \times 1.25 + 4{,}500 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 6{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 = -6{,}000$$

$$-R_B = -\frac{6{,}000}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 - 1{,}200 = 0$$

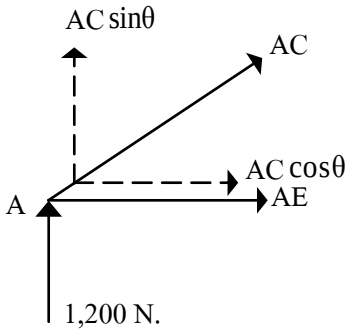
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,200 N.

$$1{,}200 + R_B - 1{,}200 = 0$$

$$R_B - 1{,}200 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ที่จุด A



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$AC + AC \sin\theta = 0$$

$$1{,}200 + AC \times \frac{2}{2.36} = 0$$

$$AC = -1{,}200 \times \frac{2.36}{2}$$

$$\therefore \quad AC = -1{,}416 \text{ N.} \quad (\text{แรงอัด})$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

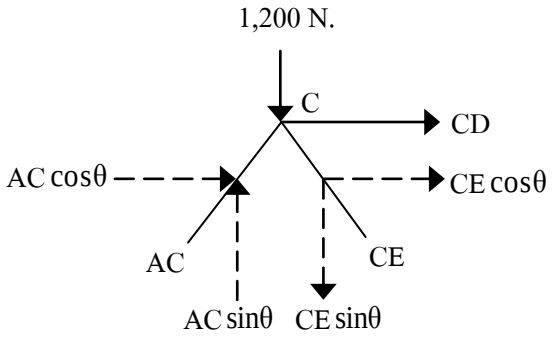
$$AE + AC\cos\theta = 0$$

$$AE + (-1{,}416 \times \frac{1.25}{2}) = 0$$

$$AE - 750 = 0$$

$$\therefore AE = +750 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด C



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$AC\sin\theta - CE\sin\theta - 1{,}200 = 0$$

$$AC \times \frac{2}{2.36} - CE \times \frac{2}{2.36} - 1{,}200 = 0$$

$$1{,}416 \times \frac{2}{2.36} - CE \times \frac{2}{2.36} - 1{,}200 = 0$$

$$-CE \times \frac{2}{2.36} - 0 = 0$$

$$-CE = 0$$

$$\therefore CE = 0 \text{ N.}$$

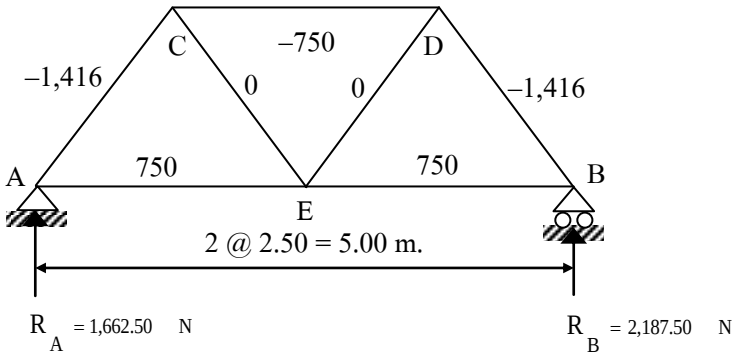
แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$CD + AC\cos\theta + CE\cos\theta = 0$$

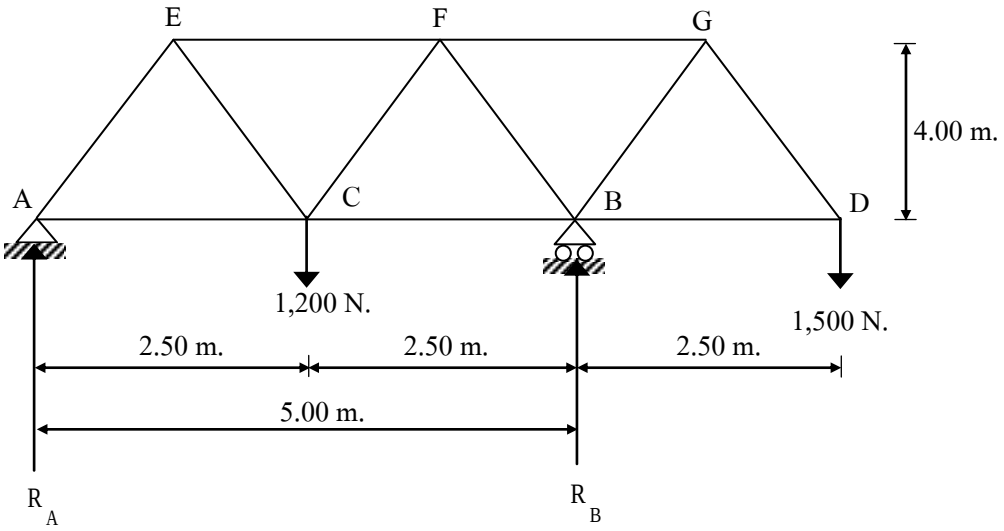
$$CD + (1{,}416 \times \frac{1.25}{2}) + (-0 \times \frac{1.25}{2}) = 0$$

$$CD + 750 = 0$$

$$\therefore CD = -750 \text{ N. (แรงอัด)}$$



ตัวอย่างที่ 5.5 จากภาพที่ 5.12 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.12 โครงสร้างถักแบบวอร์เรน

ที่มา : มนัส อนุศิริ (2548)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ (+ ↻ -)

$$R_A \times 5.00 - 1{,}200 \times 2.50 + 1{,}500 \times 2.50 = 0$$

$$R_A \times 5.00 + 3{,}000 - 3{,}750 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 750 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = +750$$

$$= +\frac{750}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +150 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}200 \times 2.50 + 1{,}500 \times 7.50 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 3{,}000 + 11{,}250 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 14{,}250 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 = -14{,}250$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}850 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 - 1{,}500 = 0$$

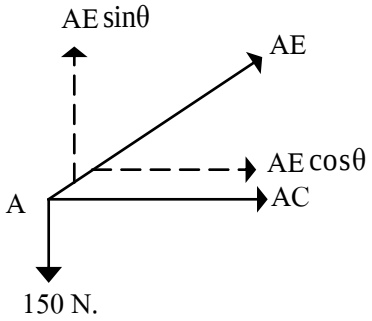
ดังนั้น R_A เท่ากับ -150 N.

$$-150 + R_B - 2{,}700 = 0$$

$$R_B - 2{,}850 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}850 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ที่จุด A



$= 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

แรงตามแนวแกน ΣF_y

$$-150 + AE \sin\theta = 0$$

$$-150 + AE \times \frac{4}{4.20} = 0$$

$$AE = +150 \times \frac{4.20}{4}$$

$$\therefore \quad AE = +157.50 \text{ N. (แรงดึง)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

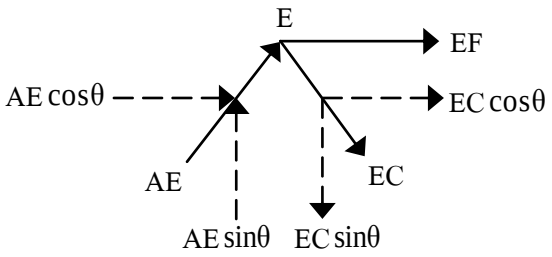
$$AC + AE\cos\theta = 0$$

$$AC + 150.50 \times \frac{1.25}{4.20} = 0$$

$$AC + 46.88 = 0$$

$$\therefore \ AC = -46.88 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด E



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$AE\sin\theta - EC\sin\theta = 0$$

$$AE \times \frac{4}{4.20} - EC \times \frac{4}{4.20} = 0$$

$$157.50 \times \frac{4}{4.20} - EC \times \frac{4}{4.20} = 0$$

$$150 - EC \times \frac{4}{4.20} = 0$$

$$-EC = -150 \times \frac{4.20}{4}$$

$$\therefore \ EC = +157.50 \text{ N. (แรงดึง)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

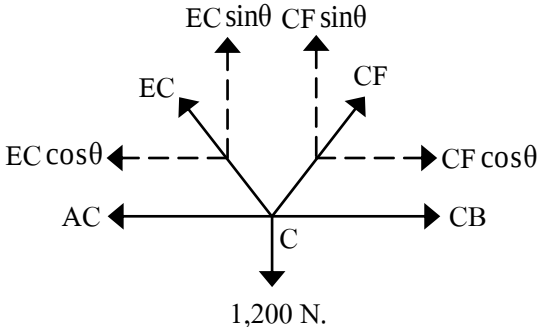
$$EF + AE\cos\theta + EC\cos\theta = 0$$

$$EF + 157.50 \times \frac{1.25}{4.20} + 157.50 \times \frac{1.25}{4.20} = 0$$

$$EF + 93.75 = 0$$

$$\therefore \ EF = -93.75 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ที่จุด C



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$EC\sin\theta + CF\sin\theta - 1{,}200 = 0$$

$$EC\times\frac{4}{4.20} + CF\times\frac{4}{4.20} - 1{,}200 = 0$$

$$157.50\times\frac{4}{4.20} + CF\times\frac{4}{4.20} - 1{,}200 = 0$$

$$CF\times\frac{4}{4.20} - 1{,}050 = 0$$

$$CF = +1{,}050\times\frac{4.20}{4}$$

$$\therefore\ CF = +1{,}102.50 \text{ N. (แรงดึง)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

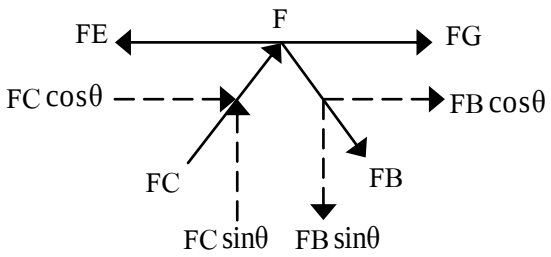
$$-AC + CB - EC\cos\theta + CF\cos\theta = 0$$

$$+44.80 + CB - 157.50\times\frac{1.25}{4.20} + 1{,}102.50\times\frac{1.25}{4.20} = 0$$

$$CB + 1{,}101 = 0$$

$$\therefore\ CB = -1{,}101 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ที่จุด F



$$\text{แรงตามแนวแกน } \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$FC\sin\theta - FB\sin\theta = 0$$

$$FC\times\frac{4}{4.20} - FB\times\frac{4}{4.20} = 0$$

$$-1{,}102.50\times\frac{4}{4.20} - FB\times\frac{4}{4.20} = 0$$

$$-1{,}050 - FB\times\frac{4}{4.20} = 0$$

$$-FB = +1{,}050\times\frac{4.20}{4}$$

$$\therefore\ FB = +1{,}102.50 \text{ N. (แรงดึง)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน } \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$$

$$FG - FE + FC\cos\theta + FB\cos\theta = 0$$

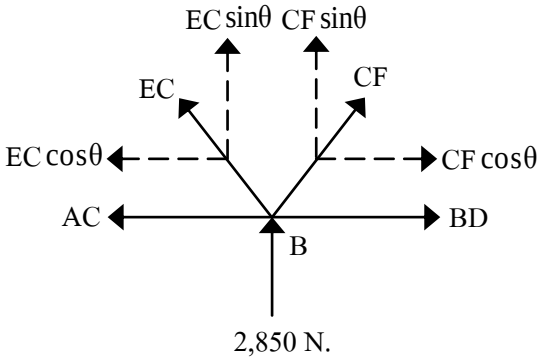
$$FG + 93.75 + 1{,}102.50\times\frac{1.25}{4.20} = 0$$

$$+1{,}102.50\times\frac{1.25}{4.20}$$

$$EF + 750 = 0$$

$$\therefore\ EF = -750 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ที่จุด B



$$\text{แรงตามแนวแกน } \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$BF\sin\theta + BG\sin\theta + 2{,}850 = 0$$

$$BF\times\frac{4}{4.20} + BG\times\frac{4}{4.20} - 2{,}850 = 0$$

$$1{,}102.50\times\frac{4}{4.20} + BG\times\frac{4}{4.20} + 2{,}850 = 0$$

$$BG\times\frac{4}{4.20} - 3{,}952.50 = 0$$

$$BG = +3{,}952.50\times\frac{4.20}{4}$$

$$\therefore\ BG = +4{,}150.13\ \text{N. (แรงดึง)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน}\quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow}\ \overset{-}{\leftarrow}$$

$$-BC + BD - BF\cos\theta + BG\cos\theta = 0$$

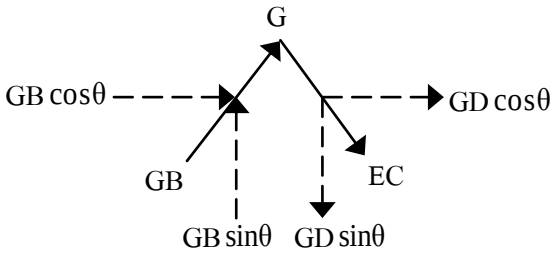
$$+1{,}101 + BD - 1{,}102.50\times\frac{1.25}{4.20} = 0$$

$$+4{,}150\times\frac{1.25}{4.20}$$

$$BD + 2{,}011 = 0$$

$$\therefore\ BD = -2{,}011\ \text{N. (แรงอัด)}$$

ที่จุด G



$$\text{แรงตามแนวแกน}\quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$$

$$GB\sin\theta - GD\sin\theta = 0$$

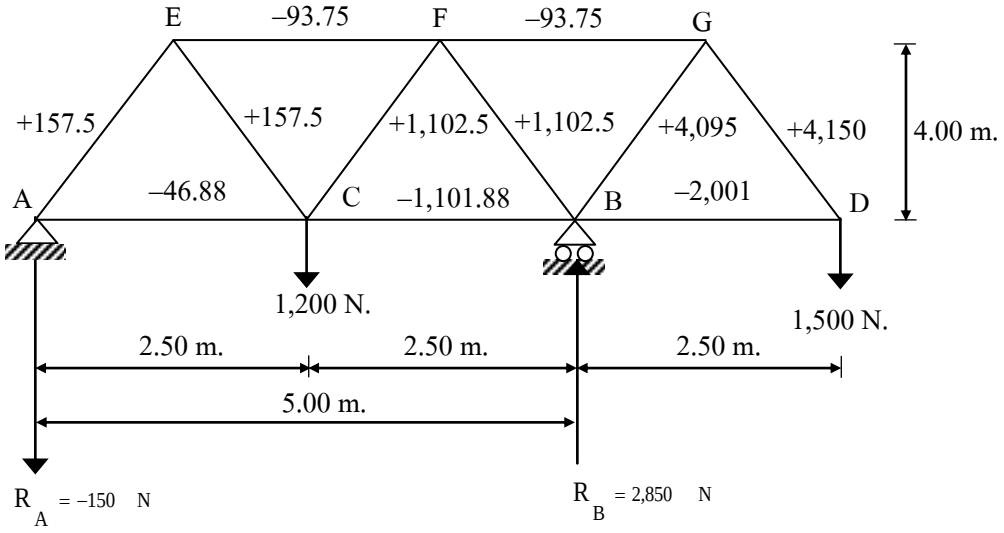
$$GB\times\frac{4}{4.20} - GD\times\frac{4}{4.20} = 0$$

$$4{,}150\times\frac{4}{4.20} - GD\times\frac{4}{4.20} = 0$$

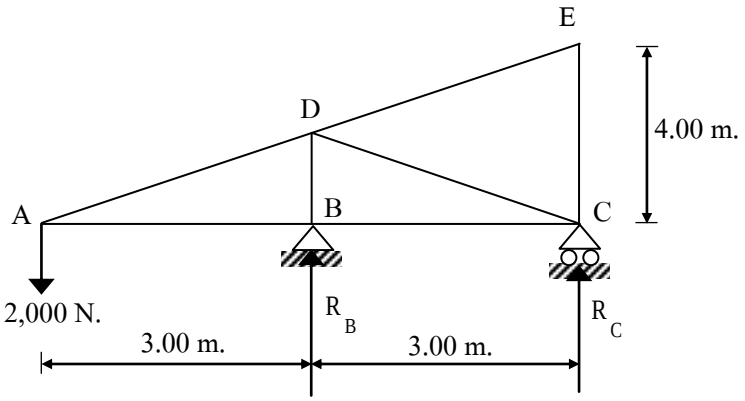
$$3{,}952 - GD\times\frac{4}{4.20} = 0$$

$$-GD = -3{,}952\times\frac{4.20}{4}$$

$$\therefore\ GD = +4{,}150\ \text{N. (แรงดึง)}$$



ตัวอย่างที่ 5.6 จากภาพที่ 5.13 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.13 โครงสร้างรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : มนัส อนุศิริ (2548)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ (+ ↻ -)

$$R_B \times 3.00 - 2{,}000 \times 6.00 = 0$$

$$R_B \times 3.00 - 12{,}000 = 0$$

$$R_B \times 3.00 = +12{,}000$$

$$= + \frac{12{,}000}{3.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +4{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 3.00 - 2{,}000 \times 3.00 = 0$$

$$-R_C \times 3.00 - 6{,}000 = 0$$

$$-R_C \times 3.00 = +6{,}000$$

$$-R_C = +\frac{6{,}000}{3.00}$$

$$\therefore \quad R_C = -2{,}000 \text{ N.} \quad (\downarrow_-)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_-$

$$R_B + R_C - 2{,}000 = 0$$

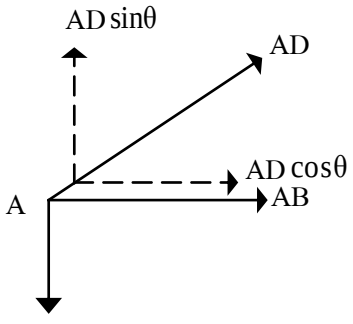
ดังนั้น R_B เท่ากับ 4,000 N.

$$4{,}000 + R_B - 2{,}000 = 0$$

$$2{,}000 + R_C = 0$$

$$\therefore \quad R_C = +2{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ที่จุด A



แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_-$

$$-2{,}000 + AD\sin\theta = 0$$

$$-2{,}000 + AD \times \frac{4}{7.21} = 0$$

$$AD = +2{,}000 \times \frac{7.21.}{4}$$

$$\therefore \quad AD = +3{,}605 \text{ N. (แรงดึง)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

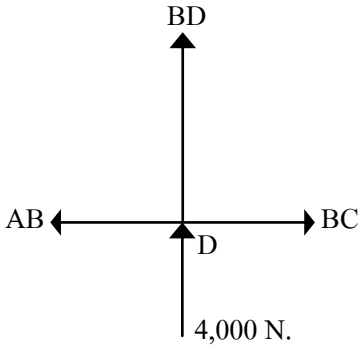
$$AB + AC\cos\theta = 0$$

$$AB + 3{,}605 \times \frac{6.00.}{7.21} = 0$$

$$AB + 3{,}000 = 0$$

$$\therefore \quad AB = -3{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด D



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$$

$$-4{,}000 + BD = 0$$

$$\therefore \quad BD = +4{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$

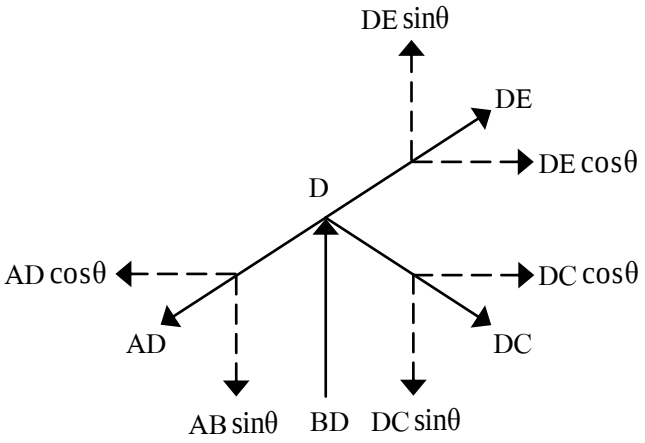
$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

$$-AB + BC = 0$$

$$3{,}000 + BC = 0$$

$$\therefore \quad BC = -3{,}000 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ที่จุด D



$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$$

$$AD\cos\theta + DE\cos\theta + DC\cos\theta = 0$$

$$AD\times\frac{6}{7.21} + DE\times\frac{6}{7.21} + DC\times\frac{6}{7.21} = 0$$

$$-3{,}605\times\frac{6}{7.21} + DE\times\frac{6}{7.21} + DC\times\frac{6}{7.21} = 0$$

$$-3{,}000 + (DE+DC)\times\frac{6}{7.21} = 0$$

$$(DE+DC) = +3{,}000\times\frac{7.21}{6}$$

$$\therefore\ (DE+DC) = +3{,}605 \quad \text{.....(1)}$$

$$\text{แรงตามแนวแกน} \quad \Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+}\ \downarrow_{-}$$

$$AD\sin\theta - DC\sin\theta + DE\sin\theta + FD = 0$$

$$-AD\times\frac{4}{7.21} - DC\times\frac{4}{7.21} + DE\times\frac{4}{7.21} + 4{,}000 = 0$$

$$-3{,}605\times\frac{4}{7.21} - DC\times\frac{4}{7.21} + DE\times\frac{4}{7.21} + 4{,}000 = 0$$

$$2{,}000 + (DE - DC)\times\frac{4}{7.21} = 0$$

$$(DE - DC) = -2{,}000\times\frac{7.21}{4}$$

$$\therefore\ (DE - DC) = -3{,}605 \quad \text{.....(2)}$$

จากสมการที่ (1) + (2)

$$(DE+DC) = +3{,}605 \quad \text{.....(1)}$$

$$(DE-DC) = -3{,}605 \quad \text{.....(2)}$$

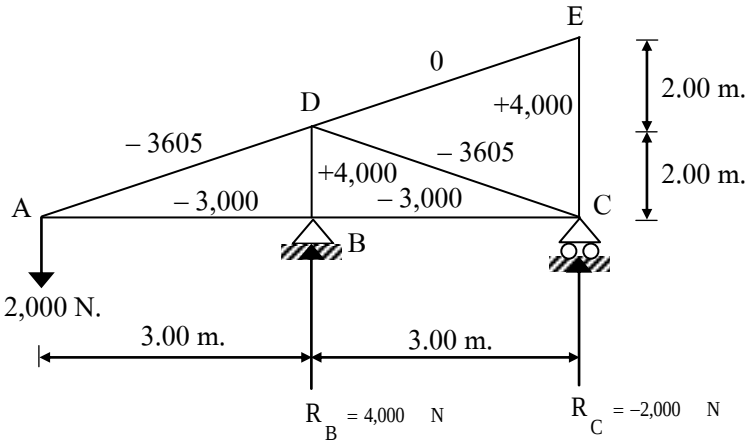
$$2DE = 0$$

$$\therefore\ DE = 0$$

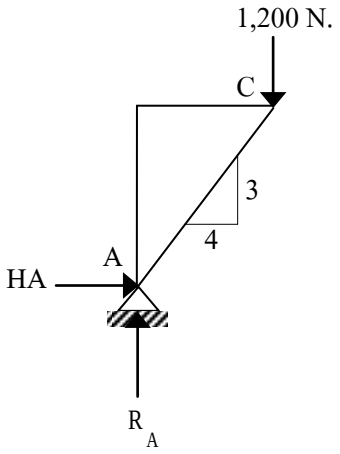
แทนค่าในสมการที่ (1)

$$(0 + DC) = +3{,}605$$

$$DC = +3{,}605 \text{ N. (แรงดึง)}$$

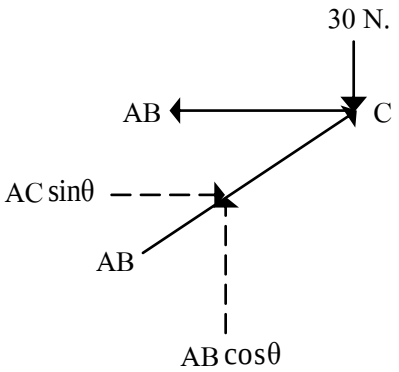


ตัวอย่างที่ 3.7 จากภาพที่ 5.14 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.14 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ที่มา : วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร (2521)

ที่จุด C



วิธีทำ จากสมการ

$$\frac{XAB}{4} = \frac{YAB}{3}$$

$$XAB = \frac{4YAB}{3}$$

$$XAB = \frac{4\times 30}{3}$$

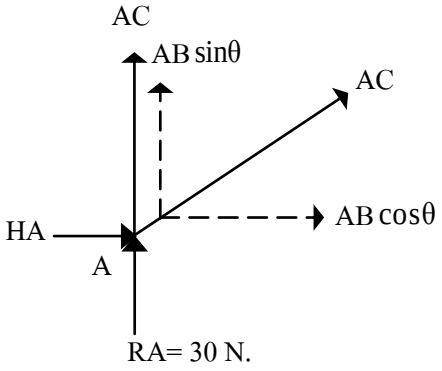
$$\therefore \text{ HA ,XAB} = -40 \text{ N. (แรงอัด)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$-40 + BC = 0$$

$$\therefore \text{ BC} = +40 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด A



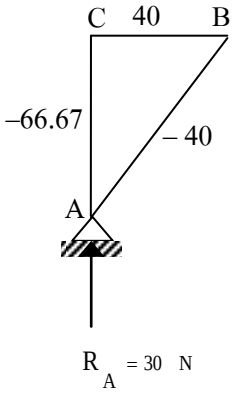
แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$AC+AB\sin\theta +30 = 0$$

$$40\times\frac{3}{5} = 0$$

$$AC = -40\times\frac{5}{3}$$

$$\therefore \text{ AC} = -66.67 \text{ N. (แรงอัด)}$$



ตัวอย่างที่ 3.8 จากภาพที่ 5.15 จงคำนวณหาแรงในโครงป้ายโฆษณารับแรงปะทะลม 4,000 N.ที่ $\frac{5}{8}$ ของแรงนี้จะถ่ายให้กับกึ่งกลาง C ส่วนที่เหลือจะแบ่งลงกระทำที่ปลาย D และ B เท่ากัน จงหาแรงในชิ้นส่วน BE ,BC ,DE ,CD และ EF ของโครงสร้าง

วิธีทำ

หลักการวิเคราะห์

1. แบ่งแรง 4,000 N. ลงกระทำตามจุดต่างๆ ตามอัตราส่วนที่กำหนด
2. คิดการสมดุลของตัวหมุดร้อย D,C และ E ตามลำดับ

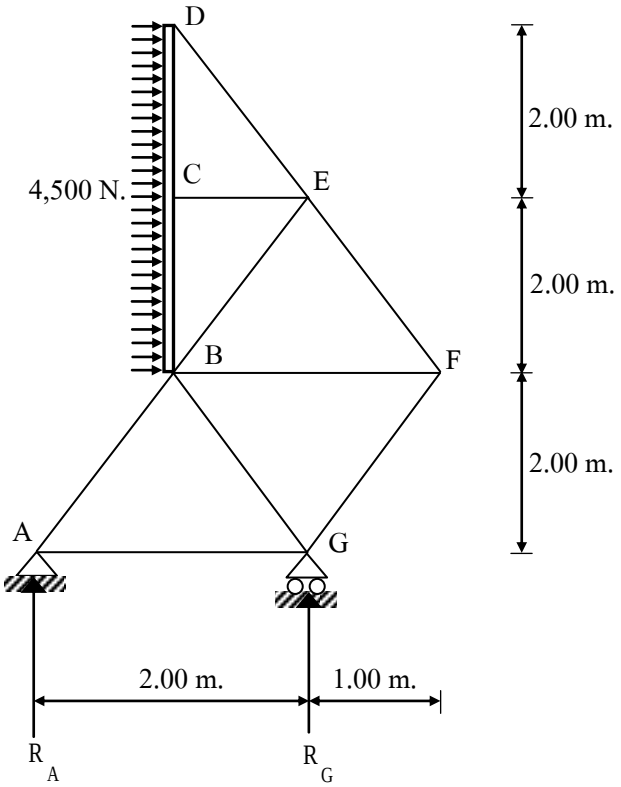
การคำนวณ

แรงกระทำที่จุดยึดต่อ C $= 4{,}000 \times \frac{5}{8} = 2{,}500$ N.

แรงกระทำที่จุดยึดต่อ B และ D $= (\frac{4{,}000 - 2{,}500)}{2} = 750$ N.

คิดสมดุลของตัวหมุดร้อย D

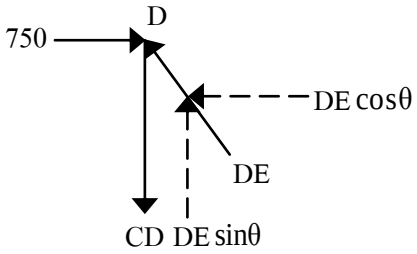
$$\theta = \tan^{-1}(\frac{2.00}{4.00}) = 26.56$$



ภาพที่ 5.15 โครงสร้างป้ายโฆษณา

ที่มา : วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร (2521)

ที่จุด D



ดังนั้น แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$750 - DE\sin\theta = 0$$

$$750 - DE\ \sin 26.56 = 0$$

$$-DE = -\frac{750}{\sin 26.56}$$

$$\therefore\ DE = -1{,}677\ \text{N.}\ \text{(แรงอัด)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

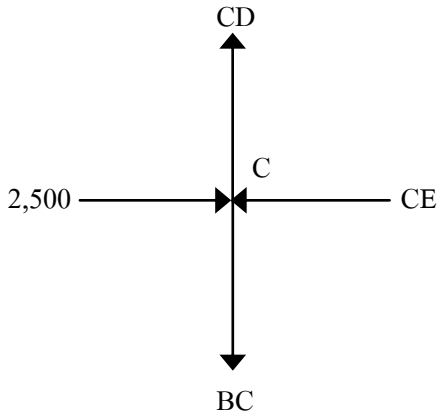
$$DE\cos\theta - CD = 0$$

$$-1{,}677 \times \cos 26.56 - CD = 0$$

$$-1{,}500 - CD = 0$$

$$\therefore\ CD = +1{,}500 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด C



ดังนั้น แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$2{,}500 - CE = 0$$

$$\therefore\ CE = +2{,}500 \text{ N. (แรงดึง)}$$

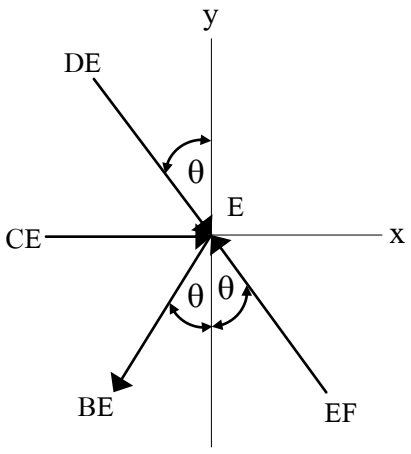
แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$CD - BC = 0$$

$$1{,}500 - BC = 0$$

$$\therefore\ BC = +1{,}500 \text{ N. (แรงดึง)}$$

ที่จุด E



ดังนั้น แรงตามแนวแกน $\Sigma F_x = 0 \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$CE + DE\sin\theta - BE\sin\theta + EF\sin\theta = 0$$

$$2{,}500 + 1{,}677 \times \sin 26.56 - BE\sin 26.56 - EF\sin 26.56 = 0$$

$$2{,}500 + 726 - BE\sin 26.56 - EF\sin 26.56 = 0$$

$$2{,}500 + 750 + (BE - EF)\sin 26.56 = 0$$

$$3{,}250 + (BE - EF)\sin 26.56 = 0$$

$$(BE - EF) = \frac{3{,}250}{\sin 26.56}$$

$$(BE - EF) = -7{,}268 \quad \text{.....(1)}$$

แรงตามแนวแกน $\Sigma F_y = 0 \overset{+}{\uparrow} \overset{-}{\downarrow}$

$$EF\cos 26.56 - DE\cos\theta - BE\cos\theta = 0$$

$$EF\cos 26.56 - 1{,}677 \times \cos 26.56 - BE \times \cos 26.56 = 0$$

$$EF\cos 26.56 - 1{,}500 - BE \times \cos 26.56 = 0$$

$$(EF - BE)\cos 26.56 = +1{,}500$$

$$(EF - BE) = +\frac{1{,}500}{\sin 26.56}$$

$$(EF - BE) = -1{,}677 \quad \text{.....(2)}$$

จากสมการที่ (1) – (2)

$$(BE - EF) = -7{,}268 \quad \text{.....(1)}$$

$$(EF - BE) = -1{,}677 \quad \text{.....(2)}$$

$$2BE = -5{,}591$$

$$\therefore BE = -2{,}796 \text{ N. (แรงดึง)}$$

แทนค่าในสมการที่ (2)

$$(EF - BE) = -1{,}677 \quad \text{.....(2)}$$

$$(-2{,}796 + EF) = -1.677$$

$$EF = -1.677 - 2{,}796$$

$$\therefore EF = -4{,}473 \text{ N. (แรงอัด)}$$

5.6.2 วิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method)

การคำนวณหาแรงภายในโครงถัก (Truss) โดยวิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method) เป็นวิธีทำค่อนข้างรวดเร็วเพราะว่าไม่จำเป็นต้องเริ่มที่จุดแรกแล้วไล่จุดที่ถัดไปเรื่อยๆ เหมือนกับวิธีคำนวณจุดที่ต่อกัน โดยสามารถเลือกตัด (Section) ที่ตำแหน่งที่ต้องการทราบได้ทันที แต่มีเงื่อนไขต้องตัดผ่านชิ้นส่วนที่ไม่ทราบค่าได้ไม่เกิน 3 ชิ้นส่วนเท่านั้น

สำหรับขั้นตอนในการคำนวณค่าแรงภายในโครงถักโดยวิธีคำนวณส่วนตัด ดังนี้

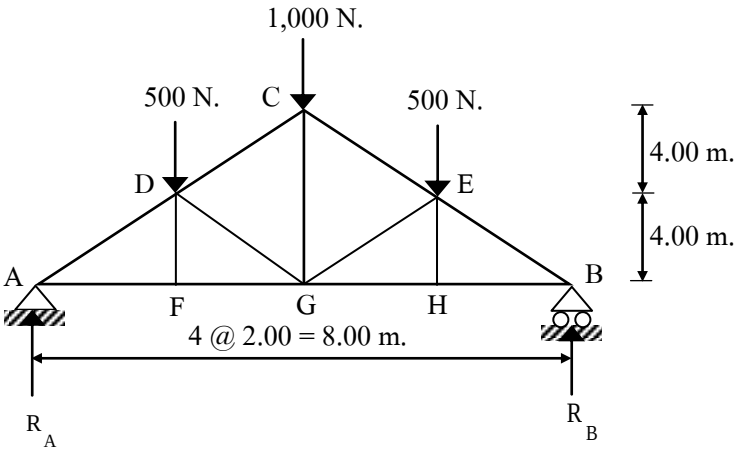
1) คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถัก

2) พิจารณาที่ตัด (Section) ตรงหน้าตัดที่มีตัวไม่ทราบค่า (Unkon)ไม่เกิน 3 ตัว

3) สมมติให้แรงที่ยังไม่ทราบค่าให้เป็นแรงดึงไว้ก่อน

4) ใสมการของการสมดุล $\Sigma F_M = 0$ เพื่อที่จะคำนวณตัวไม่ทราบค่าโดยเลือกจุดหมุนให้เหลือตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 5.9 จากภาพที่ 5.16 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก FG, DG, DC ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.16 โครงสร้างถักแบบโฮว์

ที่มา : ธีรยุทธ สุวรรณประทีป (2521)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; ΣM_B $^{+}\circlearrowleft^{-}$ = 0

$$R_A \times 8.00 - 500 \times 6.00 - 1{,}000 \times -4.00 - 500 \times -2.00 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 8{,}000 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = 8{,}000$$

$$= \frac{8{,}000}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 500 \times 6.00 + 1{,}000 \times 4.00 + 500 \times 2.00 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 8{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -8{,}000$$

$$= -\frac{8{,}000}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 1{,}000 - 500 - 500 = 0$$

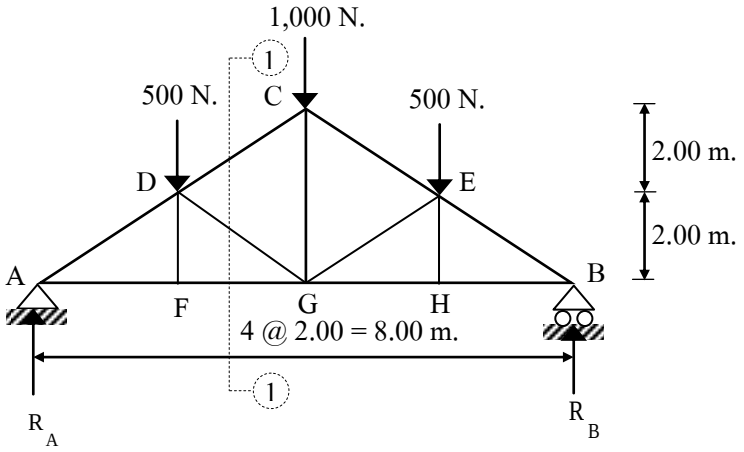
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,000 N.

$$1{,}000 + R_B - 2{,}000 = 0$$

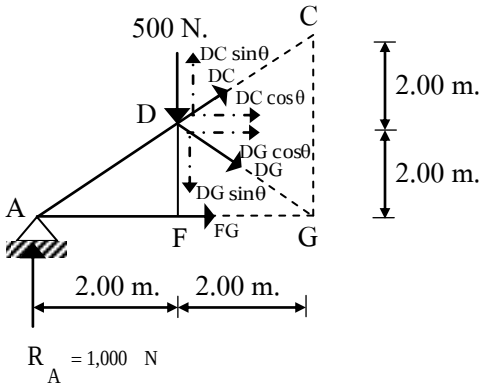
$$R_B - 1{,}000 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1



พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1 (Free Body Diagram)



คำนวณหาแรง FH

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; ΣM_D $^{+}\circlearrowleft^{-}$ = 0

$$R_A \times 2.00 - FG \times 2.00 = 0$$

$$1{,}000 \times 2.00 - FG \times 2.00 = 0$$

$$-2FG + 2{,}000 = 0$$

$$\therefore FG = +1{,}000 \text{ N. (แรงดึง)}$$

คำนวณหาแรง DC

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด G ; $\Sigma M_G = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 500 \times 2.00 + DC \sin\theta \times 2.00 + DC \cos\theta \times 2.00 = 0$$

$$1{,}000 \times 4.00 - 500 \times 2.00 + DC \times \frac{4}{5.66} \times 2.00 = 0$$

$$+ DC \times \frac{4}{5.66} \times 2.00$$

$$4{,}000 - 1{,}000 + 1.41 \times DC + 1.41 \times DC = 0$$

$$3{,}000 + 2.82 \times DC = 0$$

$$DC = -\frac{3{,}000}{2.82}$$

$$\therefore DC = -1{,}064 \text{ N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง DG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด F ; $\Sigma M_F = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 2.00 + DC \cos\theta \times 2.00 + DG \cos\theta \times 2.00 = 0$$

$$= 0$$

$$1{,}000 \times 2.00 - 1{,}064 \times \frac{4}{5.66} \times 2.00 + DG \times \frac{4}{5.66} \times 2.00$$

$$2{,}000 - 1{,}500 + DG \times \frac{4}{5.66} \times 2.00 = 0$$

$$500 + 1.41 \times DH = 0$$

$$DG = -\frac{500}{1.41}$$

$$\therefore \quad DG = -354 \text{ N.} \quad \text{(แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง DC

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด F ; $\Sigma M_F = 0$ +↺-

$$R_A \times 2.00 + DC\cos\theta \times 2.00 + DG\cos\theta \times 2.00 = 0$$

$$1{,}000 \times 2.00 + DC \times \frac{4}{5.66} \times 2.00 - 354.60 \times \frac{4}{5.66} \times 2.00 = 0$$

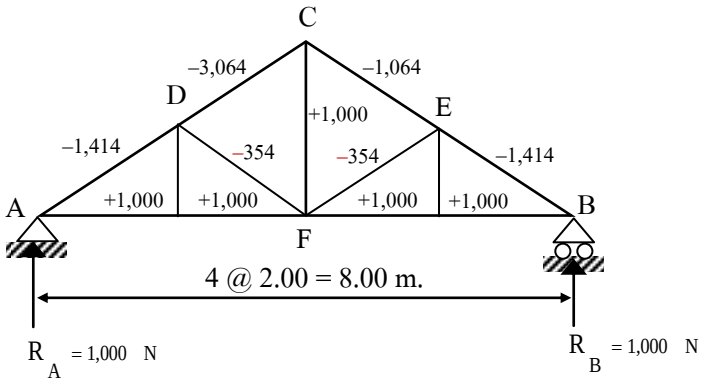
$$2{,}000 - 500 + DC \times 4.00 = 0$$

$$1{,}500 + 1.41 \times DC = 0$$

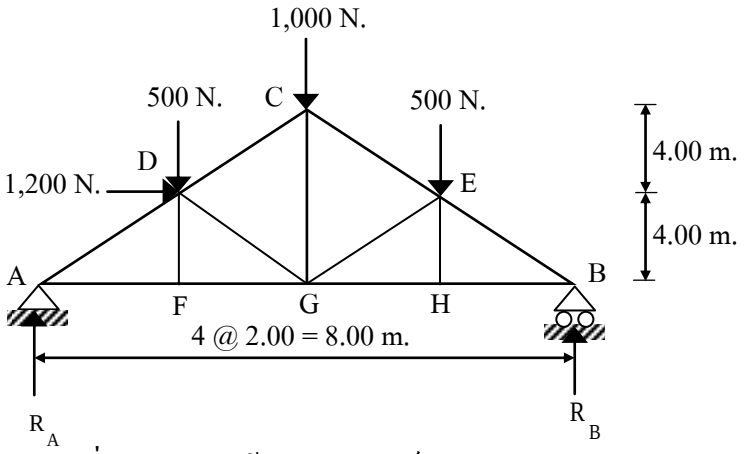
$$DC = -\frac{1{,}500}{4.00}$$

$$\therefore \quad DC = -1{,}064 \text{ N.} \quad \text{(แรงอัด)}$$

สรุป แรงในโครงถัก DC เท่ากับ – 1,064 N. เท่ากัน ถูกต้อง



ตัวอย่างที่ 5.10 จากภาพที่ 5.17 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก FG ,DG ,DC ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.17 โครงสร้างถักแบบโฮว์

ที่มา : ธีรยุทธ สุวรรณประทีป (2521)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B $\Sigma M_B = 0$

$$R_A \times 8.00 - 1{,}000 \times 2.00 - 2{,}000 \times 4.00 - 850 \times 6.00 + 1{,}200 \times 1.50 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 2{,}000 - 8{,}000 - 5{,}100 + 1{,}800 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 13{,}300 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = 13{,}300$$

$$R_A = \frac{13{,}300}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1{,}662.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B $= 0$

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด $= 0$

ΣM_A

$$-R_B \times 8.00 + 1{,}000 \times 6.00 + 2{,}000 \times 4.00 + 850 \times 2.00 - 1200 \times 1.50 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 6{,}000 + 8{,}000 + 1{,}700 + 1{,}800 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 17{,}500 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -17{,}500$$

$$-R_B = -\frac{17{,}500}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}187.50 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

แรงในแนวแกน $\Sigma H_A = 0 \quad \overset{+}{\rightarrow} \overset{-}{\leftarrow}$

$$H_A + 1{,}200 = 0$$

$$\therefore \quad H_A = -1{,}200 \text{ N. } (\overset{-}{\leftarrow})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 850 - 2{,}000 - 1{,}000 = 0$$

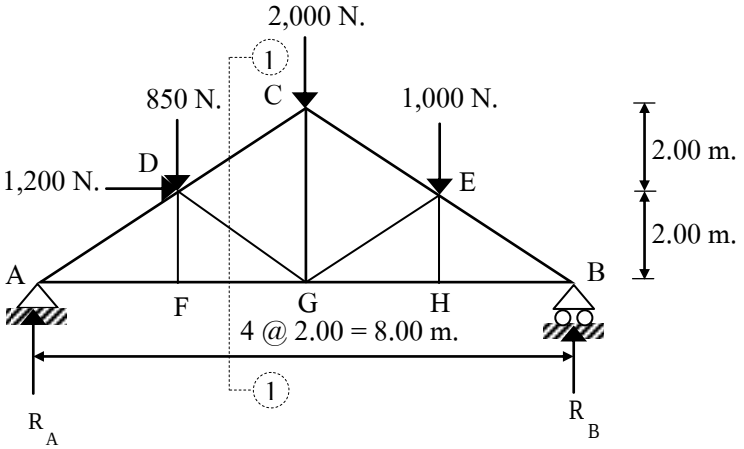
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,662.50 N.

$$1{,}662.50 + R_B - 850 - 2{,}000 - 1{,}000 = 0$$

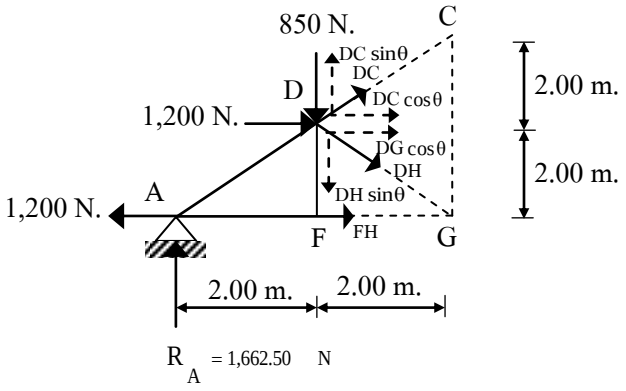
$$R_B - 2{,}187.50 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}187.50 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1



พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1 (Free Body Diagram)



คำนวณหาแรง FG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; ΣM_D $^{+}\circlearrowleft^{-}$ = 0

$$R_A \times 2.00 + 1{,}200 \times 1.50 - FG \times 1.50 = 0$$

$$1{,}662.50 \times 2.00 + 1{,}800 - FG \times 1.50 = 0$$

$$-FG \times 1.50 + 5{,}125 = 0$$

$$-FG = -\frac{5{,}125}{1.50}$$

$$\therefore \quad FH = +3{,}416.67 \text{ N. (แรงดึง)}$$

คำนวณหาแรง DC

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด G ; $\Sigma M_G = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 850 \times 2.00 + 1{,}200 \times 1.50 + DC \sin\theta \times 2.00 + DC \cos\theta \times 1.50 = 0$$

$$1{,}662.50 \times 4.00 - 850 \times 2.00 + 1{,}200 \times 1.50 + DC \times \frac{3}{5} \times 2.00 + DC \times \frac{4}{5} \times 1.50 = 0$$

$$6{,}650 - 1{,}700 + 1{,}800 + DC \times \frac{3}{5} \times 2.00 + DC \times \frac{4}{5} \times 1.50 = 0$$

$$6{,}750 + 1.20 \times DC + 1.20 \times DC = 0$$

$$6{,}750 + 2.40 \times DC = 0$$

$$DC = -\frac{6{,}650}{2.40}$$

$$\therefore \quad DC = -2{,}812.50 \text{ N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง DG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด F ; $\Sigma M_F = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 1{,}200 \times 1.50 - 850 \times 2.00 + FG\cos\theta \times 1.50 = 0$$

$$+ FG\sin\theta \times 2.00$$

$$1{,}662.50 \times 4.00 - 1{,}200 \times 1.50 - 850 \times 2.00 + FG\,\frac{4}{5} \times 1.50 = 0$$

$$+ FG\,\frac{3}{5} \times 2.00$$

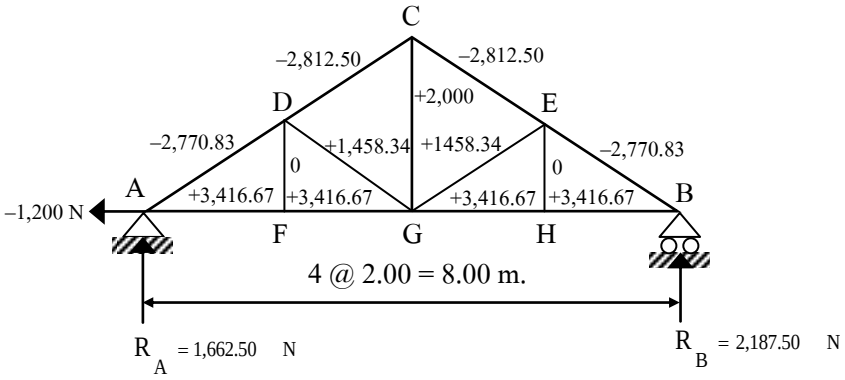
$$6{,}650 + 1{,}800 - 1{,}700 + 1.20 \times FG + 1.20 \times FG = 0$$

$$6{,}750 + 2.40 \times FG = 0$$

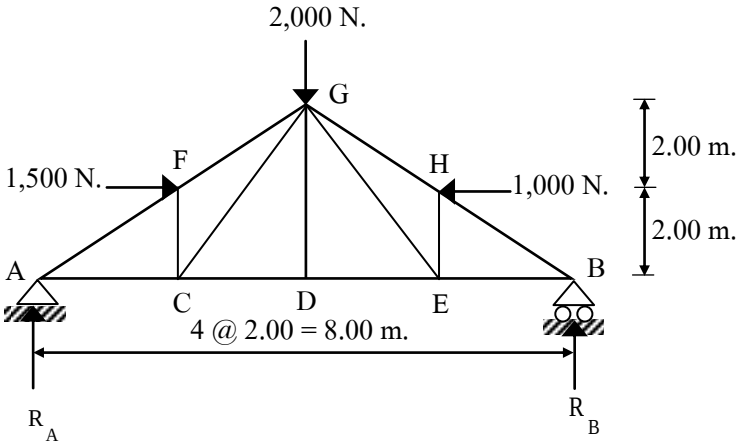
$$FG = -\frac{6{,}750}{2.40}$$

$$\therefore\ FG = -2{,}812.50 \text{ N. (แรงอัด)}$$

สรุป แรงในโครงถัก FG เท่ากับ – 2,812.50 N. เท่ากัน ถูกต้อง



11. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก FG, CG และ CD ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.18 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method)



ภาพที่ 5.18 โครงสร้างถักแบบแพรท

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 8.00 - 2{,}000 \times 4.00 - 1{,}000 \times 2.00 + 1{,}500 \times 2.00 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 8{,}000 - 2{,}000 + 3{,}000 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 7{,}000 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = 7{,}000$$

$$= +\frac{7{,}000}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +875 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 2{,}000 \times 4.00 - 1{,}000 \times 2.00 + 1{,}500 \times 2.00 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 8{,}000 - 2{,}000 + 3{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 - 9{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = 9{,}000$$

$$-R_B = +\frac{9{,}000}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}125 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 2{,}000 = 0$$

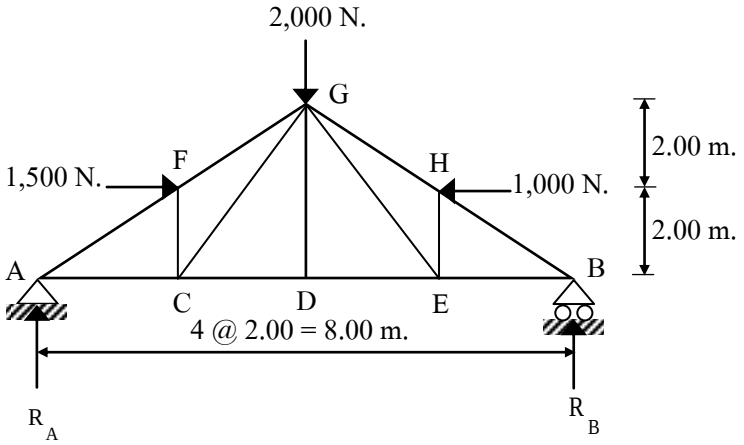
ดังนั้น R_A เท่ากับ 875 N.

$$875 + R_B - 2{,}000 = 0$$

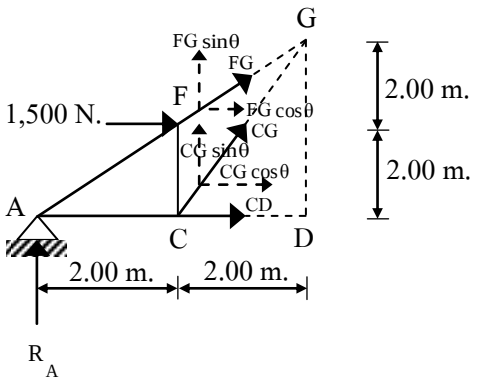
$$-1{,}125 + R_B = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}125 \text{ N. } (\uparrow^{+})$$

พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1



พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1 (Free Body Diagram)



คำนวณหาแรง CD

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด G ; $\Sigma M_G \quad {}^{+}\circlearrowleft^{-} = 0$

$$R_A \times 4.00 + 500 \times 4.00 - 1{,}500 \times 2.00 + CD \times 4.00 = 0$$

$$875 \times 4.00 + 500 \times 4.00 - 3{,}000 + CD \times 4.00 = 0$$

$$3{,}500+2{,}000-3{,}000-CD\times 4.00 = 0$$

$$2{,}500-CD\times 4.00 = 0$$

$$-CD = +\frac{2{,}500}{4.00}$$

$$\therefore\ CD = +625\ \text{N. (แรงดึง)}$$

คำนวณหาแรง FG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; ΣM_C $\overset{+}{\circlearrowleft}$ $\overset{-}{}$ = 0

$$R_A\times 2.00+1{,}500\times 2.00+FG\cos\theta\times 2.00 = 0$$

$$875\times 2.00+1{,}500\times 2.00+FG\times\frac{4.00}{5.66}\times 2.00 = 0$$

$$1{,}750+3{,}000+FG\times 1.41 = 0$$

$$4{,}750+FG\times 1.41 = 0$$

$$FG = -\frac{4{,}750}{1.41}$$

$$\therefore\ FG = -3{,}362\ \text{N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง CG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด F ; $\Sigma M_F = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}$ $\overset{-}{}$

$$R_A\times 2.00+500\times 2.00-CD\times 2.00-CG\cos\theta\times 2.00 = 0$$

$$875\times 2.00+500\times 2.00-625\times 2.00-CG\times\frac{2}{4.47}\times 2.00 = 0$$

$$1{,}750+1{,}000-1{,}250-CG\times 0.89 = 0$$

$$1{,}500-CG\times 0.89 = 0$$

$$-CG = -\frac{1{,}500}{0.89}$$

$$\therefore\ CG = +1{,}685\ \text{N. (แรงดึง)}$$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรง FG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_G = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}$ $\overset{-}{}$

$$R_A\times 2.00+1{,}500\times 2.00-CG\cos\theta\times 2.00-FG\cos\theta\times 2.00 = 0$$

$$-FG\sin\theta\times 2.00$$

$$875\times 4.00+1{,}500\times 2.00-1{,}685\times\frac{4.00}{4.47}\times 2.00 = 0$$

$$+FG\frac{4}{5.66}\times 2.00+FG\frac{4}{5.66}\times 2.00$$

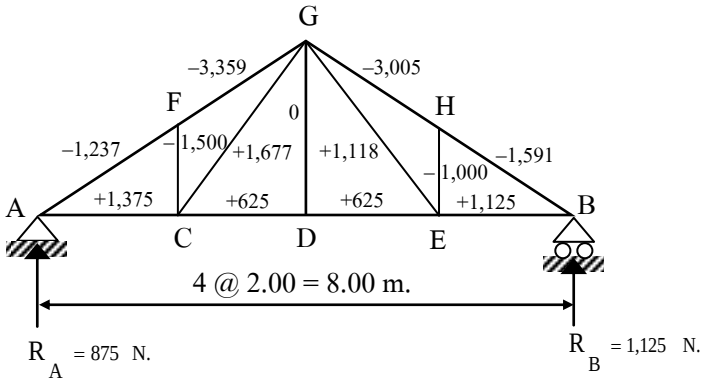
$$3{,}500+3{,}000+3{,}015 + FG\times 2.83 = 0$$

$$9{,}515 + FG\times 2.83 = 0$$

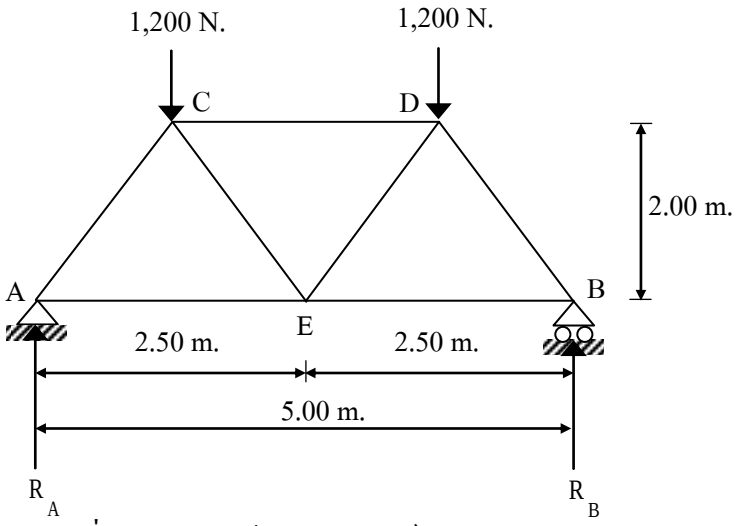
$$FG = -\frac{9{,}515}{2.83}$$

$$\therefore\ FG = -3{,}362 \text{ N. (แรงอัด)}$$

สรุป แรงในโครงถัก FG เท่ากับ – 3,362 N. เท่ากัน ถูกต้อง



ตัวอย่างที่ 5.12 จากภาพที่ 5.19 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.19 โครงสร้างถักแบบวอร์เรน

ที่มา : สมนึก กุลประภา. (2535)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ (+ ↺ -)

$$R_A \times 5.00 - 1{,}200\times 3.75 - 1{,}200\times 1.25 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 4{,}500 - 1{,}500 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 6{,}000 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 6{,}000$$

$$= \frac{6{,}000}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1{,}200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}200 \times 1.25 + 1200 \times 3.75 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}500 \times 1.25 + 4{,}500 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 6{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 = -6{,}000$$

$$-R_B = -\frac{6{,}000}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +1{,}200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}200 - 1{,}200 = 0$$

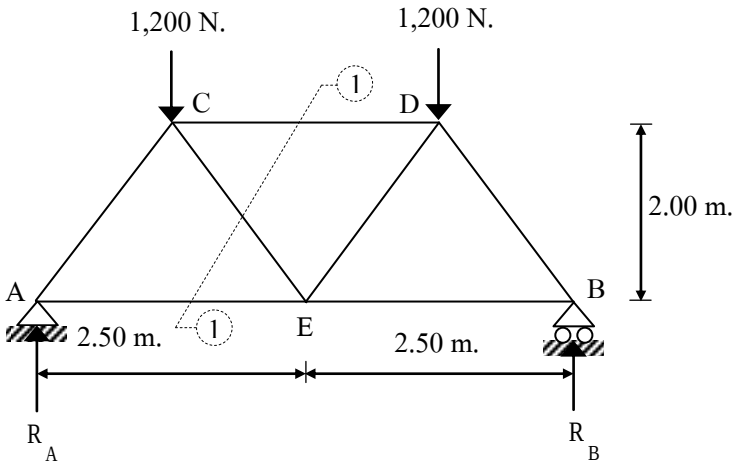
ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,200 N.

$$1{,}200 + R_B - 1{,}200 = 0$$

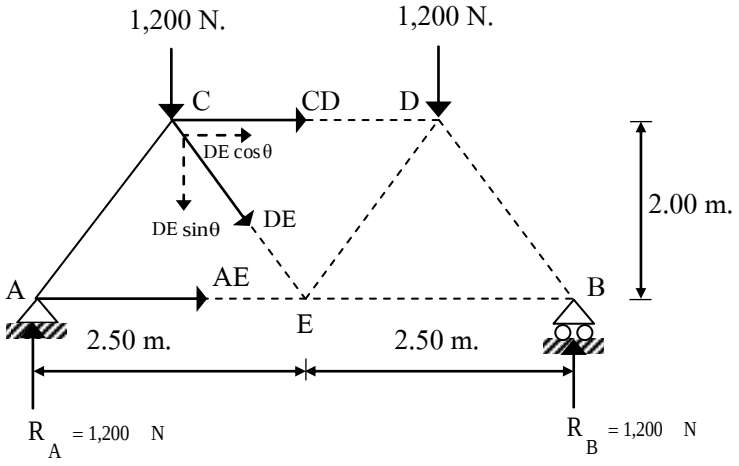
$$R_B - 1{,}200 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}200 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1



พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1 (Free Body Diagram)



คำนวณหาแรง FG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; ΣM_C (+ ↺ -) = 0

$$R_A \times 1.25 - AE \times 2.00 = 0$$

$$1{,}200 \times 1.25 - AE \times 2.00 = 0$$

$$1{,}500 - AE \times 2.00 = 0$$

$$-AE = -\frac{1{,}500}{2.00}$$

$$\therefore \quad AE = +750 \text{ N. (แรงดึง)}$$

คำนวณหาแรง CE

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ +↻-

$$R_A \times 3.75 - 1{,}200 \times 2.50 - AE \times 2.00 + CE \sin\theta \times 2.50 = 0$$

$$1{,}200 \times 3.75 - 1{,}200 \times 2.50 - 750 \times 2.00 + CE \times \frac{2}{2.36} \times 2.50 = 0$$

$$4{,}500 - 3{,}000 - 1{,}500 + CE \times 2.12 = 0$$

$$0 + 2.12 \times CE = 0$$

$$\therefore \quad CE = 0$$

คำนวณหาแรง CD

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด E ; $\Sigma M_E = 0$ +↻-

$$R_A \times 2.50 - 1{,}200 \times 1.25 + CD \times 2.00 = 0$$

$$1{,}200 \times 2.50 - 1{,}200 \times 1.25 + CD \times 2.00 = 0$$

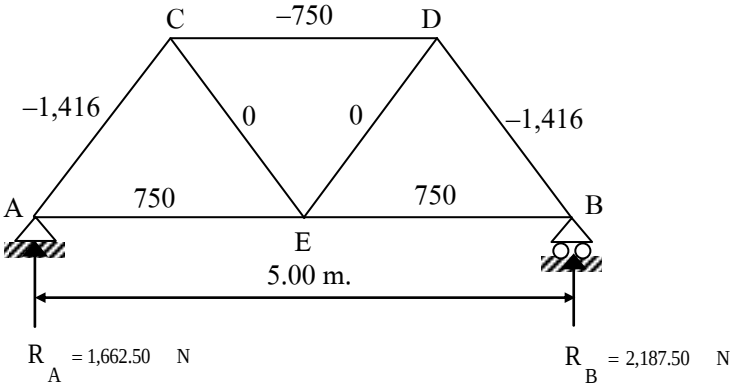
$$3{,}000 - 1{,}500 + CD \times 2.00 = 0$$

$$1{,}500 + CD \times 2.00 = 0$$

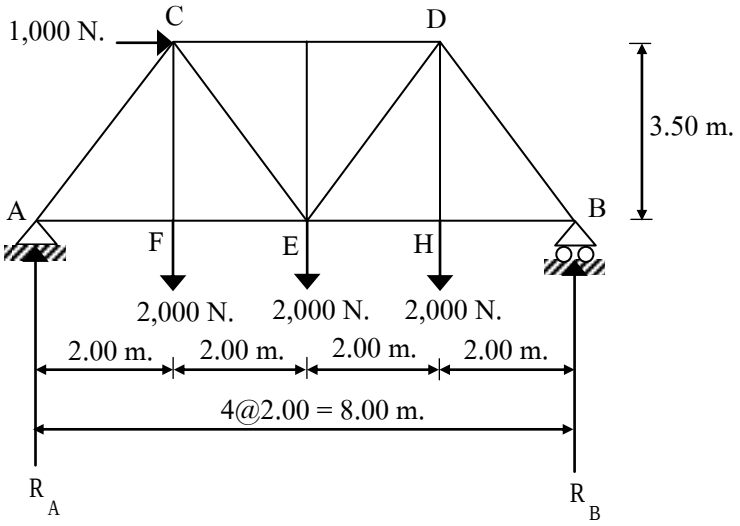
$$CD = -\frac{1{,}500}{2.00}$$

$$\therefore \quad CD = -750 \text{ N. (แรงอัด)}$$

สรุป แรงในโครงถัก FG เท่ากับ – 2,812.50 N. เท่ากัน ถูกต้อง



ตัวอย่างที่ 5.13 จากภาพที่ 5.20 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.20 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์

ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 8.00 + 1{,}000 \times 3.50 - 2{,}000 \times 6.00 - 2{,}000 \times 4.00 - 2{,}000 \times 2.00 = 0$$

$$R_A \times 8.00 + 3{,}500 - 24{,}000 = 0$$

$$R_A \times 8.00 - 20{,}500 = 0$$

$$R_A \times 8.00 = 20{,}500$$

$$= \frac{20{,}500}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 2{,}562.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 8.00 + 1{,}000 \times 3.50 + 2{,}000 \times 6.00 + 2{,}000 \times 4.00 + 2{,}000 \times 2.00) = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 3{,}500 + 24{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 + 27{,}500 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -27{,}500$$

$$-R_B = -\frac{27{,}500}{8.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +3{,}437.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 2{,}000 - 2{,}000 - 2{,}000 = 0$$

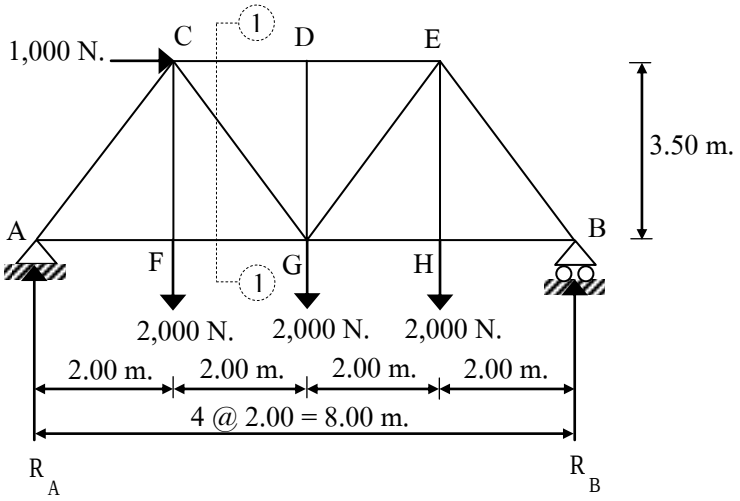
ดังนั้น R_A เท่ากับ 2,562.50 N.

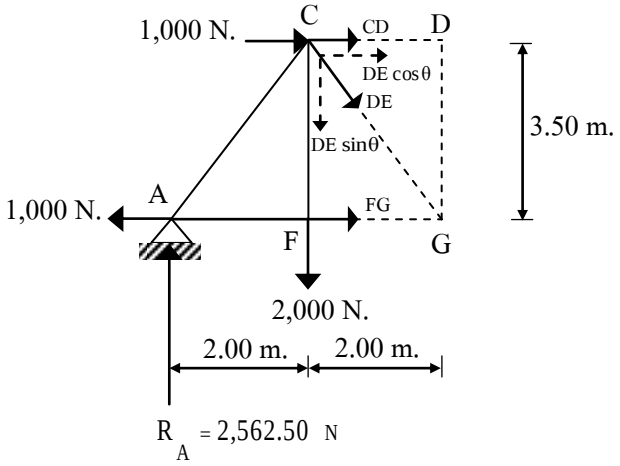
$$2{,}562.50 + R_B - 6{,}000 = 0$$

$$R_B - 3{,}437.50 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +3{,}437.50 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

รูปตัดที่ 1-1





คำนวณหาแรง FG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; ΣM_C $^{+}\circlearrowleft^{-}$ = 0

$$R_A \times 2.00 + 1{,}000 \times 3.50 - FG \times 3.50 = 0$$

$$2{,}562.50 \times 2.00 + 1{,}000 \times 3.50 - FG \times 3.50 = 0$$

$$5{,}125 + 3{,}500 - FG \times 3.50 = 0$$

$$8{,}625 - FG \times 3.50 = 0$$

$$-FG = -\frac{8{,}625}{3.50}$$

$$\therefore FG = +2{,}464 \text{ N. (แรงดึง)}$$

คำนวณหาแรง CG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 + 1{,}000 \times 3.50 - 2{,}000 \times 2.00 - FG \times 3.50 - CG\sin\theta \times 2.00 = 0$$

$$2{,}562.50 \times 4.00 + 3{,}500 - 4{,}000 - 2{,}464 \times 3.50 + CG \times \frac{3.50}{4.03} \times 2.00 = 0$$

$$10{,}250 + 3{,}500 - 4{,}000 - 8{,}624 + CG \times 1.74 = 0$$

$$1{,}126 + CG \times 1.74 = 0$$

$$CG = -\frac{1{,}126}{1.74}$$

$$\therefore CG = -647 \text{ N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง CD

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด G ; $\Sigma M_G = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 + 1{,}000 \times 3.50 - 2{,}000 \times 2.00 + CD \times 3.50 = 0$$

$$2{,}562.50 \times 4.00 + 3{,}500 - 4{,}000 + CD \times 3.50 = 0$$

$$10{,}250 + 3{,}500 - 4{,}000 + CD \times 3.50 = 0$$

$$9{,}750 + CD \times 3.50 = 0$$

$$CD = -\frac{9{,}175}{3.50}$$

$$\therefore CD = -2{,}786 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรง CG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด F ; $\Sigma M_F = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 2.00 + 1{,}000 \times 3.50 + CD \times 3.50 + CG\cos\theta \times 3.50 = 0$$

$$2{,}562.50 \times 2.00 + 3{,}500 - 2{,}786 \times 3.50 + CG \times \frac{2.00}{4.03} \times 3.50 = 0$$

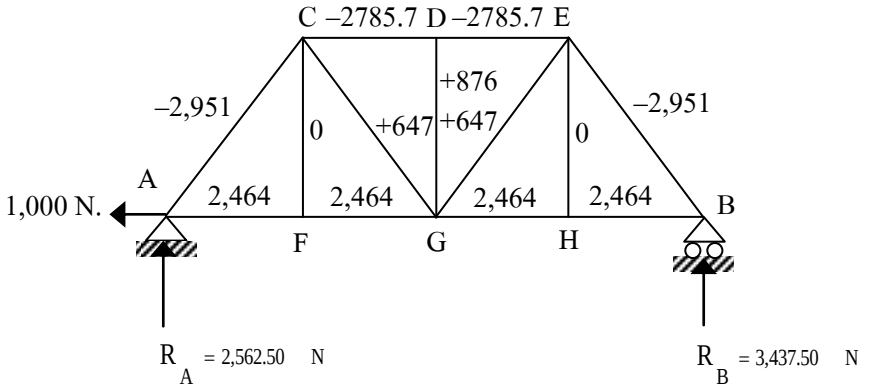
$$5{,}125 + 3{,}500 - 9{,}751 + CG \times 1.74 = 0$$

$$1{,}126 + CG \times 1.74 = 0$$

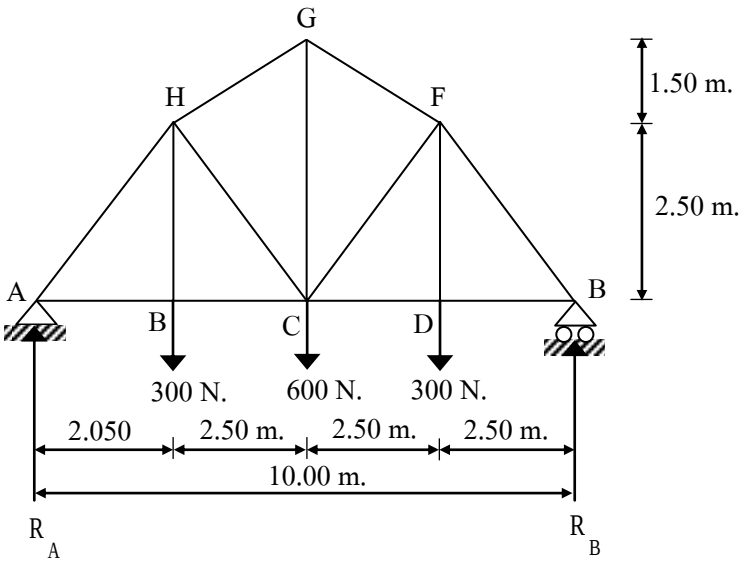
$$CG = -\frac{1{,}126}{1.74}$$

$$\therefore \; CG = -647 \text{ N. (แรงอัด)}$$

สรุป แรงในโครงถัก CG เท่ากับ – 647 N. เท่ากัน ถูกต้อง



ตัวอย่างที่ 5.14 จากภาพที่ 5.21 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.21 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : สมาน เจริญกิจพูลผล (2521)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 10.00 - 300\times 2.50 - 600\times 5.00 - 300\times 7.50 = 0$$

$$R_A \times 10.00 - 750 - 3{,}000 - 2{,}250 = 0$$

$$R_A \times 10.00 - 6{,}000 = 0$$

$$R_A \times 10.00 = +6{,}000$$

$$= +\frac{6{,}000}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 10.00 + 300\times 2.50 + 600\times 5.00 + 300\times 7.50 = 0$$

$$-R_B \times 10.00 + 750 + 3{,}000 + 2{,}250 = 0$$

$$-R_B \times 10.00 + 6{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 10.00 = -6{,}000$$

$$-R_B = -\frac{6{,}000}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 300 - 600 - 300 = 0$$

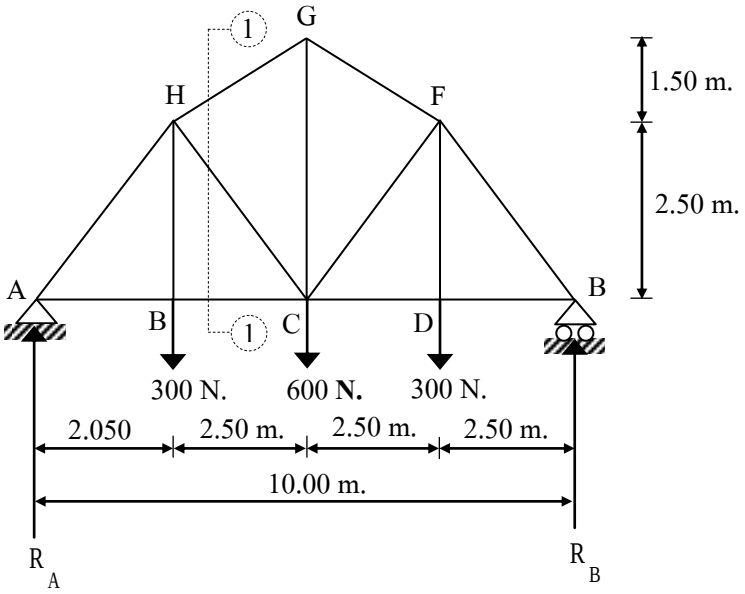
ดังนั้น R_A เท่ากับ 600 N.

$$600 + R_B - 1{,}200 = 0$$

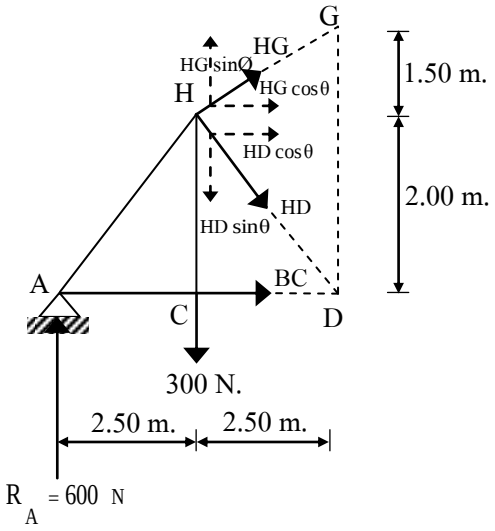
$$R_B - 600 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +600 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1



พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1 (Free Body Diagram)



คำนวณหาแรง CD

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด H ; $\Sigma M_H = 0$ (+ ↺ -)

$$R_A \times 2.50 - CD \times 2.00 = 0$$

$$600 \times 2.50 - CD \times 2.00 = 0$$

$$1{,}500 - CD \times 2.00 = 0$$

$$-CD = -\frac{1{,}500}{2.00}$$

$$\therefore \; CD = +750 \text{ N. (แรงดึง)}$$

คำนวณหาแรง HG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ +↻-

$$R_A \times 5.00 - 300 \times 2.50 + HG\cos\theta \times 2.00 = 0$$

$$- HG\sin\theta \times 2.50$$

$$600 \times 5.00 - 300 \times 2.50 + HG \times \frac{2.50}{2.92} \times 2.00 = 0$$

$$+ HG \times \frac{1.50}{2.92} \times 2.50$$

$$3{,}000 - 750 + HG \times 2.27 + HG \times 1.70 = 0$$

$$2{,}250 + HG \times 3.00 = 0$$

$$HG = -\frac{2{,}250}{3.00}$$

$$\therefore HG = -750 \text{ N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง HD

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด G ; $\Sigma M_G = 0$ +↻-

$$R_A \times 5.00 - 300 \times 2.50 - CD \times 3.50 - HD\cos\theta = 0$$

$$\times 1.50$$

$$- HG\sin\theta \times 2.50$$

$$600 \times 5.00 - 750 - 750 \times 3.50 - HD \times \frac{2.50}{3.20} \times 1.50 = 0$$

$$- HD \times \frac{2.00}{3.20} \times 2.50$$

$$3{,}000 - 750 - 2{,}625 + HD \times 2.73 = 0$$

$$375 + HD \times 2.73 = 0$$

$$HD = -\frac{375}{2.73}$$

$$\therefore HD = -137 \text{ N. (แรงอัด)}$$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรง HG

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ +↻-

$$R_A \times 2.50 + HG\cos\theta \times 2.00 + HD\cos\theta \times 2.00 = 0$$

$$600 \times 2.50 - 750 \times \frac{2.50}{2.91} \times 2.00 - HD \times \frac{2.50}{3.20} \times 2.00 = 0$$

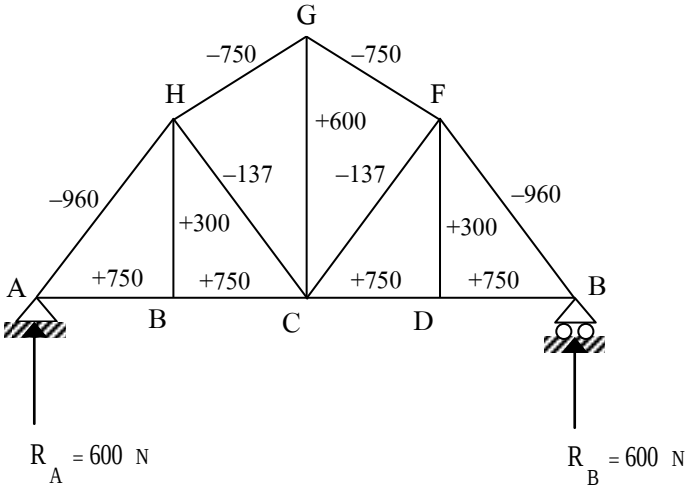
$$1{,}500 - 1{,}286.28 + HD \times 1.56 = 0$$

$$213.72 + HD \times 1.56 = 0$$

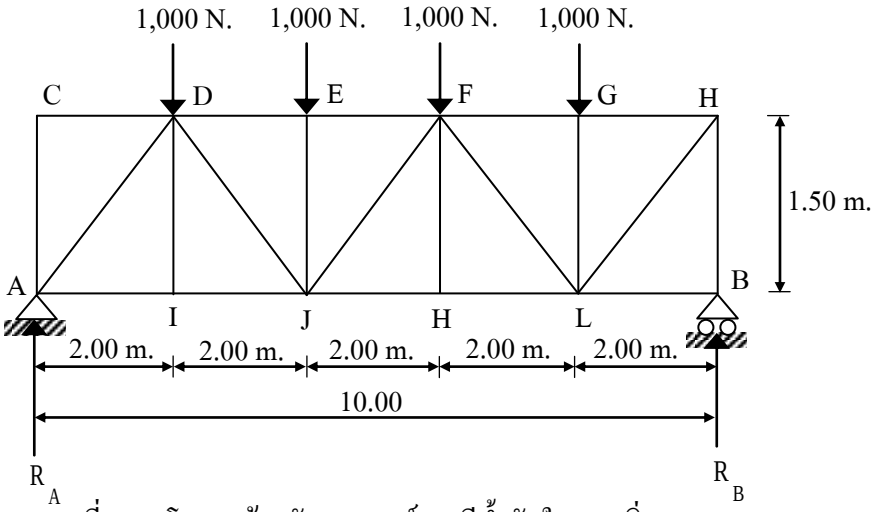
$$HD = -\frac{213.72}{1.56}$$

$$\therefore\ HD = -137 \text{ N. (แรงอัด)}$$

สรุป แรงในโครงถัก HD เท่ากับ – 137 N. เท่ากัน ถูกต้อง



ตัวอย่างที่ 5.15 จากภาพที่ 5.22 จงคำนวณหาแรงในโครงสร้างถัก ต่อไปนี้



ภาพที่ 5.22 โครงสร้างถักแบบวอร์เรนมีค้ำยันในแนวดิ่ง

ที่มา : สมาน เจริญกิจพูลผล (2521)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 10.00 - 1{,}000 \times 8.00 + 1{,}000 \times 6.00 + 1{,}000 \times 4.00 + 1{,}000 \times 2.00) = 0$$

$$R_A \times 10.00 - 8{,}000 - 6{,}000 - 4{,}000 - 2{,}000 = 0$$

$$R_A \times 10.00 - 20{,}000 = 0$$

$$R_A \times 10.00 = +20{,}000$$

$$= +\frac{20{,}000}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_A = +2{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 10.00 + 1{,}000 \times 8.00 + 1{,}000 \times 6.00 + 1{,}000 \times 4.00 + 1{,}000 \times 2.00 = 0$$

$$-R_B \times 10.00 + 8{,}000 + 6{,}000 + 4{,}000 + 2{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 10.00 + 20{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 8.00 = -20{,}000$$

$$-R_B = -\frac{20{,}000}{10.00}$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 1{,}000 - 1{,}000 - 1{,}000 - 1{,}000 = 0$$

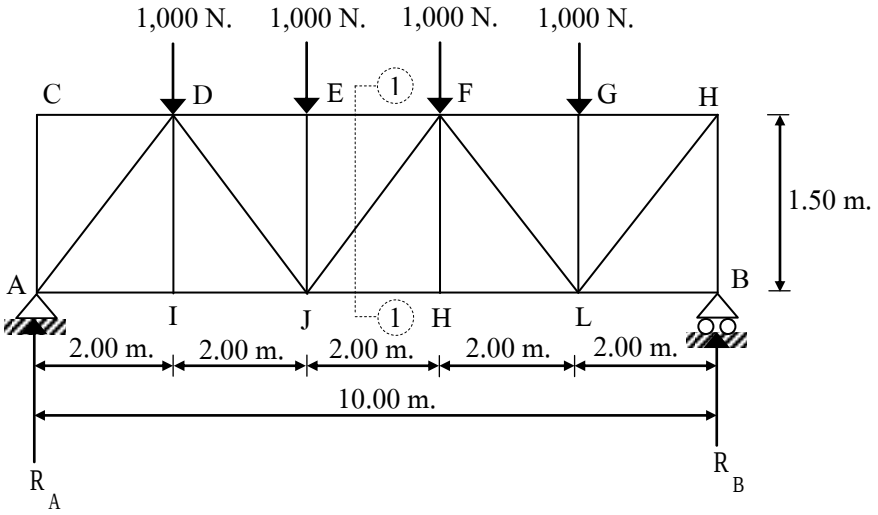
ดังนั้น R_A เท่ากับ 2,000 N.

$$2{,}000 + R_B - 4{,}000 = 0$$

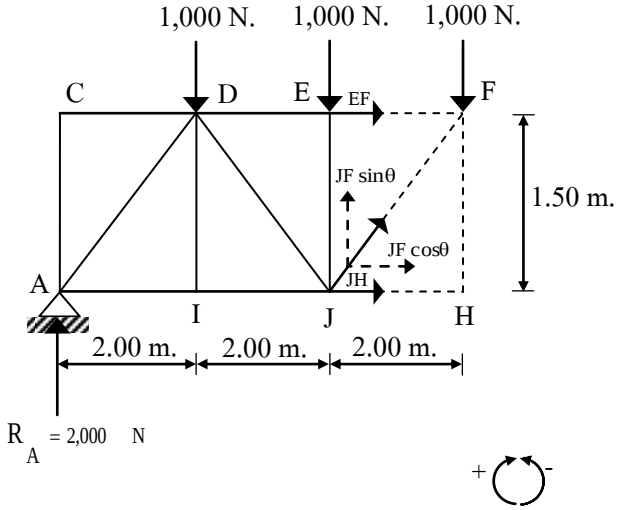
$$R_B - 2{,}000 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = +2{,}000 \text{ N.} \quad (\uparrow^{+})$$

พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1



พิจารณาตัด (Section) ที่หน้าตัด 1-1 (Free Body Diagram)



คำนวณหาแรง EF

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด J ; $\Sigma M_J = 0$

$R_A \times 4.00 - 1{,}000 \times 2.00 + EF \times 1.50 = 0$

$2{,}000 \times 4.00 - 2{,}000 + EF \times 1.50 = 0$

$8{,}000 - 2{,}000 + EF \times 1.50 = 0$

$6{,}000 + EF \times 1.50 = 0$

$EF \times 1.50 = -6{,}000$

$$EF = -\frac{6,000}{1.50}$$

$$\therefore\ EF = -4,000 \text{ N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง JH

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด F ; ΣM_F $^{+}\circlearrowright^{-}$ $= 0$

$$R_A \times 6.00 - 1,000\times 4.00 - 1,000\times 2.00 - JH\times 1.50 = 0$$

$$2,000\times 6.00 - 4,000 - 2,000 - JH\times 1.50 = 0$$

$$12,000 - 6,000 - JH\times 1.50 = 0$$

$$6,000 - JH \times 1.50 = 0$$

$$-EF = +\frac{6,000}{1.50}$$

$$EF = -4,000 \text{ N. (แรงอัด)}$$

คำนวณหาแรง JF

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด E ; $\Sigma M_E = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 1,000\times 2.00 - JH\times 1.50 - JF\cos\theta \times 1.50 = 0$$

$$2,000\times 4.00 - 2,000 - 4,000\times 1.50 + JF\times \frac{2.00}{2.50}\times 1.50 = 0$$

$$8,000 - 2,000 - 6,000 + JF\times 1.20 = 0$$

$$0 + JF \times 1.20 = 0$$

$$\therefore\ JF = 0 \text{ N.}$$

ตรวจสอบ คำนวณหาแรง JF

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด H ; $\Sigma M_H = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$R_A \times 6.00 - 1,000\times 4.00 - 1,000\times 2.00 + EF\times 1.50 + JF\sin\theta = 0$$

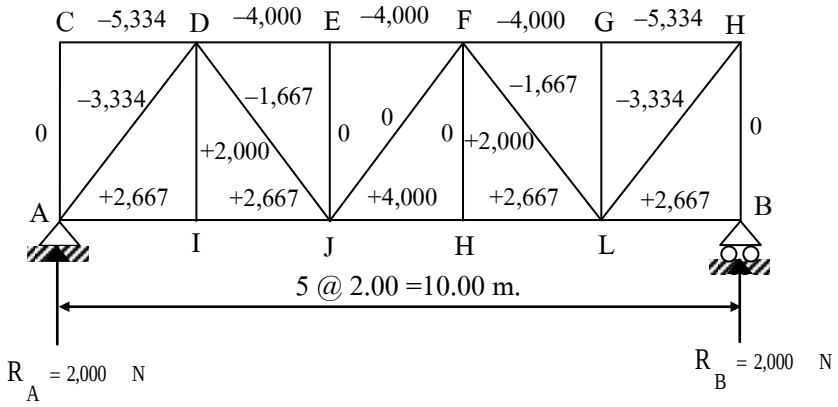
$$2,000\times 6.00 - 4,000 - 2,000 - 4,000\times 1.50 + JF\times \frac{1.50}{2.50}\times 2.00 = 0$$

$$12,000 - 4,000 - 2,000 - 6,000 + JF \times 1.20 = 0$$

$$0 + JF \times 1.20 = 0$$

$$\therefore\ JF = 0 \text{ N.}$$

สรุป แรงในโครงถัก JF เท่ากับ 0 N. เท่ากัน ถูกต้อง



บทสรุป

5.1 ส่วนประกอบของโครงถัก

สำหรับส่วนประกอบของโครงถัก ได้แก่ จันทัน (Upper Chord) ขื่อ (Lowerl Chord) ค้ำยันในแนวดิ่ง (Vertical Web) และ ค้ำยันในแนวเอียง (Diagonal Web) เป็นต้น

5.2 รูปแบบของโครงถัก

1) โครงถักแบบโครงหลังคา มีรูปแบบที่นิยมกัน ได้แก่ ก.แบบโฮว์ (Howe Truss) แบบแพรท (Pratt Truss) แบบแฟน (Fan Truss) และแบบฟิงค์ (Fink Truss) เป็นต้น

2) โครงถักแบบโครงสะพาน มีรูปแบบที่นิยมกัน ได้แก่ แบบโฮว์ (Howe Truss) แบบแพรท (Pratt Truss) แบบวอร์เรน (Warren Truss) แบบวอร์เรนมีค้ำยันแนวดิ่ง (Warren Truss with Vertical) แบบเค (K-Vertical) และแบบบอลติมอร์ (Boltimore) เป็นต้น

5.3 สมมติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก

หรับสมมุติฐานในการวิเคราะห์โครงถัก รายละเอียด ดังนี้

1) ชิ้นส่วนทุกชิ้นในโครงถักจะต้องมีความยาวเป็นเส้นตรง

2) แนวเซ็นต์ทรอยด์ของแต่ละชิ้นส่วนที่ต่อกันจะพบกันที่จุดศูนย์กลางของรอยต่อของชิ้นส่วน

3.น้ำหนักของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นมีค่าน้อยมากในการวิเคราะห์จะไม่นำมาเป็นองค์ประกอบในการพิจารณา

4. น้ำหนักบรรทุกที่กระทำกับโครงถักจะเป็นน้ำหนักแบบน้ำหนักกระทำเป็นจุด (Loint Load) ที่ตำแหน่งของข้อต่อเท่านั้น

5.4 พฤติกรรมของโครงถัก

หลักการออกแบบโครงถักที่ดีและมีเสถียรภาพจะต้องทำให้โครงถักเป็นรูปสามเหลี่ยม (Triangle) เพื่อให้เกิดการยึดรั้ง (Rigid)

5.5 แรงภายในชิ้นส่วนของโครงถักและเครื่องหมายแทนแรง

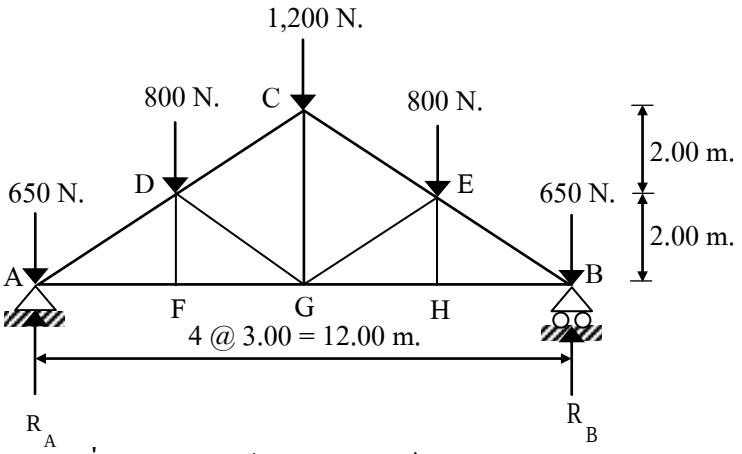
สำหรับแรงภายในชิ้นส่วนของโครงถัก โดยทั่วไปเมื่อทำการวิเคราะห์ แรงภายในชิ้นส่วนมี 2 แรง คือ แรงดึง (Tension ; T) และแรงอัด (Compaction ; C) สามารถใช้เครื่องหมายแทนแรงได้ ดังนี้

5.6 การหาแรงภายในโครงถัก (Truss)

การวิเคราะห์แรงภายในที่เกิดขึ้นในโครงถักต่างๆ นั้น สามารถแบ่งได้เป็น 3 วิธี ได้แก่ วิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) วิธีคำนวณส่วนตัด (Section Method) และ วิธีกราฟฟิก (Graphical Method) เป็นต้น

แบบฝึกหัด

1. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก FG, CD และ GC ซึ่งรับแรงดังแสดงในภาพที่ 5.23 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) (FG = +2,100 N. ,CD = –1,084 N. GC = –1,200 N.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 5.23 โครงสร้างถักแบบโฮว์

ที่มา : สนั่น เจริญเผ่า (2521)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

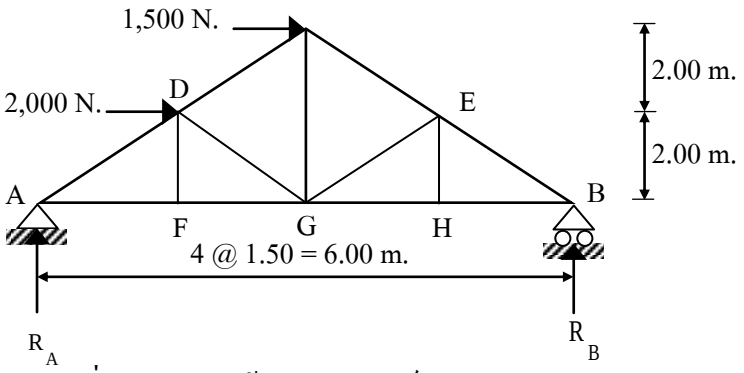
……

……

……

……

2. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก CD,CG และ FG ซึ่งรับแรงดังแสดงในภาพที่ 5.24 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) (CD = +416 N. ,CG = 0 N. FG = 220 N.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 5.24 โครงสร้างถักแบบโฮว์

ที่มา : สนั่น เจริญเผ่า (2521)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

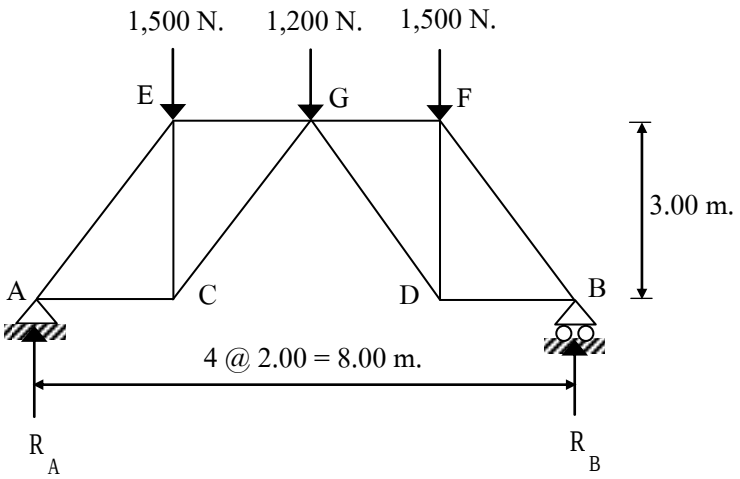
……

……

……

……

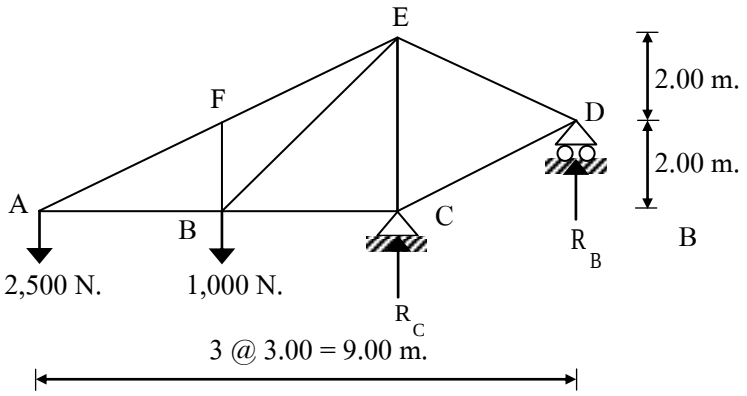
3. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก CE,CG และ AE ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.25 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) (CE = –2,100 N.,CG = 2,520 N. AE = –2,520 N.))



ภาพที่ 5.25 โครงสร้างถักแบบแฟน
ที่มา : สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2536)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

4. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก FE,BC และ BE ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.26 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) (FE = 5,587.50 N.,BC = 3,000 N., BE = 2,235 N.)



ภาพที่ 5.26 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์ (2536)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

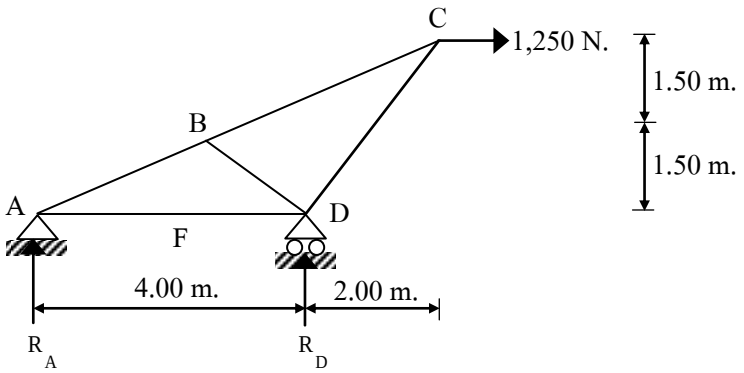
……

……

……

……

5. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก BC,BD และ DC ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.27 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) (BC = 2,096 N.,BD = 0 N., DC = –2,096 N.)



ภาพที่ 5.27 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม

ที่มา : สนั่น เจริญเผ่า (2521)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

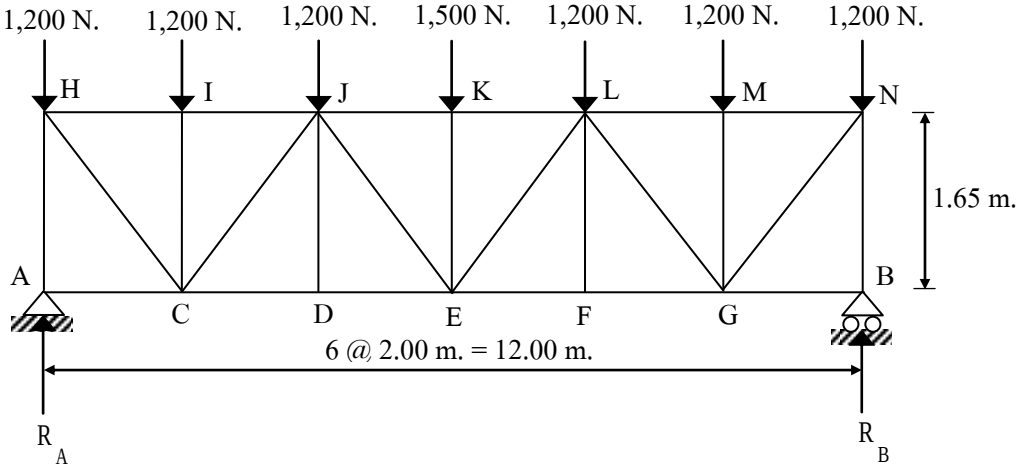
……

……

……

……

6. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก JK,JE และ DE ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.28 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Method) (JK = –7,071 N.,JE = –1,174 N., DE = –6,175 N.)



ภาพที่ 5.28 โครงสร้างถักแบบวอร์เรนค้ำยันในแนวดิ่ง

ที่มา : เสกสรร ศรียศ (2550)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

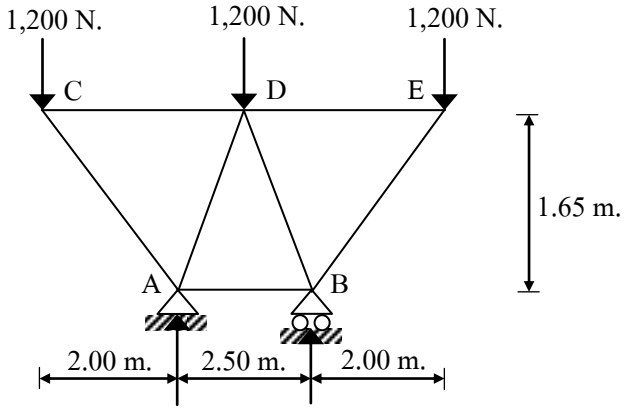
……

……

……

……

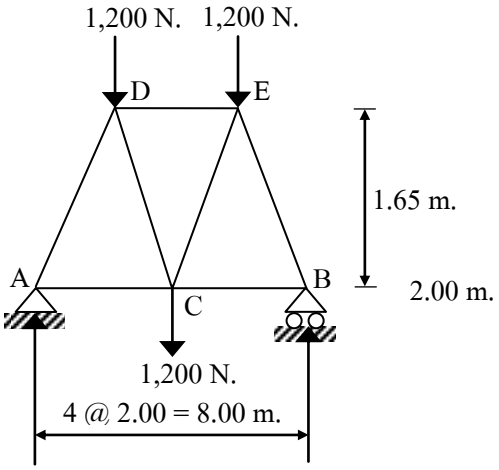
7. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก AD,CD และ AC ดังแสดงในภาพที่ 5.29 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (AD = 0 N.,CD = 1,455 N., AC = 1,891 N.)



ภาพที่ 5.29 โครงสร้างถักแบบแพรท
ที่มา : ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข (2541)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

8. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก AD,DE และ DC ดังแสดงในภาพที่ 5.30 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (AD = –2,972 N.,DE = –2,700 N. DC = 848 N.)



ภาพที่ 5.30 โครงสร้างถักแบบแพรท

ที่มา : ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข (2541)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

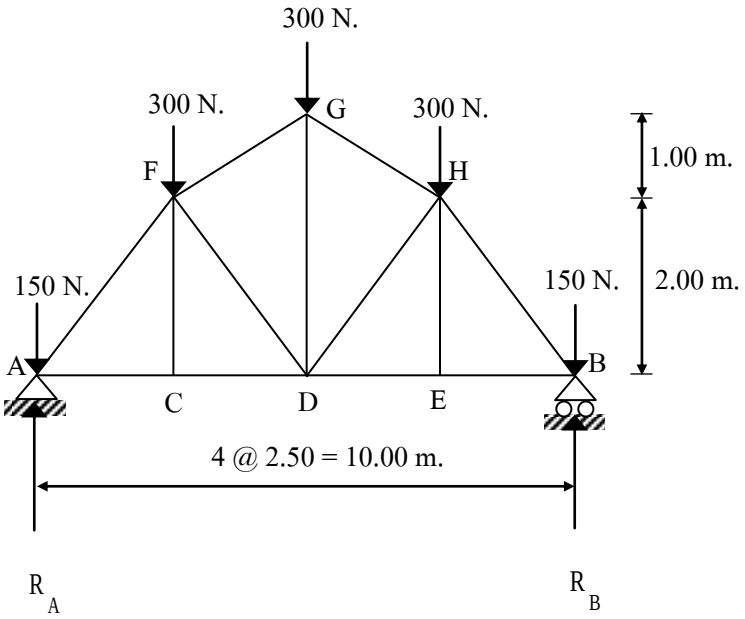
……

……

……

……

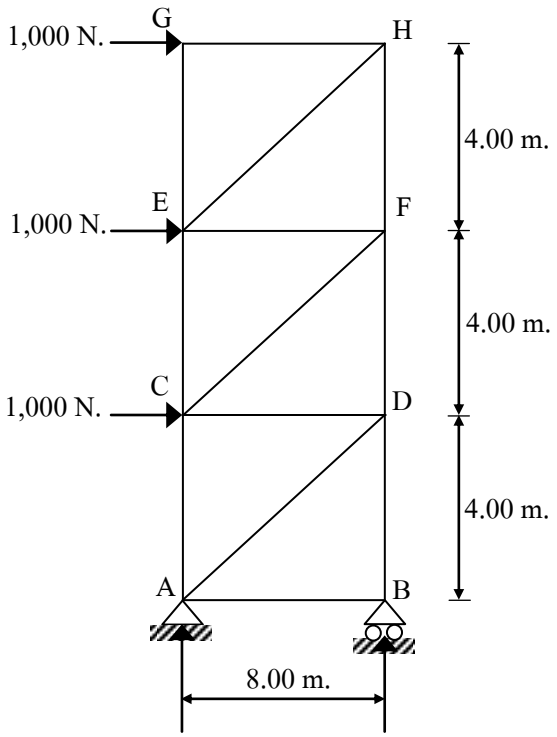
9. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก FG , FD และ CD ซึ่งรับแรงดังแสดงในภาพที่ 5.31 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (AD = –537.63 N.,DE = –80.56 N. DC = 562.50 N.)



ภาพที่ 5.31 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ที่มา : สมาน เจริญกิจพูลผล (2521)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

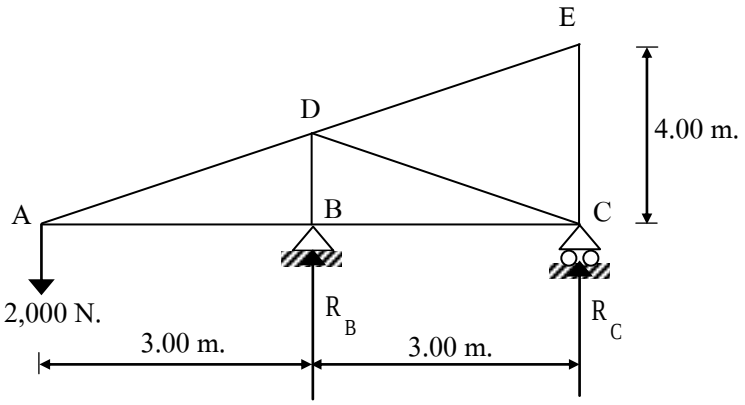
10. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก EG,EH และ FH ดังแสดงในภาพที่ 5.32 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (EG = 0 N.,EH = –1,117.32 N. FH = 500 N.)



ภาพที่ 5.32 โครงสร้างรูปถักสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ที่มา : สุธรรม สุริยมงคล (2528)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

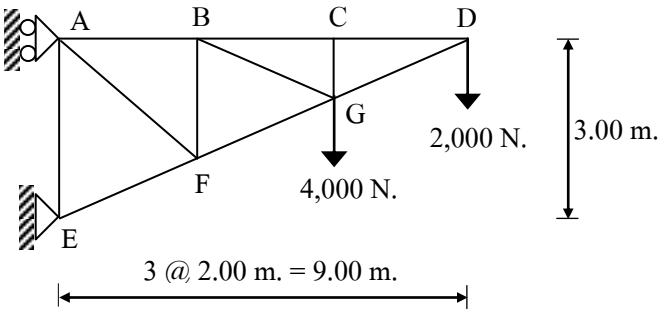
11. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก DE, DC และ BC ดังแสดงในภาพที่ 5.33 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (AB = 0 N. ,BF = 3,614 N. EF = –3,000 N.)



ภาพที่ 5.33 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ที่มา : วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร (2521)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

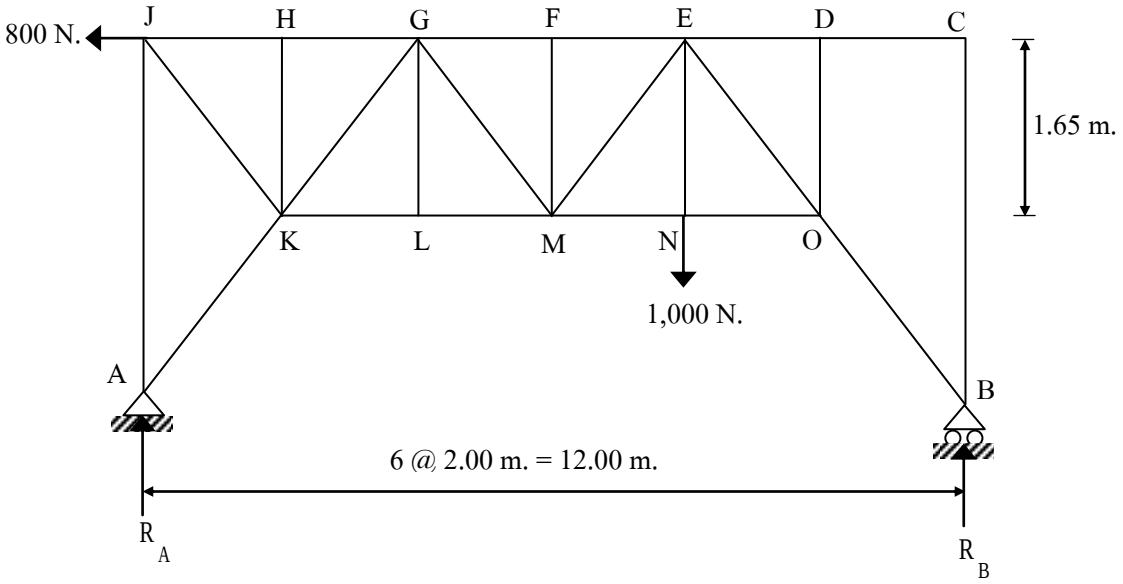
12. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก AB, BF และ FG ดังแสดงในภาพที่ 5.34 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (AB = 8,000 N. ,BF = –2,000 N. EF = –8,988 N.)



ภาพที่ 5.34 โครงสร้างถักรูปสามเหลี่ยม
ที่มา : ธีรยุทธ สุวรรณประทีป (2521)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

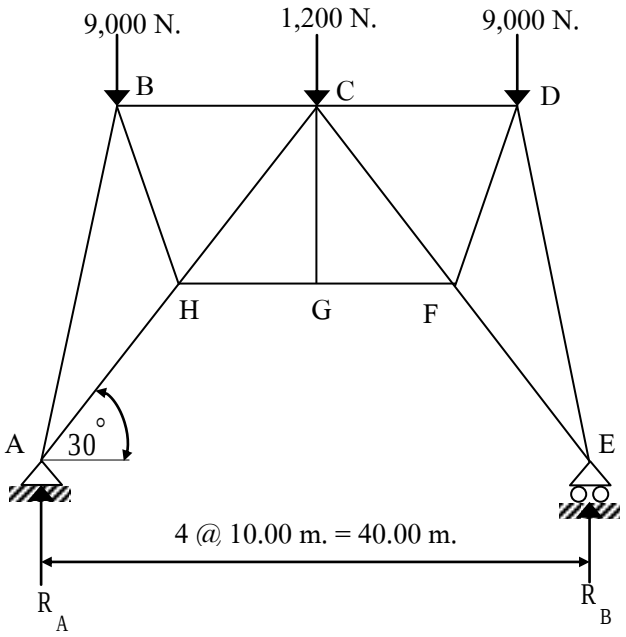
13. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก FN, MN และ GF ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.35 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (FN =845.07 N. ,MN = 200 N. GF =400 N)



ภาพที่ 5.35 โครงสร้างถัก
ที่มา : ธีรยุทธ สุวรรณประทีป (2521)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

14. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก BC และ HB ซึ่งรับแรง ดังแสดงในภาพที่ 5.36 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (BC =2,076 N. ,HB = –1,538 N.)



ภาพที่ 5.36 โครงสร้างถัก

ที่มา : สมาน เจริญกิจพูลผล (2521)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

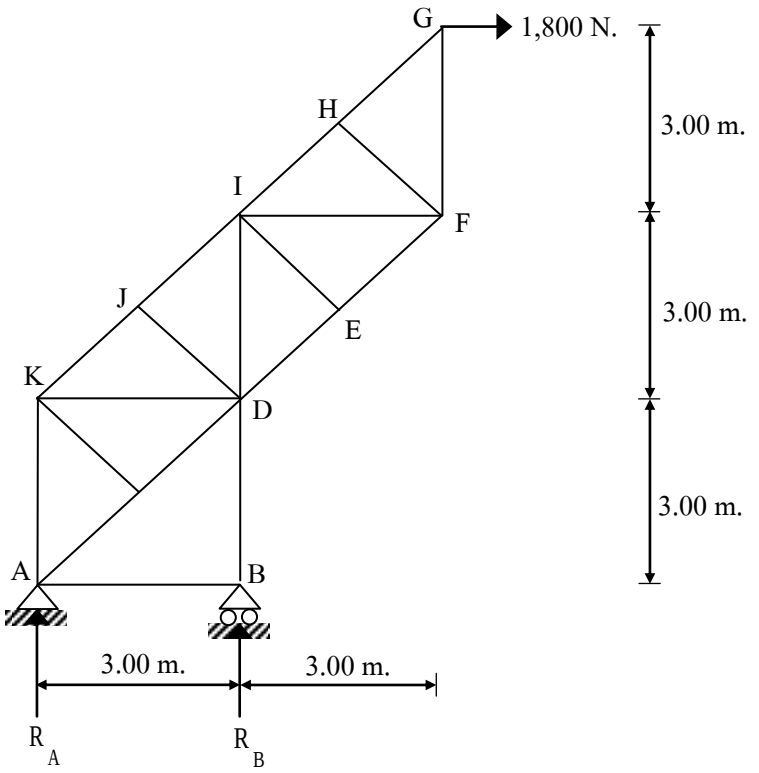
……

……

……

……

15. จงคำนวณหาแรงภายในโครงถัก DE และ ID ซึ่งรับแรงดังแสดงในภาพที่ 5.37 โดยวิธีคำนวณจุดต่อ (Section Method) (BC = –2,535 N. ,ID = –1,800 N.)



ภาพที่ 5.37 โครงสร้างถัก
ที่มา : วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร (2521)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (✕) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. การคำนวณแรงในโครงถักมี 2 วิธี ได้แก่ วิธีคำนวณจุดต่อ (Joint Methods) และวิธีคำนวณโดยการตัด (Joint Methods)

..... 2. ขั้นตอนในการคำนวณหาแรงในโครงถักโดยวิธีจุดต่อจะต้องใช้สมการสมดุล $\Sigma F_y = 0$ และ $\Sigma F_x = 0$

..... 3. โครงถักอย่างยากหรือแบบอินดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ (Statically Indeterminate Truss) เป็นโครงถักที่ไม่สามารถหาค่าแรงต่างๆ ด้วยสมการสมดุลได้ ต้องใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ชั้นสูงมาคำนวณหา

..... 4. โครงถักอย่างง่ายหรือแบบหรือแบบดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ (Statically Indeterminate Truss) เป็นโครงถักที่ไม่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล

..... 5. ส่วนประกอบของโครงถักจะประกอบด้วยส่วนต่างๆ มี 4 ชนิด ได้แก่ จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวดิ่ง ค้ำยันในแนวตรง

..... 6. โครงถัก คือการนำชิ้นส่วนมาประกอบกันขึ้นเป็นรูปโครงสร้างต่างๆ โดยยึดปลายทั้งสองชิ้นส่วนต่างๆ ให้ยึดติดกันและสามารถถ่ายแรงให้เข้ากันและกันได้ด้วยการเชื่อม หมุดย้ำและการใช้น็อต

..... 7. รูปทรงพื้นฐานของโครงถัก คือ รูปทรงสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 3 ชิ้น โดยยึดปลายของชิ้นส่วนด้วยหมุดย้ำ การเชื่อมและการใช้น็อต

..... 8. รูปแบบของโครงถักอาจแบ่งตามประเภทและลักษณะการใช้งานได้ 2 ประเภท ได้แก่ โครงถักแบบโครงหลังคา และโครงถักแบบสะพาน

..... 9. โครงสร้างแบบสะพาน ได้แก่ แบบโฮว์ (Howe Truss) แบบแพรท (Pratt Truss) และแบบแฟน (Fan Truss)

..... 10. โครงสร้างแบบหลังคา ได้แก่ แบบฟิงค์ (Fink Truss) แบบแพรท (Pratt Truss) และแบบโฮว์ (Howe Truss)

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 4 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องในการคำนวณส่วนตัด (Section Methods) คือข้อใด
   ก. ใช้สมการสมดุล $\Sigma F_x = 0$,และ $\Sigma F_y = 0$ คำนวณหาตัวไม่ทราบค่าโดยเลือกจุดหมุนให้เหลือแต่ตัวไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียว
   ข. สมมุตให้แรงไม่ทราบค่าเป็นโมเมนต์บวกก่อนเสมอ
   ค. พิจารณาส่วนตัด (Section) ตรงหน้าตัดที่มีค่าไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ตัว
   ง. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของโครงถักเพียงฐานเดียวก่อนเสมอ
2. ในการคำนวณหาโครงถักโดยวิธีตัด (Section Methods) ที่ถูกต้องคือข้อใด
   ก. การเลือกจุดหมุนหรือคำนวณหาตัวไม่ทราบค่า ควรเลือกจุดที่มีแรงทราบค่าเฉลี่ยและไม่ทราบผ่านเพียง 1 แรงเท่านั้น
   ข. ให้เหลือแรงที่ไม่ทราบค่าที่ต้องการคำนวณเพียงแรงเดียวเพื่อจะได้ลดภาระในการคำนวณลง
   ค. ในการคำนวณโดยวิธีส่วนตัดคำนวณโดยที่ไม่จำเป็นต้องหาแรงก่อน สามารถคำนวณหาจำนวนอีกสองแรงได้
   ง. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง
3. รูปทรงพื้นฐานของโครงถัก ความหมายที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 5 ชิ้นส่วน
   ข. รูปสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 4 ชิ้นส่วน
   ค. รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 3 ชิ้นส่วน
   ง. รูปสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อย 2 ชิ้นส่วน
4. ส่วนประกอบของโครงถัก ประกอบด้วยชิ้นส่วนอย่างน้อยประรวมกันเป็นโครงถักแบบต่างๆ ได้เป็นกี่ชนิด คือข้อใด
   ก. ชิ้นส่วนหลายๆ ชิ้นมาประกอบกัน ได้แก่ จันทัน ขื่อ และค้ำยันในแนวดิ่ง
   ข. ชิ้นส่วนหลายชิ้นมาประกอบกัน จำนวน 4 ชิ้น ได้แก่ จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวดิ่งและค้ำยันในแนวเอียง
   ค. ชิ้นส่วนหลายชิ้นมาประกอบกัน จำนวน 3 ชิ้น ได้แก่ จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวเอียง
   ง. ชิ้นส่วนหลายชิ้นมาประกอบกัน จำนวน 4 ชิ้น ได้แก่ จันทัน ขื่อ ค้ำยันในแนวเอียงและค้ำยันในแนวทแยง

5. ประเภทของโครงถัก แบ่งออกเป็นประเภทใหญ่ๆ ได้กี่ประเภท คือข้อใด
   ก. แบ่งได้เป็น 5 ประเภท
   ข. แบ่งได้เป็น 4 ประเภท
   ค. แบ่งได้เป็น 3 ประเภท
   ง. แบ่งได้เป็น 2 ประเภท
6. ความหมายของโครงถักอย่าง่ายแบบดีเทอร์มิเนทสแตติกส์ที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. เป็นโครงถักที่ไม่สามารถหาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล
   ข. ต้องใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงมาคำนวณหา
   ค. เป็นโครงถักที่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล
   ง. ข้อ ข และ ค ถูกต้อง
7. ความหมายของโครงถักอย่างยากหรือแบบอินดีเทอร์มิเนทสแตติกที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. เป็นโครงถักที่ไม่สามารถหาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล
   ข. ต้องใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงมาคำนวณหา
   ค. เป็นโครงถักที่สามารถวิเคราะห์หาค่าแรงต่างๆ ได้ด้วยสมการสมดุล
   ง. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง
8. ประเภทและลักษณะการใช้งานของโครงถักแบบหลังคา คือข้อใด
   ก. แบบฟิงค์ (Fink Truss) และแบบแพรท (Pratt Truss)
   ข. แบบโฮว์ (Howe Truss) และแบบบอลติมอร์ (Boltimore Truss)
   ค. แบบเค (K-Truss) และแบบวอร์เรน (Warren Truss)
   ง. แบบวอร์เรนมีค้ำยันแนวดิ่ง (Warren Truss with Vertical) และแบบฟิงค์ (Fink Truss)
9. ประเภทลักษณะการใช้งานของโครงถักแบบสะพาน คือข้อใด
   ก. แบบบอลติมอร์ (Boltimore Truss)และแบบแฟน (Fan Truss)
   ข. แบบฟิงค์ (Fink Truss) และแบบแพรท (Pratt Truss)
   ค แบบโฮว์ (Howe Truss) และแบบเค (K-Truss)
   ง. แบบแพรท (Pratt Truss) และแบบโฮว์ (Howe Truss)
10. ในการคำนวณจุดต่อ (Joint Methods) มีหลักการคำนวณที่ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. ใช้สมการสมดุลทำ $\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ และ $\Sigma M = 0$
   ข. แตกแรงที่เอียงให้อยู่ในแนวแกน X และแกน Y
   ค พิจารณาจุดต่อที่มีตัวไม่ทราบค่าเกินสองตัว โดยสมมุติให้แรงไม่ทราบค่าเป็นแรงดึง
   ง. เมื่อทราบค่าแรงภายในที่จุดต่อแรกแล้วให้พิจารณาที่จุดต่อที่สามและสี่ตามลำดับ

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

ชนะ กสิภาร์. (2528). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชวนพิมพ์ จำกัด.

ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ. (2546). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ. (2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ธีรยุทธ สุวรรณประทีปและคณะ.(2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เมธี หมั่นทำการ และคณะ. (2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์**.กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

มนัส อนุศิริ. (2548). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก.** กรุงเทพฯ: :ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ยิ่งศักดิ์ พรรณเชษฐ์. (2541). **กำลังวัสดุเบื้องต้น**.พิมพ์ครั้งที่ 4 มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546).**ทฤษฎีโครงสร้าง** ภาควิชาครุศาสตร์โยธา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ.

บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข. (2541). **กลศาสตร์วิศวกรรมภาคสถิติศาสตร์.หน่วยสารบรรณ.** ขอนแก่น: คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ศิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2536). **กำลังวัสดุ**. กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 4 โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.

เสกสรร ศรียศ. (2550). **กลศาสตร์วิศวกรรม1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์. (2536). **กลศาสตร์วัสดุ,** กรุงเทพพมหานคร: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สมนึก กุลประภา. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

สนั่น เจริญเผ่าและคณะ.(2521). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก**.กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ ป.พาณิชย์สัมพันธ์.

สงวน วงษ์ชวลิตกุลและคณะ. (2541). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แม็คกรอ-ฮิลอินเตอร์เนชั่นแนลเอ็นเตอร์ไพร์ส อิงค์.

สมาน เจริญกิจพูลผลและคณะ. (2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

สมนึก กุลประภา (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

สุธรรม สุริยมงคล (2528). **การวิเคราะห์โครงอาคารรับแรงกระทำด้านข้างด้วยวิธีโครงทดแทน.** วิศวกรรมสถานแห่งประเทศไทย กรุงเทพฯ: เล่มที่ 1 กุมภาพันธ์ 2528.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

สุรศักดิ์ รายี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

อำนวย พาณิชกุล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วทัชภพ เดชพันธ์ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

วินิจ ช่อวิเชียร (2528).**ทฤษฎีโครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วินิต ช่อวิเชียร (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

วีระศักดิ์ กรัยวิเชียรและคณะ. (2521). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980). **Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Bresler, B., Lin, T.Y., and Scalzi, J.B.: (1963). **Design of Steel Structural**. 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York.

Elwyn E. Seelye. (1960). **Data book for civil engineers**. New York.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

J.B.Wilbur (1965). **Elementary Structural Analysis ,**2^{nd} Ed, Mc Graw-Hill,New York.

Timoshenko,S.P. (1969).**S.P. and D.H.Young: Throry of Structures**, 2ed Ed., McGraw-Hill New York,

YUAN-YU HSIEH (1995)**.Elementary theory of Structural,** U.S.A,Mexico.

หน่วยที่ 6 การโก่งตัวของโครงสร้าง

เนื้อหาสาระ

6.1 บทนำ

6.2 พื้นที่โมเมนต์ (Moment Area Method)

6.3 คานเสมือน (Conjugate Beam Method)

จุดประสงค์การเรียนรู้

6.1 บทนำอธิบายความหมายของพื้นที่โมเมนต์ได้

6.2 อธิบายความหมายของพื้นที่โมเมนต์ได้

6.3 สามารถคำนวณหาของพื้นที่โมเมนต์ได้

6.4 อธิบายคานเสมือนได้

6.5 สามารถคำนวณคานเสมือนได้

แนวคิดในการสอน

ในการวิเคราะห์โครงสร้างโดยเฉพาะคาน (Beam) จะต้องวิเคราะห์หาค่ามุมลาดเอียง (Slope) การเปลี่ยนแปลงของมุม และการโก่งตัวของโครงสร้าง (Deflection) ด้วยนอกจากจะคำนวณเพื่อตรวจสอบดูว่าส่วนโครงสร้างนั้นๆ มีการโก่งตัวเกินมาตรฐานที่กำหนดหรือไม่ การโก่งของโครงสร้างตัวยังเป็นหลักการเบื้องต้นของการวิเคราะห์โครงสร้างแบบดีเทอมิเนท (Determinate) และแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate) สำหรับการโก่งตัวของโครงสร้างมีหลายวิธีด้วยกัน แต่ในหน่วยนี้จะกล่าวถึงเฉพาะวิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) และวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) เท่านั้น สำหรับวิธีของพื้นที่โมเมนต์ จะใช้หลักการเขียนภาพของเส้นโค้งอิลาสติคเข้าประกอบ เพื่อที่จะหามุมลาดเอียง และการโก่งตัวของโครงสร้าง ส่วนวิธีของคานเสมือนนั้นสามารถใช้คำนวณหาการโก่งตัวของโครงสร้างได้โดยไม่ต้องอาศัยการเขียนเส้นโค้งอิลาสติค เพียงแต่ดัดแปลงทิศทางของน้ำหนักกระทำและฐานรองรับของโครงสร้าง เพื่อที่จะคำนวณหามุมลาดเอียงและการโก่งตัวของโครงสร้างได้ ซึ่งจะได้ผลลัพธ์ที่ตรงกันทั้งสองวิธีในหน่วยนี้ผู้เรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับวิธีพื้นที่โมเมนต์ ได้แก่ ทฤษฎีของพื้นที่โมเมนต์ พิสูจน์แนวคิดพื้นที่โมเมนต์ ขั้นตอนหรือจัดลำดับการคำนวณพื้นที่โมเมนต์ การกำหนดเครื่องหมาย ข้อสังเกตจากวิธีพื้นที่โมเมนต์ คุณสมบัติของภาพทรงเลขาคณิต เป็นต้น ส่วนวิธีคานเสมือนได้แก่

ฐานรองรับของคานจริงและคานเสมือน วิธีการสำหรับวิเคราะห์ หลักการของคานเสมือน การสมดุล ลำดับการคำนวณ เครื่องหมายของคานจริงและคานเสมือน เครื่องหมายในการคำนวณหาคานจริงกับคานเสมือน เป็นต้น

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

6.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

6.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

6.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

6.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

6.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

6.1 สื่อ Power Point

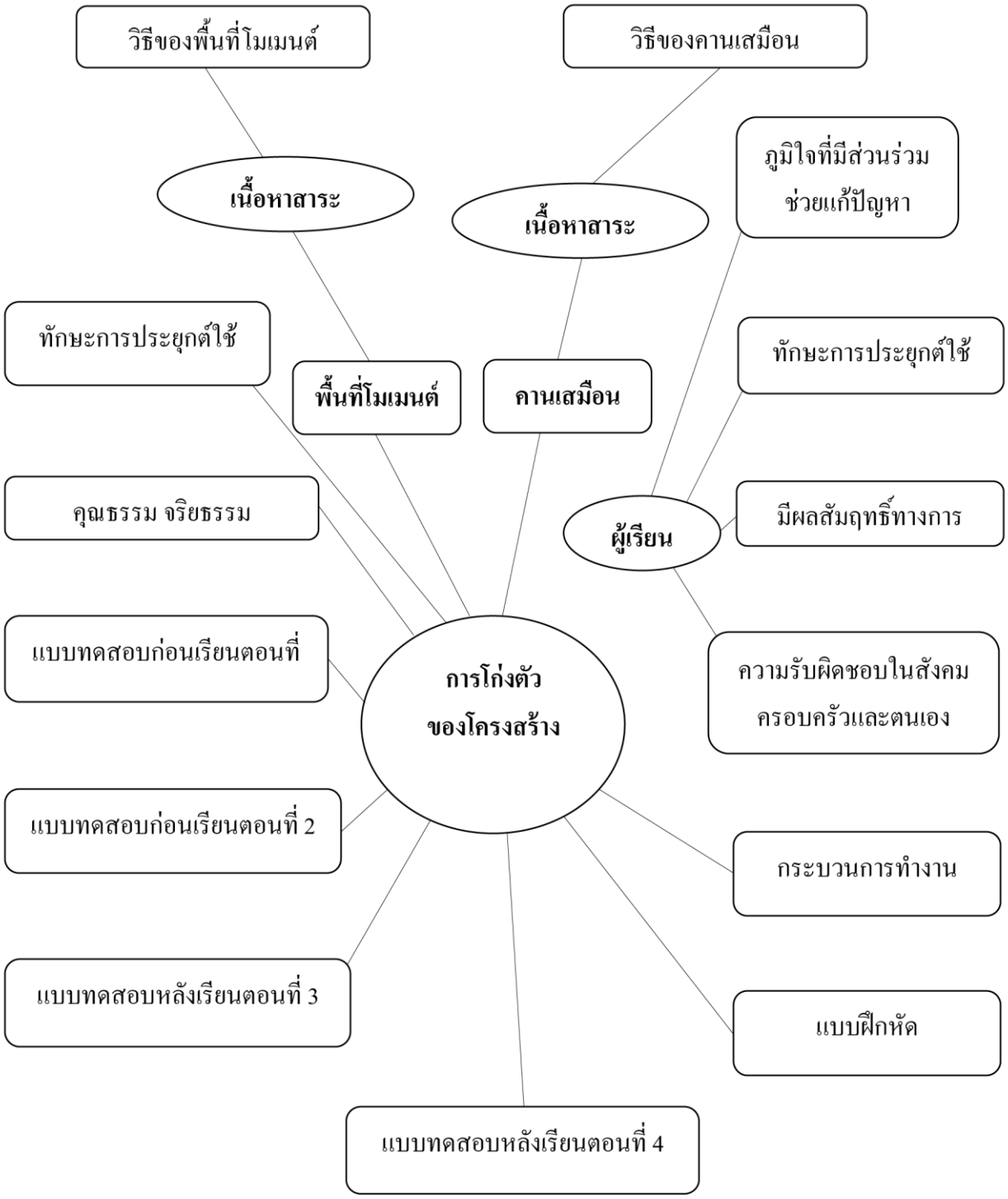
6.2 สื่อแผ่นใส

6.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

6.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)



แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่1จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. การวิเคราะห์โครงการวิธีพื้นที่โมเมนต์จะต้องเข้าใจหลักเชื่อมต่อโครงสร้างแบบดีเทอมิเนท

..... 2. การเขียนเส้นการโก่งตัวของโครงสร้างอาจทำได้จากการสังเกตโดยจำเป็นต้องทราบแรงภายในที่เกี่ยวข้อง

..... 3. การเขียนการโก่งตัวของโครงสร้างไม่จำเป็นต้องโค้งต่อเนื่องกันตลอด

..... 4. วิธีของพื้นที่โมเมนต์เป็นวิธีที่ใช้คำนวณการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงดัดของคานและโครงข้อแข็งใช้สำหรับโครงข้อหมุนไม่ได้

..... 5. วิธีของพื้นที่โมเมนต์ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ง่ายๆ ระหว่างการหมุนและโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ ของชิ้นส่วนที่รับแรงดัด

..... 6. ทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์มุมระหว่างเส้นสัมผัสจากจุดหนึ่ง จุดบนเส้นโค้งอิลาสติกหรือการเปลี่ยนรูปของมุม

..... 7.วิธีวิธีของคานเสมือนในการคำนวณการโก่งตัวของโครงสร้าง สามารถหาการโก่งตัวของโครงสร้างได้โดยตรงโดยไม่ต้องอาศัยการเขียนเส้นโค้งอิลาสติค

..... 8. เมื่อต้องการหามุมลาดเอียงของเส้นโค้งยืดหยุ่นของคานเสมือนคือมุมลาดเอียงที่จุดใดๆ เท่ากับโมเมนต์ของคานเสมือน

..... 9. เมื่อต้องการหาการโก่งตัวของเส้นโค้งยืดหยุ่นที่จุดใดๆเท่ากับแรงดัดของคานเสมือน

..... 10. ทฤษฎีที่1 ของคานเสมือนคือความลาดชันที่จุดที่ต้องการทราบ ค่าความจริงมีค่าเท่ากับแรงเฉือนที่จุดเดียวกันในคานเสมือน

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. วิธีของพื้นที่โมเมนต์เป็นวิธีที่ใช้คำนวณการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงดัดของคานและโครงข้อแข็ง คือข้อใด
   ก. ใช้สำหรับโครงข้อแข็งที่หมุนได้
   ข. ใช้สำหรับโครงถักที่ยึดแบบยึดหมุน
   ค. ใช้สำหรับโครงถักที่ยึดแบบยึดแน่น
   ง. ใช้สำหรับโครงข้อหมุนไม่ได้
2. วิธีของพื้นที่โมเมนต์ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ง่ายๆระหว่างอะไรต่อไปนี้ คือข้อใด
   ก. ระหว่างการเคลื่อนที่และแรงเฉือน
   ข. ระหว่างการหมุนและแรงเฉือน
   ค. ระหว่างการเคลื่อนที่และโมเมนต์ดัด
   ง. ระหว่างการหมุนและโมเมนต์ดัด
3. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. แกน x มีค่าบวก เมื่อพยายามทำให้คานโก่งตัวขึ้น
   ข. เมื่อ EI มีค่าบวกเสมอและแขนของโมเมนต์ x ซึ่งวัดจากจุดใดๆ จำได้ค่าลบเสมอ
   ค. ถ้าระยะการโก่งของจุดใดๆ ที่วัดจากเส้นสัมผัสมีค่าบวกแสดงว่าจุดนั้นอยู่เส้นวิกฤต
   ง. พื้นที่โมเมนต์ $\frac{M}{EI}$ ของโมเมนต์บวกมีค่าเป็นลบแสดงว่ามุมลาดที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของเส้นสัมผัสทางขวามือจะหมุนทวนเข็มนาฬิกา
4. ในการกำหนดเครื่องหมายของพื้นที่โมเมนต์ ไดอะแกรมจะเขียนอยู่บนด้านที่รับแรงอัด ความหมาย คือข้อใด
   ก. มีค่าเป็นลบเมื่ออยู่เหนือแนวแกสะเทิน
   ข. มีค่าเป็นลบเมื่ออยู่ใต้แนวแกนสะเทิน
   ค. มีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่เหนือแนวแกนสะเทิน
   ง. มีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่ใต้แนวแกนสะเทิน
5. ข้อใดกล่าวถูกต้อง คือข้อใด
   ก. ระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัสลากมาจากจุดใดๆ กับจุดที่พิจารณาจะมีค่าเป็นลบ
   ข. ระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัสลากมาจากจุดใดๆ กับจุดที่พิจารณาจะมีค่าเป็นบวก
   ค. ถ้าจุดใดๆ ที่กำลังพิจารณาอยู่เหนือเส้นสัมผัสจะมีค่าเป็นบวกถ้าจุดนั้นอยู่เหนือเส้นสัมผัส
   ง. ถ้าจุดใดๆ ที่กำลังพิจารณาอยู่เหนือเส้นสัมผัสจะมีค่าเป็นบวกถ้าจุดนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัส

6. สำหรับข้อสังเกตจากวิธีพื้นที่โมเมนต์ คือข้อใด
   ก. ต้องการเปลี่ยนมุมระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้งอิลาสติคก็ให้หาการโก่งตัวที่จุดนั้นๆ
   ข. เมื่อต้องการหาระยะการเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดหนึ่งๆ ซึ่งจะไม่อยู่บนเส้นโค้งอิลาสติคเดียว
   ค. ทฤษฎีทั้งสองของพื้นที่โมเมนต์ การมีค่าการเคลื่อนที่สัมผัสซึ่งบางครั้งค่านี้อาจเป็นระยะการโก่งตัวของโครงสร้างที่แท้จริงก็ได้
   ง. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง
7. วิธีของคานเสมือนถูกสร้างขึ้นโดยใครต่อไป คือข้อใด
   ก. ริชาร์ด ฮับเบอร์เลน รัสเซล
   ข. ริชาร์ด ฮับเบอร์เลน รัสเซล (R.C.Hibbeleh Russell)
   ค. มูลเลอร์ -เบย์สลาร์ (Muller –Breslau)
   ง. ออทโท โมร์ (Ottho Mohr)
8. ในการคำนวณการโก่งตัวของโครงสร้างโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์ ข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. ใช้คำนวณการโก่งตัวของโครงสร้างได้โดยต้องอาศัยการเขียนเส้นอิลาสติค
   ข. การเขียนรูปภาพเส้นโค้งอิลาสติคแสดงลักษณะการโก่งตัวเข้าช่วย
   ค. ต้องใช้สมการที่ฐานรองรับสำหรับคำนวณหาคานเสมือน
   ง. ใช้การคำนวณการดก่งตัวโดยการดัดแปลงมีทิศทางของน้ำหนักและฐานรองรับของโครงสร้างก่อนเสมอ
9. การคำนวณการโก่งตัวของโครงสร้างโดยวิธีคานเสมือน ข้อใดถูกต้อง
   ก. ใช้การคำนวณการโก่งตัวของโครงสร้างได้โดยไม่ต้องอาศัยการเขียนเส้นโค้งอิลาสติค
   ข. ใช้การคำนวณหรือดัดแปลงทิศทางของน้ำหนักและฐานรองรับของโครงสร้างก่อนเสมอ
   ค. การเขียนเส้นโค้งอิลาสติคแสดงลักษณะการโก่งตัวเข้าช่วย
   ง. ข้อ ก และ ค ถูกต้อง
10. ข้อใดคือทฤษฎีของวิธีคานเสมือน คือข้อใด
   ก. เมื่อต้องการหาการโก่งตัวของโครงสร้างจะต้องหามุมลาดเอียงของเส้นโค้งอิลาสติคของคานจริงเสมอ
   ข. ค่าความลาดชันที่จุดต้องการทราบค่าคานจริงกับค่าแรงเฉือนที่จุดหลายจุดในคานเสมือน
   ค. ระยะการเสียรูปหรือระยะการโก่งตัวที่จุดต้องการทราบค่าในคานจริงมีค่าเท่ากับโมเมนต์ที่จุดเดียวกันในคานเสมอ
   ง. สำหรับฐานรองรับของคานเสมือนต้องใช้เงื่อนไขและขอบเขตที่เหมาะสม

6.1 บทนำ

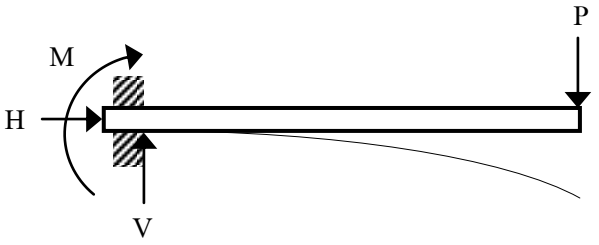
การวิเคราะห์โครงสร้าง นอกจากจะวิเคราะห์หาค่าของหน่วยแรงต่างๆ ในแต่ละชิ้นส่วนของโครงสร้างแล้ว ยังจำเป็นที่จะต้องวิเคราะห์หาค่ามุมลาดเอียง ค่าเปลี่ยนมุมลาดเอียงและระยะการโก่งตัวของโครงสร้างนี้ การวิเคราะห์หาการโก่งตัวของโครงสร้างโดยรวมถึงการหามุมหรือความลาดเอียง (Slope) การเปลี่ยนแปลงของมุม (Change of Slope) และระยะโก่งตัว (Deflection) การวิเคราะห์หาการโก่งตัวนี้ นอกจากการคำนวณเพื่อตรวจสอบดูว่าส่วนของโครงสร้างนั้นๆ มีการโก่งตัวเกินกว่ามาตรฐานที่กำหนดหรือไม่แล้ว การโก่งตัวยังเป็นหลักเบื้องต้นของการวิเคราะห์โครงสร้างแบบดีเทอรมิเนทอีกและอินดีเทอรมิเนท เป็นต้น

ส่วนลักษณะของการโก่งตัวของโครงสร้างที่โก่งตัวมีหลายสาเหตุผู้ศึกษาจะต้องเข้าใจลักษณะของโครงสร้างและสัญลักษณ์ของเส้นการโก่งตัวต่างๆ เป็นอย่างดี และเส้นแสดงการโก่งตัวของโครงสร้างเรียกว่า เส้นโค้งอิลาสติค (Elastic Curve) เป็นเส้นที่อยู่ในแนวแกนสะเทินของแต่ละส่วนของโครงสร้าง ถ้าไม่คำนึงถึงการยืดตัวของโครงสร้างอันเนื่องมาจากแรงตามแนวแกนแล้ว เส้นโค้งอิลาสติคนี้จะมีความยาวเท่ากับความยาวเดิมของส่วนโครงสร้างนั้นเสมอ พึงเข้าใจว่าการโก่งตัวนี้เป็นผลมาจากการกระทำของแรงในโครงสร้าง ได้แก่ โมเมนต์ดัด แรงตามแนวแกนและแรงเฉือน การโก่งตัวของคานหรือโครงข้อแข็ง (Rigid Fame) อันเนื่องมาจากแรงตามแนวแกนและแรงเฉือนมักมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับผลที่เกิดจากโมเมนต์ดัด แต่การโก่งตัวของโครงข้อหมุน (Truss) เกิดจาแรงตามแนวแกนภายในโครงสร้างเป็นส่วนใหญ่

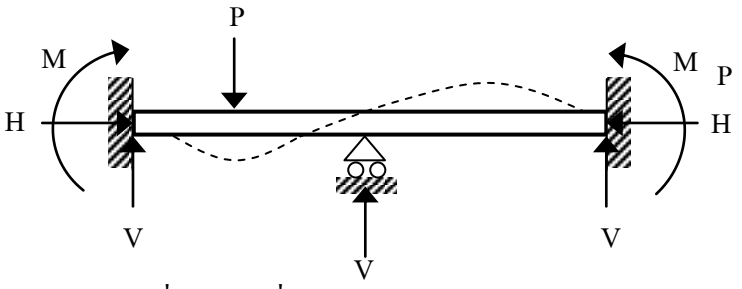
ในขณะเดียวกันในการเขียนเส้นการโก่งของโครงสร้างอาจทำได้จากการสังเกตโดยไม่จำเป็นต้องทราบถึงแรงภายในที่เกิดขึ้น เช่น เมื่อคานยื่นรับน้ำหนักตามภาพภาพที่ 6.2 คานนี้จะโก่งตัวตามแนวเส้นประ สังเกตว่าเส้นแสดงการโก่งตัวจะต้องมีความโค้งต่อเนื่องกันตลอด ลักษณะของการยึดปลายก็เป็นเครื่องช่วยในการเขียนเส้นนี้เช่นเดียวกัน ดังนั้นในภาพภาพที่ 6.1 ซึ่งมีที่รองรับที่เป็นแบบยึดแน่น จึงไม่มีการเคลื่อนที่แต่อย่างใดและค่าความลาดเอียงก็เป็นศูนย์ด้วย ในระยะที่คานต่อเนื่องรับน้ำหนักตามภาพภาพที่ 6.2 เนื่องจากปลายคานที่จุด A และ C ยึดแน่น ฉะนั้นตรงจุดดังกล่าวไม่เคลื่อนที่และไม่มีค่าของมุมลาดเอียง ระยะโก่งตัวตรงฐานรอง B ก็ไม่มีเช่นเดียวกัน แต่จะมีความลาดเอียงต่อเนื่องกัน คานจะโก่งตัวในช่วง AB และโก่งตัวขึ้นในช่วง BC จุดที่ความโค้งเปลี่ยนเครื่องหมาย เรียกว่า จุดดัดกลับ (Inflection point) แสดงด้วยเครื่องหมายกากบาท ตรงจุดนี้ค่าโมเมนต์ดัดเป็นศูนย์ สำหรับภาพภาพที่ 6.3 และ 6.4 แสดงการโก่งตัวของโครงข้อแข็ง ถ้าไม่คำนึงถึงการยืดตัวของส่วนโครงสร้างอันเกิดจากแรงตามแนวแกนแล้ว ที่จุดต่อ A ในภาพภาพที่ 6.3 ก็จะไม่เคลื่อนลงแต่อย่างใด แต่ตรงจุด A ซึ่งจุดต่อแบบยึดรั้ง (Rigid joint) จะมีการหมุนโดยชิ้นส่วนที่มาพบกันตรงจุดต่อนั้น จะหมุนไปในทิศทางเดียวกันด้วยมุมที่เท่ากันด้วย สังเกตด้วยว่า

ส่วนของโครงสร้าง AB ไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวระดับแต่อย่างใด ฉะนั้นโครงสร้างในภาพภาพที่ 6.3 นี้จึงไม่มีการเซ (No Sideway)

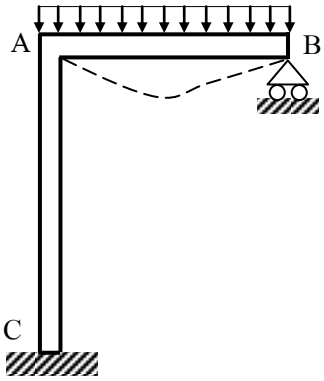
สำหรับภาพภาพที่ 6.4 จุดต่อ C จะเคลื่อนที่ไปในแนวที่ตั้งฉากกับ CD ตามความเป็นจริง การเคลื่อนการเคลื่อนที่ของจุด C จะเป็นภาพวงกลม (Arc) โดยมีจุด D เป็นจุดศูนย์กลาง แต่เนื่องจากการเคลื่อนที่ทั้งหมดนี้มีค่าน้อยมาก ดังนั้นจึงแทนส่วนโค้งของวงกลมด้วยเสนตั้งฉากดังกล่าว ส่วนจุดต่อ B จะเคลื่อนที่ไปทางขวาไปแนวนอนด้วยระยะเดียวกันกับจุดที่ต่อ C เคลื่อนไปในแนวนอนด้วย ทั้งนี้เพราะไม่คิดถึงการยืดตัวหดตัวของชิ้นส่วนนั้นเอง และตรงจุด B และ C จะมีการหมุน เนื่องจากตรงจุดต่อ B และ C จะมีการเคลื่อนที่ ฉะนั้นโครงสร้างที่แสดงจึงมีการเซ (Sideway)



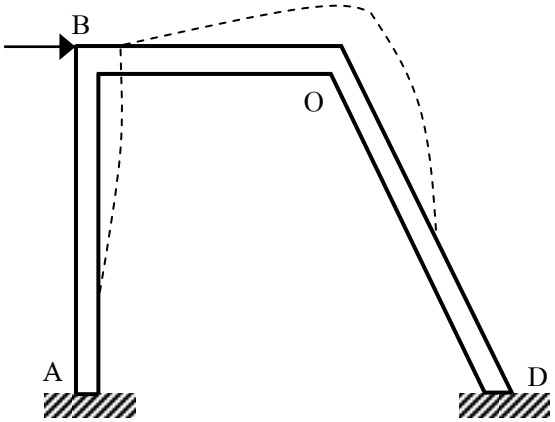
ภาพที่ 6.1 คานยื่นและคานอย่างง่าย (Cantilever and Continuous Beam)
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2528:14)



ภาพที่ 6.2 คานยื่นและคานอย่างง่าย (Cantilever and Continuous Beam)
ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2528:14)



ภาพที่ 6.3 โครงข้อแข็ง (Rigid Flame)
ที่มา : อำนวย พานิชกุล (2528:14)



ภาพที่ 6.4 โครงข้อแข็ง (Rigid Flame)
ที่มา : ที่มา : อำนวย พานิชกุล (2528:14)

ในการวิเคราะห์หาการโก่งตัวของโครงสร้างมีอยู่ด้วยกันหลายวิธี แต่วิธีที่สำคัญและนิยมใช้กันซึ่งจะกล่าวในหนังสือเล่มนี้ ได้แก่ Moment – Area , Conjugate Beam , Virtual Work Castigliano , Williot-Mohr และ Maxwell เป็นต้น

6.2 วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area method)

วิธีของพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area method) เป็นวิธีที่ใช้คำนวณการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงดัด (Flexural Displacement) ของคานและโครงข้อแข็ง (ใช้สำหรับโครงข้อหมุนไม่ได้) ได้อย่างรวดเร็ว เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ (Geometric method) และมาใช่วิธีทางพลังงาน (Energy

method) แบบวิธีของงานเสมือน และวิธีของคาสทีลยาโน เพราะภาพทรงการเสียภาพของโครงสร้าง เป็นฟังก์ชั่น (Function) โดยตรงของความเครียดในโครงสร้าง ถ้าทราบความเครียด ก็หาการเสียภาพได้โดยการรวมผลกระทบของความเครียด

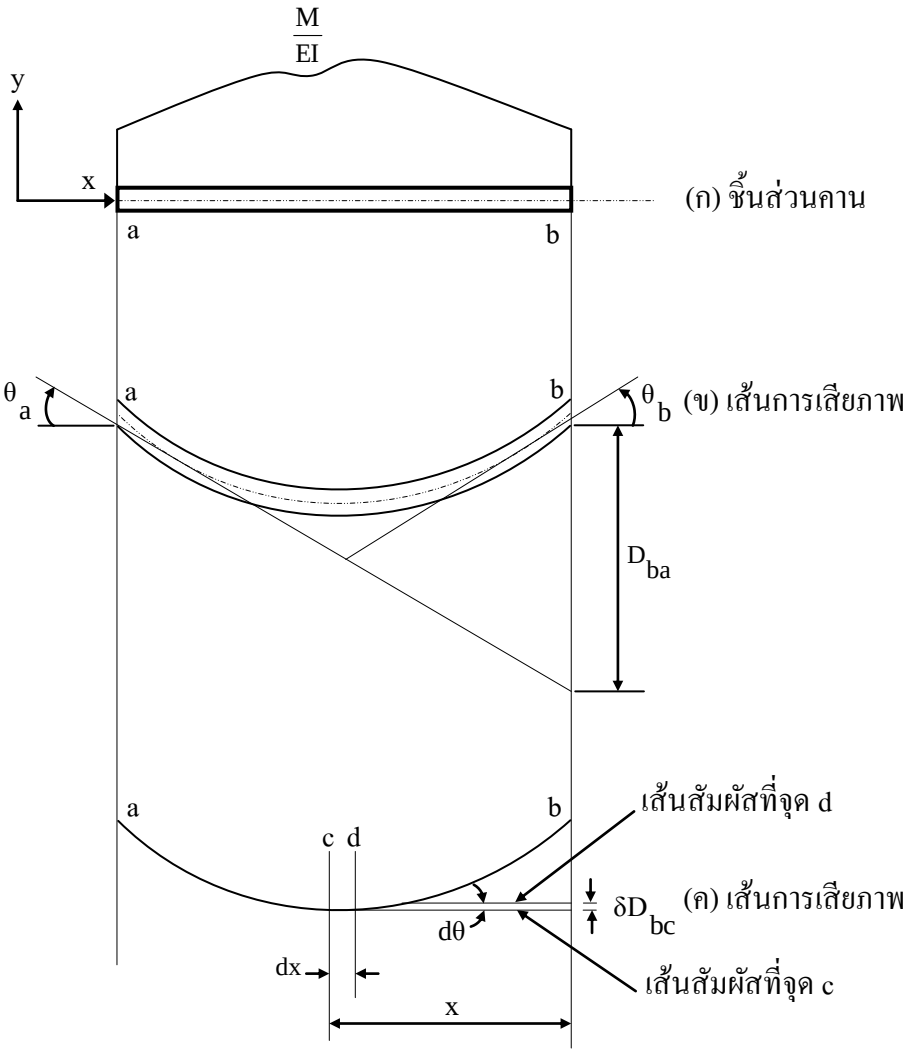
แนวความคิดเกี่ยวกับวิธีของพื้นที่โมเมนต์ได้รับการพัฒนาโดย ออทโท ไมร์ (Otto Mohr) แห่งประเทศเยอรมัน โมร์เป็นวิศวกรโครงสร้างซึ่งทำงานทางด้านการออกแบบสะพานรถไฟในตอนเริ่มอาชีพ และต่อมาได้สอนวิชาโครงสร้างและกลศาสตร์ที่ Stuttgart Polytechnikum (คศ. 1868-1873) และที่ Dresden Polytechnikum (คศ.1873-1900) สำหรับคำนิยามของวิธีนี้ได้ถูกเสนอโดย ชาร์ลส์ อี. กรีน (Charles E.Greene) แห่งมหาวิทยาลัยมิชิแกน สหรัฐอเมริกา ในปี คศ.1872

วิธีของพื้นที่โมเมนต์ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ง่ายๆ ระหว่างการหมุนและโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ ของชิ้นส่วนที่รับแรงดัด

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

โดย $d\theta$ เป็นการหมุนหรือการเปลี่ยนมุมลาด หรือการเปลี่ยนมุม (Rotation or Chang in slope or Angle Change) ของเส้นโค้งที่แสดงการเสียภาพที่เกิดขึ้นในระยะความยาว dx และ M เป็นโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ ของชิ้นส่วน E เป็นโมดูลัสของความยืดหยุ่น และ I เป็นโมเมนต์ของความเฉื่อย โดยสมการนี้เราสามารถใช้สมการง่ายๆ และการอินทิเกรดเพื่อหาค่าการเปลี่ยนมุมทั้งหมดที่เกิดขึ้นระหว่างจุดสองจุดบนชิ้นส่วนที่รับแรงดัดและหาค่าการเคลื่อนที่สัมพันธ์ระหว่างจุดทั้งสองนี้

ในการพิจารณาส่วนหนึ่งของชิ้นส่วนที่รับแรงดัด คือส่วน ab ซึ่งมีโมดูลัสของความยืดหยุ่น E และโมเมนต์ความเฉื่อย I และถูกกระทำโดยแรงดัด M ทำให้มีแผนภาพ $\frac{M}{EI}$ ซึ่งวาดไว้บนชิ้นส่วนดังภาพภาพที่ 6.5 (ก) ทั้ง M ,E และ I ต่างแปรค่าได้ตามแนวแกน x ของชิ้นส่วนแรงดัด M ทำให้เกิดการเสียภาพของส่วน ab ดังในภาพภาพที่ 6.5 (ข) สมมุติว่าการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงดัดมีขนาดเล็กและการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงเฉือนจะสำคัญสำหรับคานที่ลึกและสั้น เช่น คานที่มีอัตราส่วนความยาวต่อความลึกน้อยกว่า 5 เป็นต้น



ภาพที่ 6.5 คานช่วงเดียวธรรมดา

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:15)

เราต้องการหาสมการสำหรับการเปลี่ยนมุมลาด $\theta_b - \theta_a$ ในช่วงความยาวของส่วน ab ส่วนเล็กๆ ซึ่งยาว dx ที่ถูกกระทำโดยโมเมนต์ M ซึ่งมีค่าคงที่ในช่วงสั้นๆ นี้ จะมีการเปลี่ยนมุมทั้งหมด $d\theta = (\frac{M}{EI})dx$ ดังนั้น การเปลี่ยนมุมลาดในช่วง ab ที่ภาพภาพที่ 6.1 ดังนี้

$$\theta_{ba} = \int_{X_a}^{X_b} \frac{M}{EI} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.1$$

ค่า θ_{ba} อ่านว่ามุมลาดที่จุด b ค่าทางขวามือของสมการ เท่ากับพื้นที่ขิงแผนภาพ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด a และ b

สำหรับทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์ข้อที่ 1 อาจกล่าวได้ว่า:

การเปลี่ยนมุมลาดจากจุด a ถึงจุด b ของชิ้นส่วนที่รับแรงดัดมีค่าเท่ากับ $\theta_{ba} = \int_{X_a}^{X_a} \frac{M}{EI} dx$ ซึ่งเท่ากับพื้นที่ของแผนภาพ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด a และb ของชิ้นส่วนนั้น ระยะแอ่นตัวเนื่องจากแรงดัดสามารถคำนวณโดยวัดจากเส้นสัมผัสอ้างอิงได้ ถ้าต้องการหาระยะแอ่นของจุด b วัดจากเส้นสัมผัสที่จุด aซึ่งเรียกว่า D_{ba} ดังแสดงในภาพภาพที่ 6.1 (ข)พิจารณาส่วนของ D_{ba} ที่เกิดขึ้นเนื่องจากส่วนสั้นๆ ซึ่งมีความยาว dx ของคาน เส้นสัมผัสของคานที่จุด c และ d ดังแสดงในภาพภาพที่6.5 (ค) มีผลต่างระหว่างมุมลาดเท่ากับ $d\theta = (\frac{M}{EI})dx$ ดังนั้น ผลต่างนี้ทำให้เกิดระยะแอ่น δD_{bc} ซึ่งมีขนาด $xd\theta$ หรือ ดังนี้

$$\theta_{ba} = X\frac{M}{EI}dx$$

โดยที่ X วัดจากจุด b ถึงส่วนย่อย dx ระยะแอ่นทั้งหมดเป็นผลรวมของส่วนย่อยทั้งหมดระหว่างจุด b และ c หรือ ดังนี้

$$D_{bc} = \int_{X_c}^{X_b} \frac{M}{EI}dx$$

ทำนองเดียวกัน ระยะแอ่นของจุด b วัดจาดเส้นสัมผัสที่จุด a ดังนี้

$$D_{bc} = \int_{X_a}^{X_b} \frac{M}{EI}dx \quad \text{.....6.2}$$

โดยที่ X วัดจากจุดที่คำนวณหาระยะแอ่น คือจุด b

ทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์ข้อที่ 2 อาจกล่าวได้ว่า :

ระยะแอ่นตัวของจุด b ของชิ้นส่วนที่รับแรงดัด ซึ่งวัดจากซึ่งวัดจากเว้นสัมผัสที่จุด a เท่ากับ $\int_{X_a}^{X_b} \frac{M}{EI}dx$ ซึ่งเท่ากับโมเมนต์หนึ่งของแผนภาพ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด a และ b โดยคำนวณรอบจุด b

การเปลี่ยนมุมลาดหรือระยะแอ่นที่คำนวณโดยวิธีของพื้นที่โมเมนต์นี้ วัดจากเส้นสัมผัสที่จุดที่กำหนดขึ้นบนเส้นแสดงการเสียภาพทุกครั้ง

การกำหนดเครื่องหมายบวกของวิธีของพื้นที่โมเมนต์สำหรับคานอาจกำหนดได้ ดังนี้

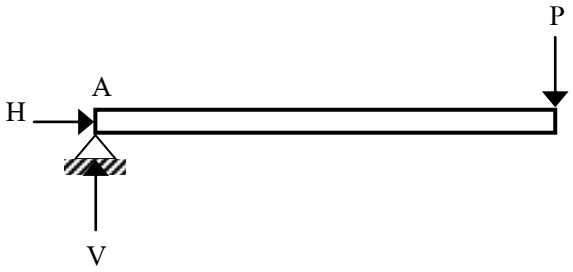
(1) แกน x มีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวา และแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้น

(2) โมเมนต์ M มีค่าบวกเมื่อพยายามทำให้คานแอ่นลง

(3) EI มีค่าบวกเสมอ และแขนของโมเมนต์ x ซึ่งวัดจากจุดใดๆ ก็ได้ค่าบวกเสมอ

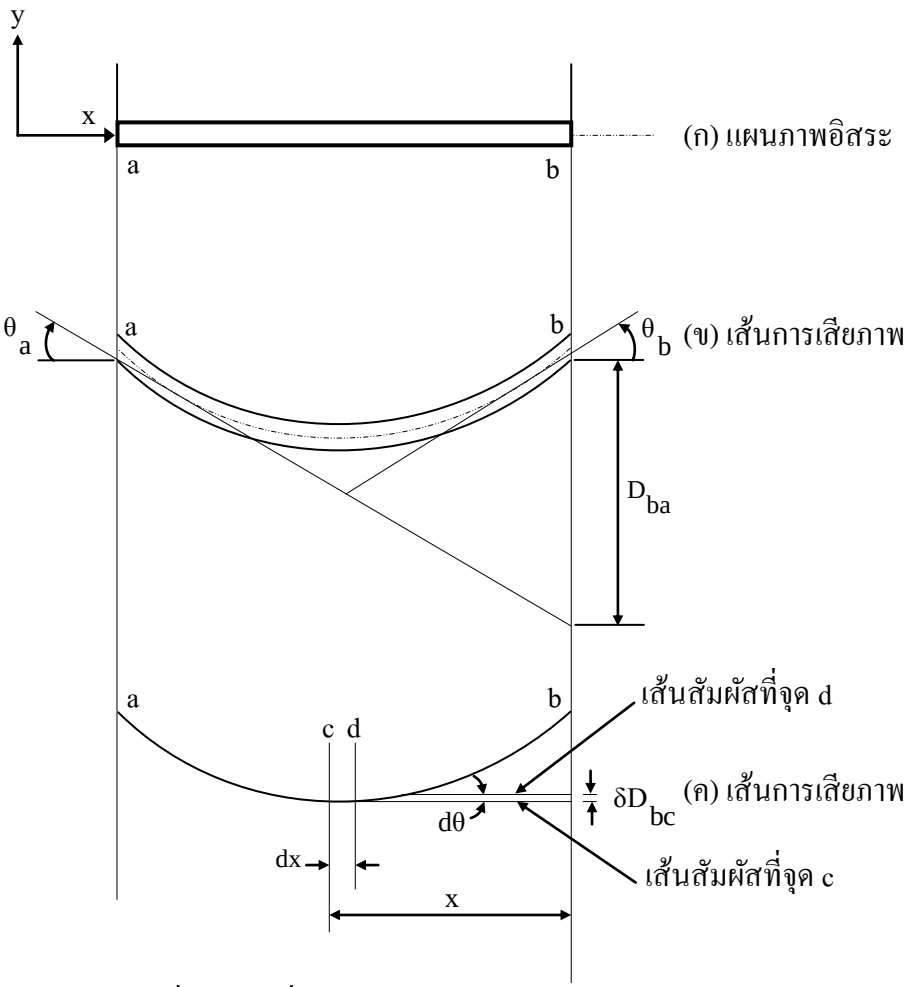
(4) พื้นที่ $\frac{M}{EI}$ ของโมเมนต์บวก มีค่าบวก และแสดงว่ามุมลาดที่เกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของเส้นสัมผัสทางขวามือจะหมุนทวนเข็มนาฬิกา

(5) ถ้าระยะแอ่นของจุดใดๆ ที่วัดจากเส้นสัมผัสมีค่าบวก แสดงว่าจุดนั้นอยู่เหนือเส้นสัมผัส



ภาพที่ 6.6 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546:59)



ภาพที่ 6.7 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546:59)

ภาพ 6.6และภาพ 6.7 (ก) และ (ค) แสดงทิศทางของค่าต่างๆ ที่มีค่าบวก

ถ้า A_{ab} เป็นพื้นที่ภาพ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด a และ b ของคาน และ $\bar{x}_a$ เป็นระยะคานแนวราบจากจุด a ถึงจุดศูนย์ถ่วงของแผนภาพ $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด a และ b สมการที่ 6.3 และ 6.4 สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$$\theta_{ba} = \theta_{ba} - \theta_a = A_{ab} \quad \text{.....6.3}$$

$$D_{ba} = A_{ab}\,\bar{x}_a \quad \text{.....6.4}$$

สมการใหม่ทั้งสองนี้มักใช้คำนวณหาค่าการเสียรูปของคาน โดยอาศัยคุณสมบัติของภาพต่างๆ ดังแสดงในตารางเข้าช่วย เพื่อให้ง่ายและสะดวกรวดเร็วยิ่งขึ้นและมีโอกาสผิดพลาดน้อยลง

การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้างโดยวิธีของพื้นที่ของโมเมนต์วิธีนี้ใช้การเขียนภาพของเส้นโค้งอิลาสติคเข้าประกอบในการคำนวณ เพื่อหามุมลาดเอียงและระยะโก่งตัว ทฤษฎีที่ใช้คำนวณมีอยู่ 2 ทฤษฎี ทฤษฎีที่หนึ่งจะใช้สำหรับเพื่อหาการเปลี่ยนของมุมลาดเอียง (The Change of Slope) ทฤษฎีที่สองจะใช้เพื่อหาระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัส (The Tangent Deviation) เป็นต้น

6.2.1 ทฤษฎีของพื้นที่โมเมนต์ (Moment-Area)

ทฤษฎีที่1 มุมระหว่างเส้นสัมผัสจากจุดสองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติคหรือการเปลี่ยนของมุม จากจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติคไปยังอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติคนี้จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองนั้น

$$\theta = \frac{M}{EI}dx$$

ทฤษฎีที่2 ระยะเคลื่อนที่ T_{AB} ของจุด B บนเส้นโค้งอีลาสติคซึ่งวัดตั้งฉากกับแนวเดิมของส่วนโครงสร้าง กับเส้นสัมผัสซึ่งลากสัมผัสจากจุด A บนเส้นโค้งอีลาสติคเดียวกันจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์รอบจุด B ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองนั้น

$$t_{BA} = \frac{M}{EI}dx$$

E = คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัตถุ (Modulus of Elasticity)

I = คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ (Moment of Inertia)

EI = หมายถึงความแข็งแกร่งต่อแรงดัดของโครงสร้าง (Flexural Rigidity)

6.2.2 พิสูจน์

พิจารณาภาพที่ 6.6 ให้ AB เป็นส่วนหนึ่งของเส้นโค้งอีลาสติคภายใต้การกระทำของโมเมนต์ดัด M MB จะโก่งตามภาพ (ข) สมมุติจุด1 จุด 2 เป็นจุดสองจุดอยู่บนเส้นโค้งอีลาสติด AB

ห่างกันเป็นระยะ dxและให้dθ เป็นมุมในระหว่างเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสกับจุด1และ2 ตามภาพ (ค) เนื่องจากจุด 1 และจุด 2 ห่างกันน้อยมาก ดังนั้นเส้นโค้ง 1-2 ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O อาจถือว่ามีระยะเท่ากับ dx ถ้าลากเส้นผ่านจุด 2 และให้ขนานกับเส้น O-1 ตามภาพ (ค) จะเห็นว่า

$$d\theta = \left(\frac{d1}{c_2}\right) dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.5$$

แต่จากกฎของฮุค $dI = \frac{Mc_2}{EI} dx$ แทนค่า DI ลงในสมการ (6.6) จะได้

$$d\theta = \left(\frac{Mc_2 / EI}{c_2}\right) dx \quad , \quad dx = \left(\frac{M}{EI}\right) dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6.6$$

ดังนั้น การเปลี่ยนของมุมจากจุด A ถึงจุด B

$$\theta_{AB} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

ซึ่งเป็นข้อพิสูจน์ของทฤษฎีที่ 1ในภาพ (ข) ถ้าลากเส้นสัมผัสกับจุด 1 และ 2 แล้วต่อออกมาตัดกับ A_TB (ซึ่ง A_TB นี้เป็นระยะตั้งฉากกับแนวเดิมของส่วนโครงสร้างจากจุด B บนเส้นโค้งลาสติคกับเส้นสัมผัสซึ่งลากเส้นสัมผัสมาจากจุด A เขียนแทนได้ด้วย T_{BA}) เป็นระยะ dΔ จะเห็นว่า

$$d\Delta = x.\, d\theta$$

แทนค่า dθ จากสมการ (2.1.2) จะได้

$$d\Delta = x.\left(\frac{M}{EI}\, dx\right)$$

แต่ $T_{BA} = A_TB = \int_A^B d\Delta$

ดังนั้น $t_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx$

ซึ่งเป็นข้อพิสูจน์ของทฤษฎีที่ 2

6.2.3 ลำดับขั้นตอนของการคำนวณ

6.2.3.1 จากโจทย์ที่กำหนดให้ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาต่างๆ และเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ดัด

6.2.3.2 เขียนส้นโค้งอีลาสติค แสดงลักษณะการโก่งของคานให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริง

6.2.3.3 เขียนไดอะแกรมของ $\frac{M}{EI}$ ซึ่งทำได้โดยการหาค่าออร์ดิเนทของไดอะแกรมของโมเมนต์ดัดด้วยค่าความแข็งแรงต่อโมเมนต์ดัด EI ในกรณีที่คานมีค่า EI คงที่ตลอดความยาว ภาพของไดอะแกรมของ $\frac{M}{EI}$ จะคล้ายกับไดอะแกรมของโมเมนต์ดัด

6.2.3.4 เลือกจุดบนเส้นโค้งอีลาสติคแล้วลากเส้นสัมผัสกับจุดนั้นจุดที่ว่านี้อาจจะเป็นจุดที่ทราบค่าของความลาดเอียงแน่นนอน (เป็นต้นว่า ที่จุดรองรับแบบยึดแน่นซึ่งค่าของความลาดเอียงเป็นศูนย์) หรืออาจจะเลือกขึ้นมา (เป็นต้นว่า จุดที่อยู่แกนสมมาตรของภาพ)

6.2.3.5 คำนวณหาการเคลื่อนที่ของจุดเทียบจากเส้นสัมผัสในข้อ 4

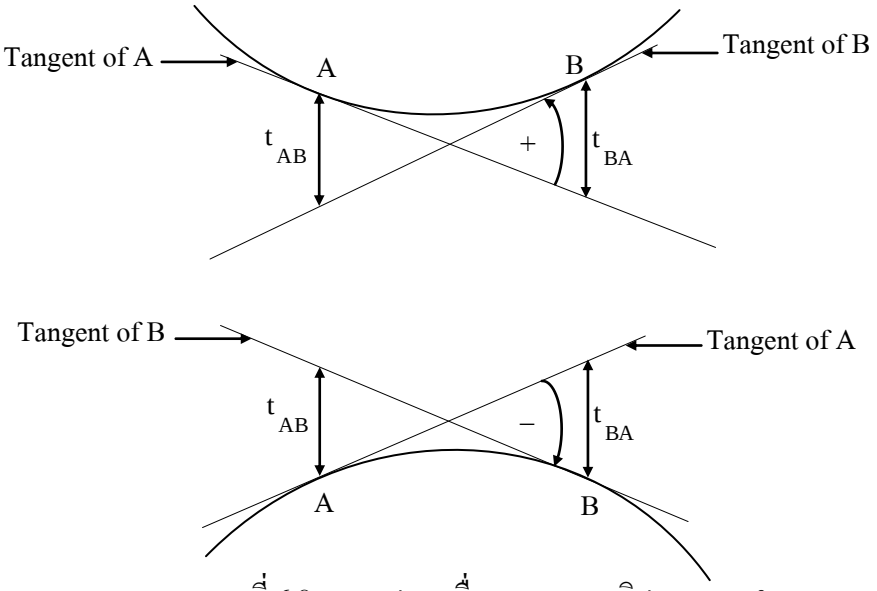
6.2.3.6 จากเส้นโค้งอีลาสติค คำนวณหามุมหรือความลาดเอียงและระยะโก่งของคานเมื่อรับน้ำหนัก

6.2.4 การกำหนดเครื่องหมายของพื้นที่โมเมนต์

6.2.4.1 โมเมนต์ไดอะแกรมจะเขียนอยู่บนด้านที่รับแรงอัด และมีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่เหนือแนวแกนสะเทิน

6.2.4.2 ระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดใดๆ กับจุดที่กำลังพิจารณา (Tangent Deviation) จะมีค่าเป็นบวก ถ้าจุดดังกล่าวอยู่เหนือเส้นสัมผัส และจะมีค่าเป็นลบถ้าจุดนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัส ดังภาพที่ 2.3 อนึ่ง สังเกตว่าค่าของ t_{BA} ไม่จำเป็นต้องเท่ากับค่าของ t_{BA}

6.2.4.3 การเปลี่ยนของมุม θ_{AB} จะมีค่าเป็นบวก ถ้ามุมนั้นวัดจากเส้นสัมผัสกับจุด A ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา มายังเส้นสัมผัสกับจุด B ดังภาพที่ 2.3 สังเกตว่าค่าของ θ_{AB} เท่ากับค่าของ θ_{BA} เสมอ



ภาพที่ 6.8 ภาพแสดงเครื่องหมายและทิศทางของ θ_{BA} และ t_{BA}

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546:21)

6.2.5 ข้อสังเกตจากวิธีพื้นที่โมเมนต์

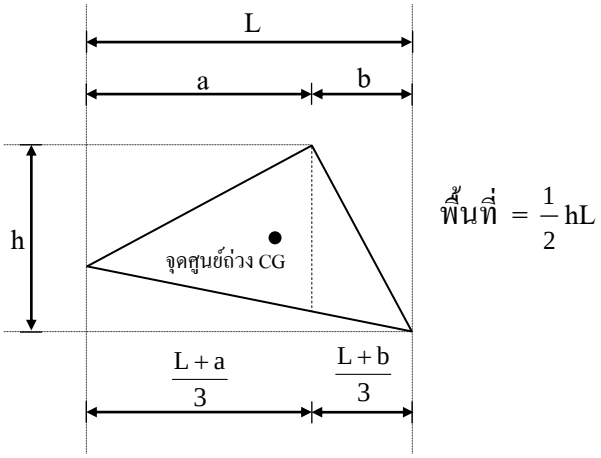
6.2.5.1 เมื่อต้องการหาการเปลี่ยนของมุมระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติค ก็ให้หาพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองนั้น ค่าความลาดเอียงหรือมุมที่จุดใดจะหาได้จากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของภาพเส้นโค้งอีลาสติค

6.2.5.2 เมื่อต้องการหาระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดๆ หนึ่ง กับจุดที่กำลังพิจารณา ซึ่งอยู่บนเส้นโค้งอีลาสติคเดียวกัน ให้หาโมเมนต์ของพื้นที่ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองรอบจุดที่พิจารณา

6.2.5.3 ทฤษฎีที่สองนี้ให้ค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Relative Displacement) ซึ่งในบางครั้งค่านี้อาจเป็นระยะโก่งที่แท้จริงก็ได้

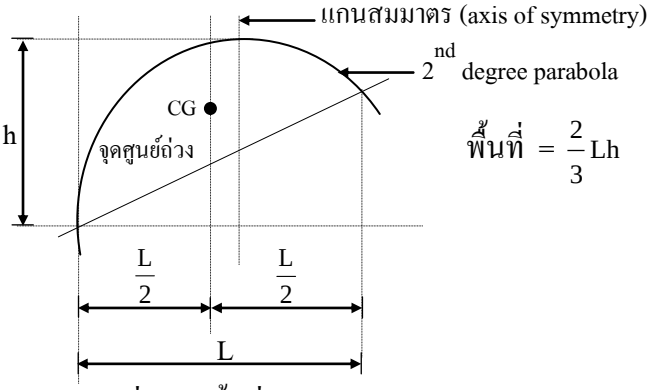
6.2.6 คุณสมบัติของภาพทรงเลขาคณิต

สำหรับภาพทรงเลขาคณิตที่จะใช้หาพื้นที่และแกนสมมาตรของพื้นที่โมเมนต์ ดังนี้



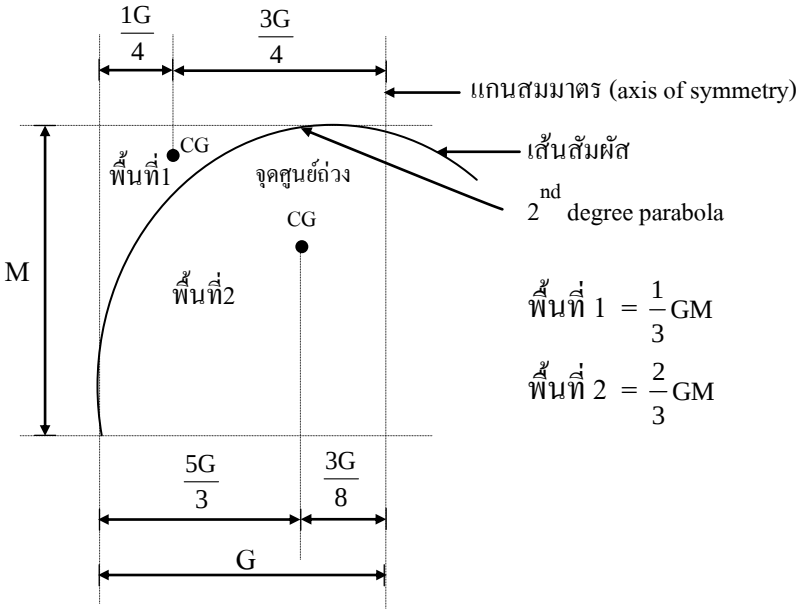
ภาพที่ 6.9 พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2552)



ภาพที่ 6.10 พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต

ที่มา : ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2552)

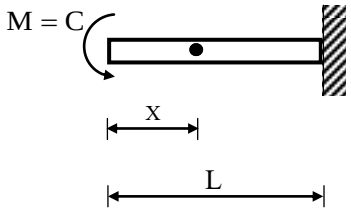


ภาพที่ 6.11 พื้นที่และตำแหน่งจุดศูนย์ถ่วงของรูปทรงเลขาคณิต

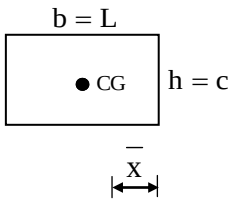
ที่มา : ที่มา : สุรศักดิ์ รายี (2552)

สำหรับภาพทรงเลขาคณิตที่จะใช้หาโมเมนต์ความเฉื่อยสามารถหาสูตรของโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ภาพต่าง ๆ โดยพิจารณาจากแกนที่ผ่านจุดศูนย์ถ่วงได้ ดังแสดงในภาพต่างๆ ดังนี้

คานยื่นโมเมนต์และน้ำหนักกระทำที่คาน (Cantilever Beam)

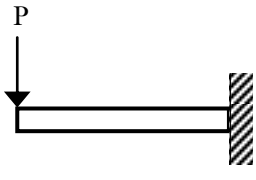


$M = -C$

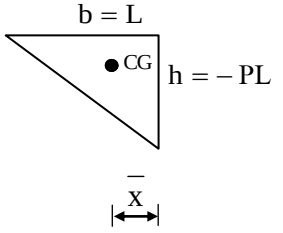


$A = \frac{1}{2}bh$ (ก)

$\bar{x} = \frac{b}{2}$

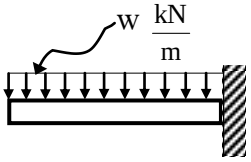


$M = -Px$

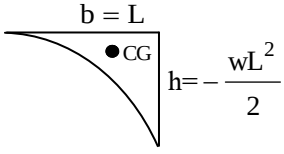


$A = \frac{1}{2}bh$ (ข)

$\bar{x} = \frac{b}{3}$

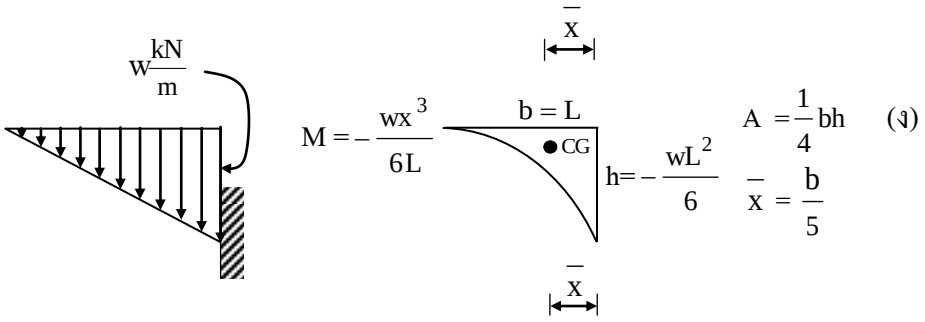


$M = -\frac{wx^2}{2}$



$A = \frac{1}{3}bh$ (ค)

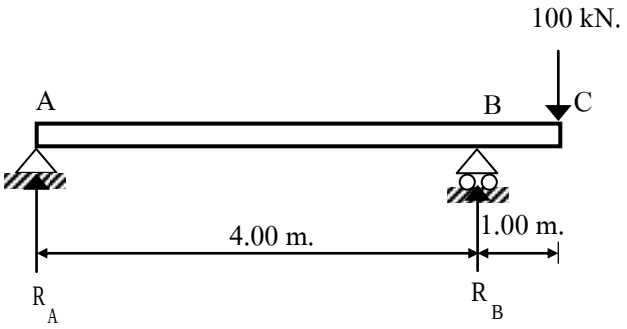
$\bar{x} = \frac{b}{2}$



ภาพที่ 6.12 คานจริงและคานเสมือน

ที่มา : ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:218)

ตัวอย่างที่ 6.1 จงคำนวณหามุมลาดเอียง θ_A และ θ_B ของคาน ABC ที่ถูกกระทำด้วยแรง 100 kN. ดังแสดงในภาพที่ 6.13



ภาพที่ 6.13 คานธรรมดาและคานยื่น

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2549:40)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะการโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.14

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 + 100 \times 1.00 = 0$$

$$R_A \times 4.00 + 100 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = -100$$

$$R_A = -\frac{100}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = -25 \text{ kN.} \quad (\downarrow^-)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 100 \times 500 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 500 = 0$$

$$500 = R_B \times 4.00$$

$$\frac{500}{4.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 125 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 100 = 0$$

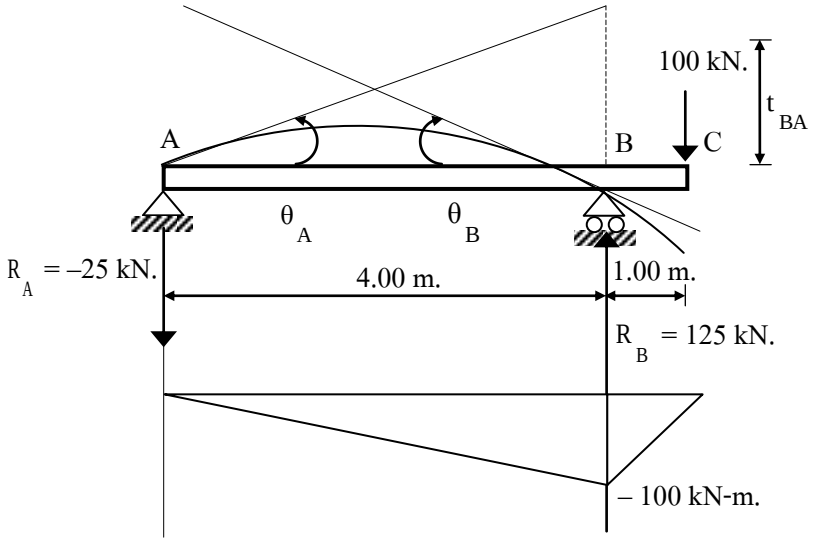
ดังนั้น R_A เท่ากับ –25 N.

$$-25 + R_B - 100 = 0$$

$$-125 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 125 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

กำหนดแนวการโก่งตัวของโครงสร้างใช้ทฤษฎีที่ 2 ของพื้นที่โมเมนต์ คำนวณ t_{BA} และ t_{AB}



ภาพที่ 6.14 คานธรรมดาและคานยื่น

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2549:40)

t_{BA} = โมเมนต์รอบจุด B ของพื้นที่ $\frac{M}{EI}$ ที่อยู่ระหว่าง A และจุด B

ไดอะแกรมโมเมนต์ดัดมีเครื่องหมายเป็นลบตามระบบเครื่องหมายในภาพที่ 6.14

$$t_{BA} = -(\frac{1}{2}\times 4.00\times\frac{100}{EI}\times(\frac{1}{3}\times 4.00) = -\frac{800}{3EI}$$

เครื่องหมายของ t_{BA} เป็นลบ เพราะว่าเส้นสัมผัสอยู่เหนือจุด B ตามระบบเครื่องหมาย

เนื่องจากมุม θ_A และ θ_B เป็นมุมเล็กมาก จึงคำนวณมุมทั้งสองได้ ดังนี้

$$\therefore \theta_A = \frac{t_{BA}}{4.00} = \frac{66.67}{4EI} \text{ (-)}$$

$$\therefore \theta_B = \frac{t_{AB}}{4.00}$$

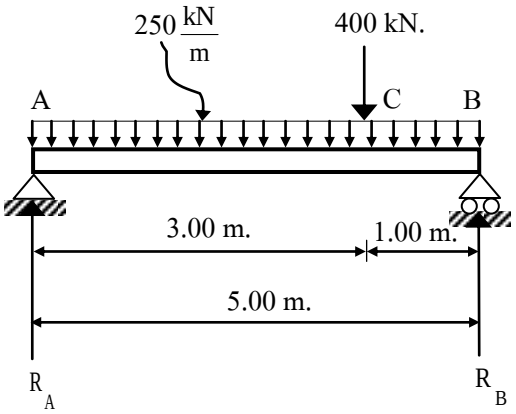
t_{AB} = โมเมนต์รอบจุด A ของพื้นที่ $\frac{M}{EI}$ ที่อยู่ระหว่าง A และจุด B

$$t_{AB} = -(\frac{1}{2}\times 4.00\times\frac{100}{EI}\times(\frac{2}{3}\times 4.00) = -\frac{1,600}{3EI}$$

$$\therefore \theta_A = \frac{t_{AB}}{4.00} = \frac{133.33}{EI} \text{ (+)}$$

ดังนั้น มุมลาดเอียง $\theta_A = -\frac{66.67}{4EI}$ และ $\theta_B = +\frac{133.33}{EI}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.2 จงคำนวณระยะการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างที่จุด C บนคาน AB โดยมีน้ำหนักกระทำดังแสดงในภาพที่ 6.15



ภาพที่ 6.15 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:210)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C บนคาน AB เนื่องจากแรงกระทำ ดังภาพภาพที่ 6.15

วิธีทำ

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$

$$R_A \times 4.00 - 400 \times 1.00 - 250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$R_A \times 4.00 - 400 - 2{,}000 = 0$$

$$R_A \times 4.00 - 2{,}400 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = 2{,}400$$

$$R_A = \frac{2{,}400}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 600 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 400 \times 3.00 + 250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-R_B \times 8.50 + 1{,}200 + 2{,}000 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 3{,}200 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 = -3{,}200$$

$$R_B = \frac{3{,}200}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 800 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

$$R_A + R_B - 400 - 250 \times 4.00 = 0$$

ดังนั้น R_A เท่ากับ 1,000 kN.

$$800 + R_A - 400 - 250 \times 4.00 = 0$$

$$R_A - 600 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = 600 \text{ kN. } (\uparrow^+)$$

สำหรับคาน AB ถูกกระทำด้วยชุดของแรง 2 ชุด ถ้าเขียนไดอะแกรมโมเมนต์ดัดหนึ่งภาพจะทำให้การคำนวณพื้นที่และจุดศูนย์ถ่วงของไดอะแกรมโมเมนต์ดัดนั้นกระทำได้ยาก จึงควรแยก

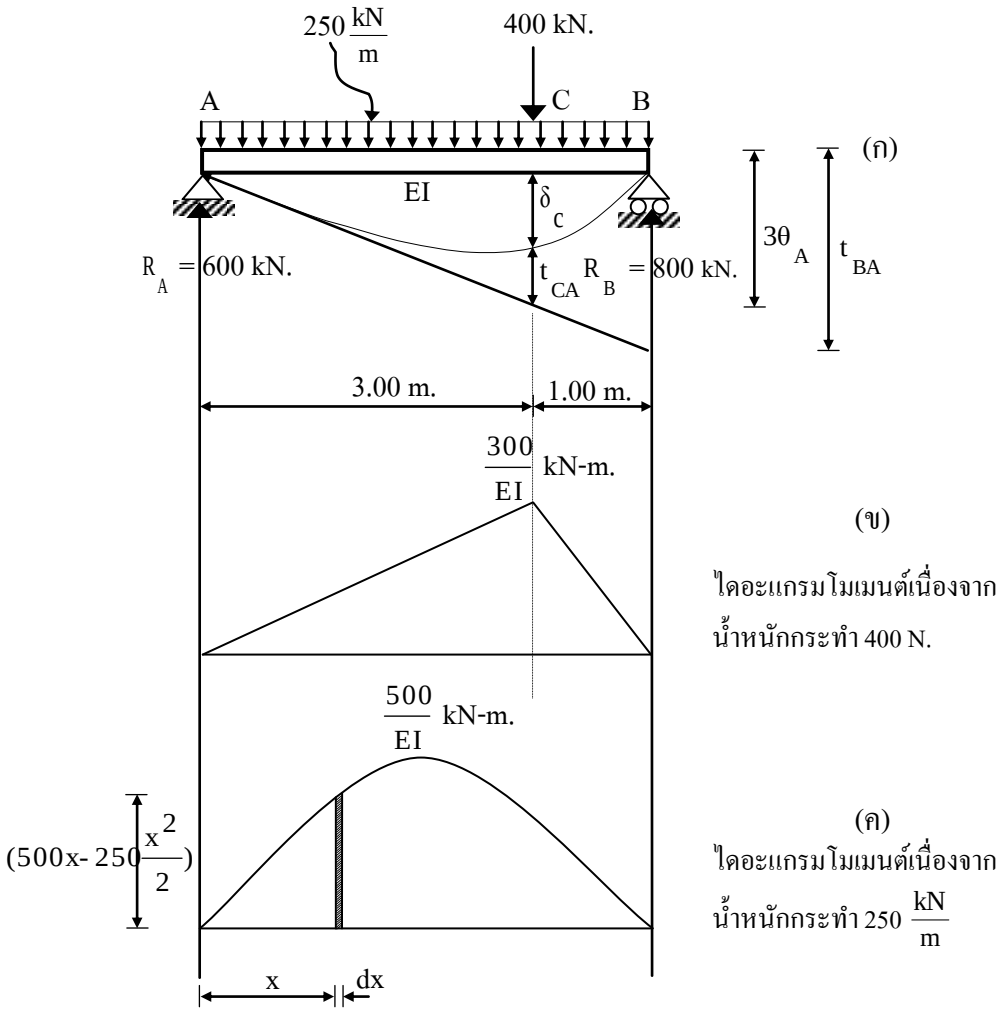
เขียนไดอะแกรมโมเมนต์ดัดออกเป็น 2 ชุด คือ ภาพหนึ่งเกิดจากการกระทำของน้ำหนัก 400 kN. และอีกภาพหนึ่งเกิดจากการกระทำของน้ำหนัก 250 $\frac{kN}{m}$ เขียนแนวการโก่งตัวและคำนวณ δ_c

ในขณะเดียวกันจะต้องมีความเข้าใจการเขียนเส้นโค้งอิลาสติค เส้นสัมผัสเป็นอย่างดีเสียก่อน ต่อจากนั้นหาการเปลี่ยนของมุมระหว่างจุดสองจุดบนเส้นโค้งอิลาสติค ก็ให้หาพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองนั้นด้วย ค่าของความลาดเอียงหรือมุมที่จุดใดจะหาได้จากความสัมพันธ์ทางเลขาคณิตของรูปเส้นโค้งอิลาสติค (Elastic Curve) ด้วย

ขั้นตอนต่อไปหาระยะเคลื่อนที่ระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดหนึ่งๆ กับจุดที่กำลังพิจารณา ซึ่งอยู่บนเส้นโค้งอิลาสติค ให้หาโมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองรอบจุดที่กำลังพิจารณา (ซึ่งขั้นตอนนี้จะต้องเริ่มต้นตั้งแต่หาแรงปฏิกิริยา หาแผนภาพของแรงเฉือนและแผนภาพของโมเมนต์เสียก่อนถึงจะสามารถหาพื้นที่ของโมเมนต์ได้)

สำหรับการหาค่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Relation Displacement) จากทฤษฎีที่ 2 ของพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) สำหรับค่านี้อาจจะเป็นค่าการโก่งตัวของคานที่เป็นจริงก็เป็นไปได้เช่นกัน และที่สำคัญจะต้องนำคุณสมบัติของรูปทรงทางเรขาคณิตมาช่วยหาพื้นที่ด้วย จะทำให้มีความถูกต้องมากยิ่งขึ้น

ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งสำหรับโมเมนต์ไดอะแกรมจะเขียนอยู่บนด้านที่รับแรงอัด และมีค่าเป็นบวกเมื่ออยู่เหนือแนวแกนสะเทิน และระยะเคลื่อนที่สัมผัสระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากมาจากจุดใดๆ กับจุดที่กำลังพิจารณาจะมีค่าเป็นบวก ถ้าจุดดังกล่าวอยู่เหนือเส้นสัมผัสและจะมีค่าเป็นลบถ้าจุดนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัส เป็นต้น



ภาพที่ 6.16 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:210-212)

$$\delta_C = 3\theta_A - t_{CA}$$

$$\theta_A = \frac{t_{BA}}{4.00}$$

$$\therefore \delta_C = \frac{3.00}{4.00} t_{BA} - t_{CA}$$

$$t_{BA} = \left\{\left(\frac{1}{2}\times 3.00\times \frac{300}{EI}\right)\left(1.00+\frac{1}{3}\times 3.00\right)+\left(\frac{1}{2}\times 1.00\times \frac{300}{EI}\right)\left(\frac{2}{3}\times 1.00\right)\right\} + \left\{\left(\frac{2}{3}\times 4.00\times \frac{500}{EI}\right)(2.00)\right\}$$

$$= \frac{3,666.67}{EI}$$

$$t_{CA} = \left\{\left(\frac{1}{2}\times 3.00\times\frac{300}{EI}\right)\left(\frac{1}{3}\times 3.00\right)+\int_0^3\left(500x-250\frac{x^2}{2}\right)dx\right\}(3.00-x)$$

$$= \frac{450}{EI}+\int_0^3(500x-125x^2)(3.00-x)dx$$

$$= \frac{1,856.25}{EI}$$

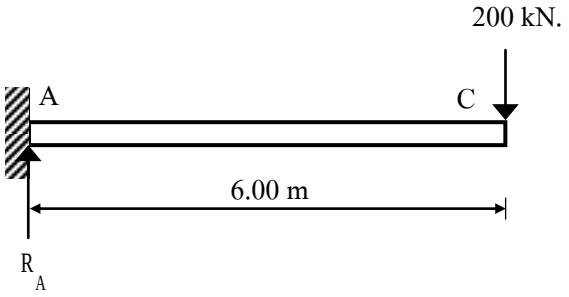
ดังนั้น $\delta_C = \frac{3}{4}\left(\frac{3,666.67}{EI}-\frac{1,856.25}{EI}\right)$

ระยะโก่งตัวที่จุด C; $\delta_C = \frac{837.75}{EI}\downarrow_-$

ดังนั้น ระยะโก่งตัวที่จุด C; $\delta_C = \frac{837.75}{EI}\downarrow_-$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.3 จงคำนวณหาความลาดชันหรือมุมลาดที่จุด B , C กำหนดให้ $E=2\times10^3\ \frac{kN}{cm^2}$

$I=600\ mm^4$ ของคานยื่น AB ดังแสดงในภาพที่ 6.17



ภาพที่ 6.17 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:283)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C และความลาดชันที่จุด B , C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.17

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$$R_A - 200 = 0$$

$$\therefore\ R_A = +200\ kN.\ (\uparrow^+)$$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0\ \uparrow^+\downarrow_-$

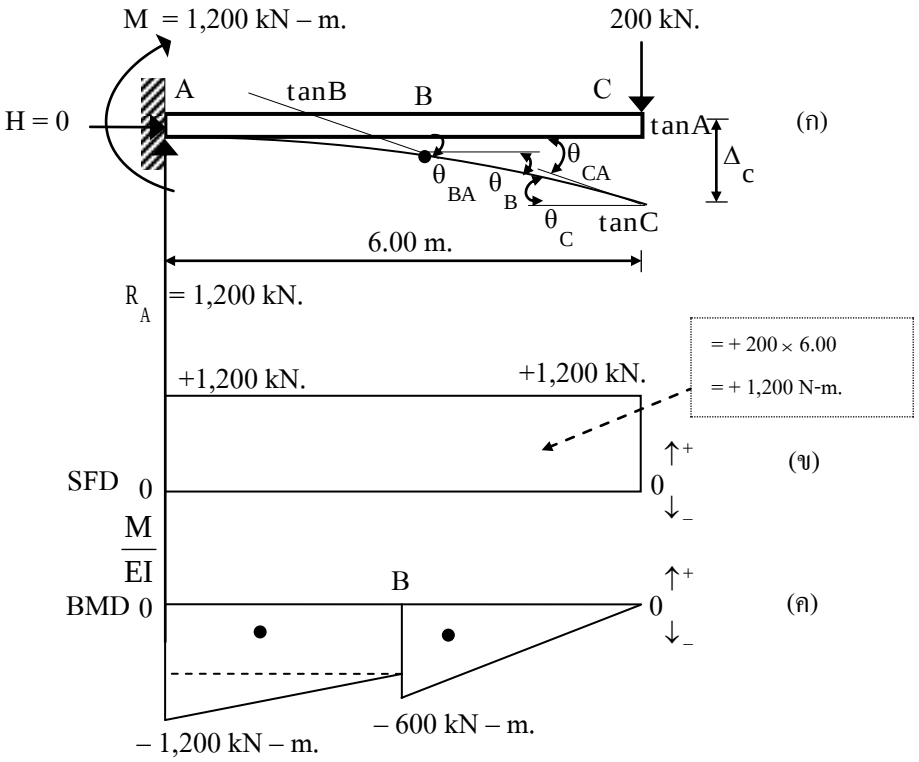
จุด A $SF_{AL} = 0 \qquad = 0$

	SFA_R	= + 200	= + 200	kN.
จุด B	SFB_L	= – 200	= – 200	kN.
	SFB_R	= – 200 + 200	= 0	

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A

การหาโมเมนต์ $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

จุด A	BMA	= – 200 × 6.00	= – 1,200	kN-m.
จุด B	BMB	= – 200 × 0	= 0	



ภาพที่ 6.18 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:283)

เขียนผัง $\frac{M}{EI}$ ($\frac{M}{EI}$ Diagram) ผังดังกล่าวแสดงในภาพภาพ 6.18 (ข) ซึ่งจะช่วยให้ง่ายขึ้นในการแก้ปัญหาในข้อมูล EI และจะแทนค่าตัวเลขในขั้นตอนสุดท้าย

ภาพเส้นโค้งแสดงพฤติกรรมแบบยืดหยุ่น (Elastic Curve) แรงกระทำ 200 kN. ทำให้คานเกิดระยะการเสียภาพหรือระยะทรุดตัวดังแสดงในภาพภาพที่ 10.18 (ค) (คานเกิดการทรุดตัวแบบเว้าลง เนื่องจาก $\frac{M}{EI}$ มีค่าเป็นลบ) พบว่าแนวเส้นสัมผัสที่จุด A อยู่ในแนวราบ แนวเส้นสัมผัสที่จุด B

และ C แสดงไว้ในภาพภาพ เมื่อต้องการทราบค่าของ θ_B และ θ_C การเขียนกราฟพบว่ามุมระหว่าง tanAและ tanBนั้นก็คือ θ_{BA} มีค่าเท่ากับ θ_B

$$\theta_B = \theta_{BA}$$

$$\theta_C = \theta_{CA}$$

ทฤษฎีพื้นที่ของโมเมนต์ (Moment Area Theorem) ประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่ 1 θ_{BA} มีค่าเท่ากับพื้นที่ภายใต้ผัง $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด A และ B รายละเอียด ดังนี้

การคำนวณหาค่า $\frac{M}{EI}$ ที่จุด A ดังภาพภาพที่ 6.24

$$\theta_B = \theta_{BA} = -600\times 3.00 - \frac{1}{2}(1{,}200-600)\times 3.00 = -\frac{2{,}700}{EI}\downarrow$$

แทนค่าตัวเลขของ E และ I จะได้ว่า

$$\theta_B = \frac{-2{,}700}{(2\times 10^3)\times(600)} = -0.00225 \text{ rad}$$

$$\theta_B = -0.13 \text{ องศา}$$

ส่วนเครื่องหมายของคำตอบมีค่าเป็นลบเป็นการบ่งบอกว่าความลาดชันที่จุด B หมุนตามเข็มนาฬิกาวัดความลาดชันที่จุด A ดังแสดงในภาพภาพที่ภาพภาพที่ 6.18 (ค)

ในขณะเดียวกันพื้นที่ภายใต้ผัง $\frac{M}{EI}$ ระหว่างจุด A และ C เท่ากับ θ_{CA}

$$\theta_C = \theta_{CA} = -\frac{1}{2}\times 1{,}200\times 3.00 = -\frac{1{,}800}{EI}\downarrow$$

แทนค่าเชิงตัวเลขของ EI จะได้ว่า

$$\theta_C = \frac{-1{,}800}{(2\times 10^3)\times(600)} = -0.0015 \text{ rad}$$

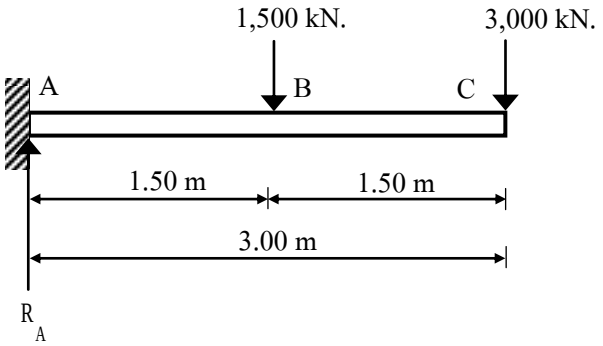
$$\theta_C = -0.09 \text{ องศา}$$

สำหรับในการเปลี่ยนมุมเรเดียนให้เป็นองศาจะทำให้ผู้ที่ฝึกทำโจทย์ใหม่ๆ เข้าใจในการเปลี่ยนมุมและสามารถนำไปใช้งานได้อย่างถูกต้องสามารถทำโจทย์ในข้ออื่นๆ ได้และมีความแม่นยำถูกต้องมากยิ่งขึ้น

ดังนั้น ความลาดชันหรือมุมลาดที่จุด B เท่ากับ – 0.13 องศา **ตอบ**

และความลาดชันหรือมุมลาดที่จุด C เท่ากับ – 0.09 องศา

ตัวอย่างที่ 6.4 จงคำนวณหาค่าของมุมลาดและระยะการโก่งตัวสูงสุดตรงกลางคานที่สัมผัสกับกับเส้นโค้งยืดหยุ่นที่ปลายยื่นอิสระของคาน กำหนดให้ $E=19.6\times10^{6}\ \frac{kN}{cm^2}$ และ $I=8.324\times10^{6}\ mm^4$ ดังแสดงในภาพที่ 6.19



ภาพที่ 6.19 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C และความลาดชันที่จุด B , C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.19

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$R_A - 3{,}000 - 1{,}500 = 0$

$\therefore \quad R_A = +4{,}500\ kN.\ (\uparrow^{+})$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0\ \uparrow^{+}\downarrow_{-}$

จุด A $SFA_L = 0 = 0$

$SFA_R = -3{,}000 - 1{,}500 = -4{,}500$ kN.

จุด B $SFB_L = -3{,}000 - 1500 = -4{,}500$ kN.

$SFB_R = -3{,}000 = -3{,}000$ kN.

จุด C $SFB_L = -3{,}000 = -3{,}000$ kN.

$SFB_R = -0 = 0$

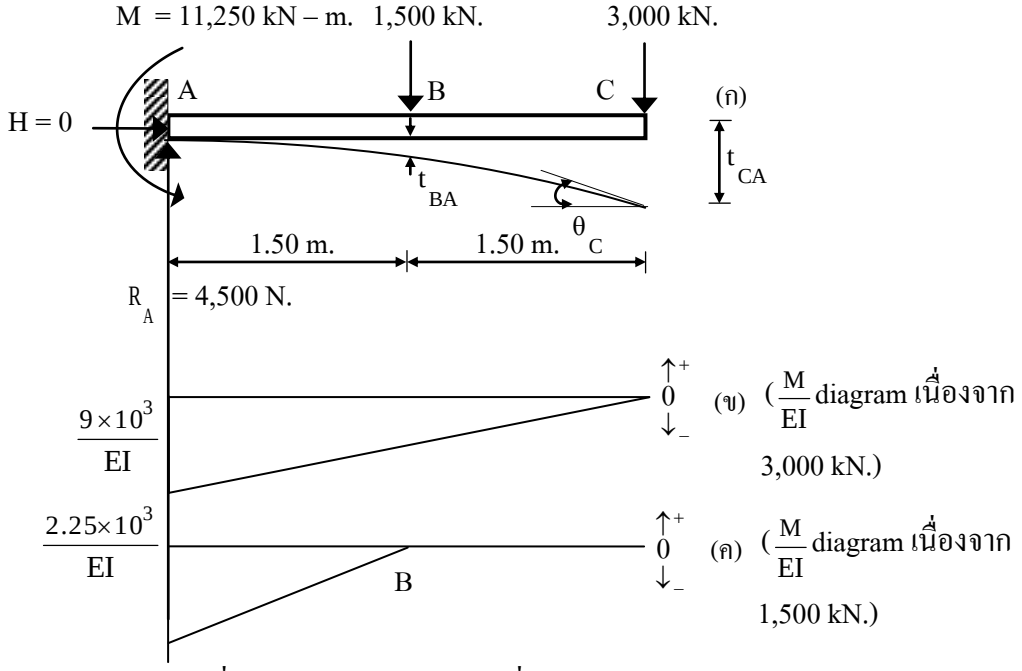
ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A

การหาโมเมนต์ $\Sigma M_A = 0\ {}^{+}\circlearrowleft^{-}$

จุด A $BMA = -3{,}000\times3.00 - 1{,}500\times1.50 = -11{,}250$ kN-m.

จุด B $BMB = -3\times1.5 = -4{,}500$ k N-m

จุด C $BMC = 0 = 0$



ภาพที่ 6.20 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

เลือกจุด A เป็นจุดสัมผัสอ้างอิง

การโก่งตัวสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ปลายคานอิสระ (จุด A)

$$t_{CA} = y_{max} = \text{โมเมนต์ของพื้นที่ของ } \frac{M}{EI} \text{ diagram ระหว่าง A ถึง C โดยรอบจุด A}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\times 3.00\times\frac{9\times10^3}{EI}\times\left(\frac{2}{3}\times 3.00\right)\right\}+\right.$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\times 1.50\right)\left(-\frac{2.25\times10^3}{EI}\right)\times\left(1.50+\frac{2}{3}\times 1.50\right)\right\}$$

$$= -\frac{31.219\times10^3}{(196\times10^9)(8.324\times10^{-5})}$$

$$= -1.913\times10^{-3} \text{ m.}$$

ดังนั้น $y_C = y_{max} = -0.191$ cm.

เมื่อการโก่งตัวสูงสุดที่กลางคาน (จุด B)

$\therefore$ มุมความลาดของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งยืดหยุ่นที่จุด C จะมีค่าเป็นศูนย์

$$t_{CB} = y_B = \text{โมเมนต์ของพื้นที่ของ } \frac{M}{EI} \text{ diagram ระหว่าง B ถึง C โดยรอบจุด B}$$

$$= \left\{\left(\frac{1.5}{2}\times 1.50\times\left(-\frac{4.5\times10^3}{EI}\right)+\right.\right.\left\{\left(\frac{1.}{2}\times 1.50\times\left(-\frac{4.5\times10^3}{EI}\right)\left(\frac{2}{3}\times 1.50\right)\right\}\right.$$

$$+\left\{\left(\frac{1.}{2}\times 1.50\times\left(-\frac{2.25\times 10^3}{EI}\right)\left(\frac{2}{3}\times 1.50\right)\right\}\right.$$

$$= -\frac{10.125\times 10^3}{(196\times 10^9)(8.324\times 10^{-5})}$$

$$= -6.206\times 10^{-4}\ \text{m.}$$

ดังนั้น $y_B = t_{CB} = -0.062$ cm.

มุมความลาดที่ปลายคานอิสระ

$\therefore$ มุมความลาดของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งยืดหยุ่นที่จุด C จะมีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น $(\theta_C - \theta_A)$ = พื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง C

หรือ $0 - \theta_A$ = พื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง C

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\times 3.00\times\left(-\frac{9\times 10^3}{EI}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{1}{2}\times 1.50\times\left(-\frac{2.25\times 10^3}{EI}\right)\right\}\right.$$

$$\theta_A = +\frac{15.1875\times 10^3}{(196\times 10^6)(8.324\times 10^{-5})}$$

$\therefore\ \theta_A = +9.309\times 10^{-4}$ m. red

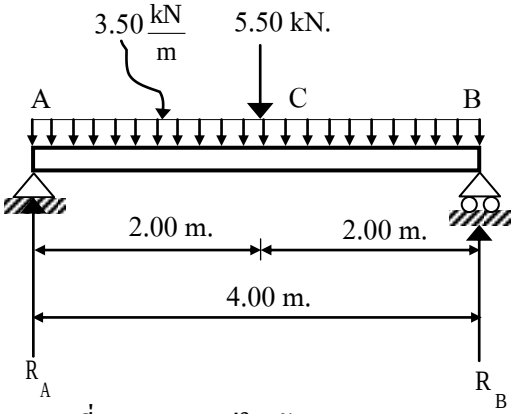
$\therefore\ \theta_A = +5.33$ องศา

ดังนั้น มุมลาดเอียง θ_A เท่ากับ + 5.33 องศา **ตอบ**

และระยะการโก่งตัวสูงสุดของคาน $y_B = t_{CB}$ เท่ากับ – 0.062 cm.

ตัวอย่างที่ 6.5 จงคำนวณหาค่าของมุมลาดและระยะการโก่งตัวสูงสุดที่สัมผัสกับเส้นโค้งยืดหยุ่นแต่ละฐานรองรับของคาน กำหนดให้ $E = 19.6\times 10^6\ \frac{kN}{cm^2}$ และ $I = 6.24\times 10^6\ mm^4$

ดังแสดงในภาพที่ 6.21



ภาพที่ 6.21 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : วทัชภศ เดชพันธ์ (2545:87)

วิธีทำ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 5,550 \times 2.00 - 3,500 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$R_A \times 4.00 - 11,100 - 28,000 = 0$$

$$R_A \times 4.00 - 39,100 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = 39,100$$

$$R_A = \frac{39,100}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 9.75 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 5,550 \times 2.00 + 3,500 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 11,100 + 28,000 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 39,100 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 = -39,100$$

$$R_B = \frac{39,100}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 9.75 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 5,550 - 3,500 \times 4.00 = 0$$

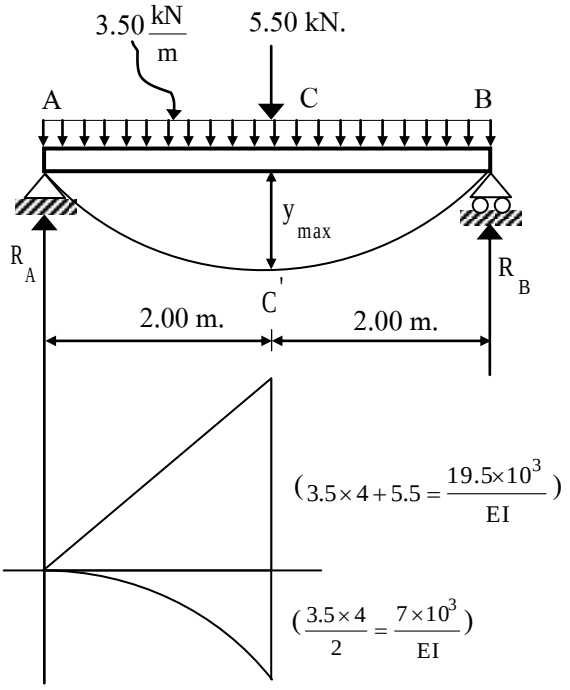
ดังนั้น R_A เท่ากับ 9,775 N.

$$9,775 + R_B - 5,550 - 3,500 \times 4.00 = 0$$

$$R_B - 9,775 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 9.75 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

เนื่องจากคานสมมาตรทั้งโครงสร้างและน้ำหนักบรรทุก



ภาพที่ 6.22 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : วทัชภพ เดชพันธ์ (2545:87)

การโก่งตัวของโครงสร้างสูงสุด จะเกิดขึ้นที่กลางคาน (จุด C)

จากเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งยืดหยุ่นที่จุด C ไปตัดกับเส้นที่ลากจากจุด A จะได้ t_{AC}

$t_{AC} = y_{max}$ = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง C รอบจุด A

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\times 2.00\times\frac{19\times10^3}{EI}\times\left(\frac{2}{3}\times 2.00\right)\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}\times 2.00\times\frac{7\times10^3}{EI}\times\left(\frac{3}{4}\times 2.00\right)\right\}\right.$$

$$= \frac{19\times10^3}{(196\times10^6)(6.24\times10^{-6})}$$

$$= 0.0155 \text{ m.}$$

ดังนั้น $y_C = y_{max} = -1.550$ cm.

เมื่อจุด C เป็นจุดที่เกิดการโก่งตัวสูงสุดของคาน

∴ มุมความลาดของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งยืดหยุ่นที่จุด C จะมีค่าเป็นศูนย์

ดังนั้น $(\theta_C - \theta_A)$ = AM

หรือ $0-\theta_A$ = พื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง C

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\times 2.00\times\frac{19.5\times10^3}{EI}\right)\right\}-\left\{\left(\frac{1}{3}\times 2.00\times\frac{7\times10^3}{EI}\right)\right\}$$

$$= \frac{14.833\times10^3}{EI}$$

$$\theta_A = -\frac{14.833\times10^3}{(196\times10^6)(6.24\times10^{-6})}$$

$$\therefore\ \theta_A = -0.0121 \text{ m. red}$$

และ $\therefore\ \theta_B = -0.0121$ m. red

$$\therefore\ \theta_A = +0.69 \text{ m. องศา}$$

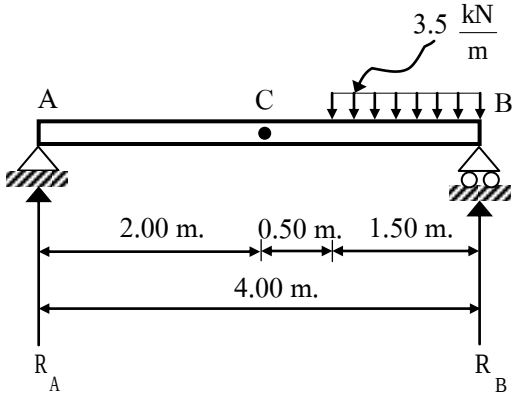
และ $\therefore\ \theta_B = +0.69$ m. องศา

ดังนั้น มุมลาดเอียง θ_A และ θ_B เท่ากับ + 0.69 m. องศา **ตอบ**

และระยะการโก่งตัวสูงสุดของคาน เท่ากับ – 1.550 cm.

ตัวอย่างที่ 6.6 จงคำนวณหาการโก่งตัวที่จุด C และ D ของคาน กำหนดให้ $E=19.6\times10^6\ \frac{kN}{cm^2}$

และ $I=4.26\times10^{-5}\ m^4$ ดังแสดงในภาพที่ 6.23



ภาพที่ 6.23 คานธรรมดา (Simple Beam)

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:288)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.23

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$

$$R_A \times 4.00 - 3.5 \times 1.50 \times \frac{1.50}{2} = 0$$

$$R_A \times 4.00 - 3.938 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = 3.938$$

$$R_A = \frac{3.938}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = \mathbf{0.984\ kN.\ (\uparrow^{+})}$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 3.50 \times 1.50 \times (\frac{1.50}{2} + 2.50) = 0$$

$$-R_B \times 4.00 + 17.063 = 0$$

$$-R_B \times 4.00 = -17.063$$

$$R_B = -\frac{17.063}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = \mathbf{4.266\ kN.\ (\uparrow^{+})}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 3.50 \times 1.50 = 0$$

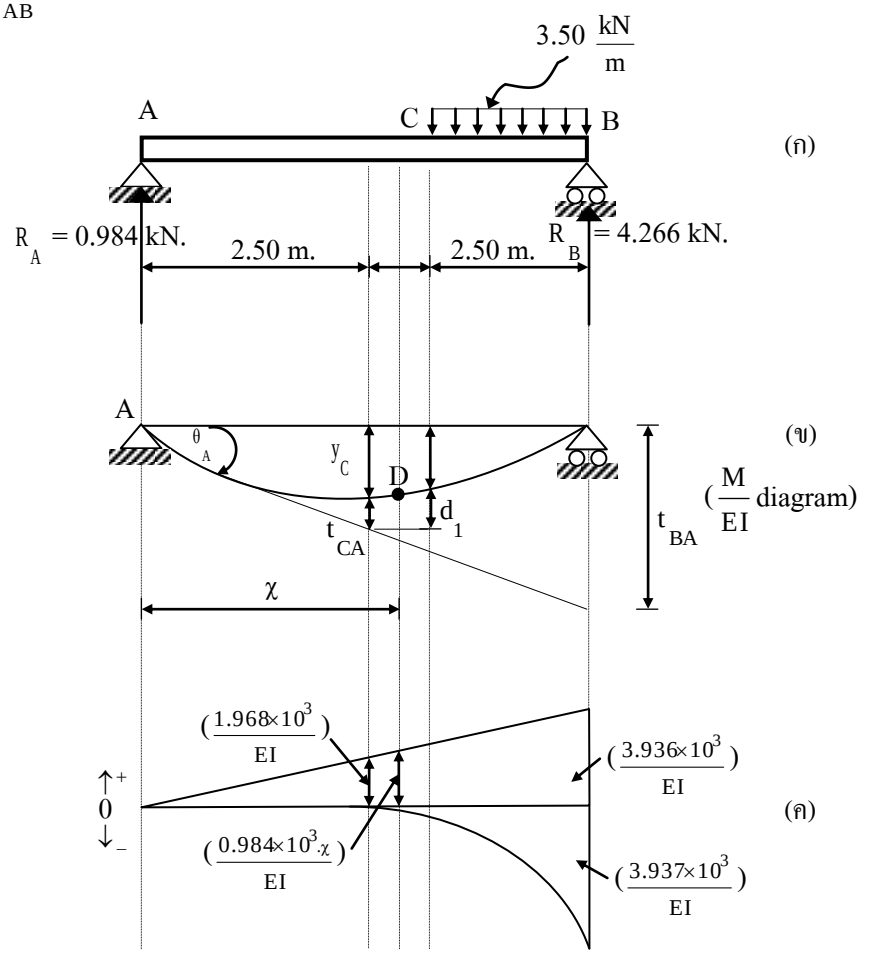
ดังนั้น R_A เท่ากับ 0.984 kN.

$$0.984 + R_B - 3.50 \times 1.50 = 0$$

$$R_B - 4.266 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = 4.266\ \text{kN.}\ (\uparrow^{+})$$

กำหนดแนวการโก่งตัวของโครงสร้างใช้ทฤษฎีที่ 2 ของพื้นที่โมเมนต์ คำนวณ t_{BA} และ t_{AB}



ภาพที่ 6.24 คานธรรมดา (Simple Beam)

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:288)

เลือกจุด A เป็นจุดสัมผัสอ้างอิง

t_{BA} = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง B ถึง A โดยรอบจุด B

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\times 4.00\times\frac{3.936\times10^3}{EI}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times 4.00\right)\right\}$$

$$+\left\{\left(\frac{1}{3}\times 1.50\right)\left(-\frac{3.937\times10^3}{EI}\right)\times\left(\frac{1}{4}\times 1.50\right)\right\}$$

$$= -\frac{9.758\times10^{3}}{(196\times10^{9})(5.26\times10^{-5})}$$

$$= -9.957\times10^{-3} \text{ m.}$$

ดังนั้น $t_{BA} = -0.996$ cm.

$$\theta_A = \frac{t_{BA}}{4}$$

$$= -\frac{9.975\times10^{-3}}{(196\times10^{9})(5.26\times10^{-5})}$$

$$= -2.489\times10^{-3}$$

$$\therefore \theta_A = -0.143 \text{ องศา}$$

ในขณะเดียวกันให้การโก่งตัวสูงสุดเกิดจากที่จุด D ห่างจากฐานรองรับ A เป็นระยะ X m. และ $\theta_D = 0$ จากสามเหลี่ยมคล้ายภาพภาพที่ 6.12 (ข) จะได้

จาก $(\theta_A - \theta_B)$ = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง D ถึง A

หรือ $\{(0-(-2.489\times10^{-3})\}$ = $\{(\frac{1}{2}\times(x)(\frac{0.984\times10^{3}(x)}{EI})\}$

$$x^2 = (5.059\times10^{-6})(196\times10^{9})(5\times10^{-6})$$

$$\therefore x = 2.227 \text{ m.}$$

$t_{AC} = y_{max}$ = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง D รอบจุด A

$$= \{(\frac{1}{2}\times2.00\times\frac{19\times10^{3}}{EI}\times(\frac{2}{3}\times2.00)\}-\{(\frac{1}{3}\times2.00\times\frac{7\times10^{3}}{EI}\times(\frac{3}{4}\times2.00)\}$$

$$= \frac{19\times10^{3}}{(196\times10^{6})(6.24\times10^{-6})}$$

ดังนั้น $y_C = y_{max} = +3.697\times10^{-3}$ m.

$\therefore y_C = y_{max} = 0.3697$ cm.

การโก่งตัวที่กลางคาน (จุด C)

$$y_c = d_1 + t_{CA}$$

จากสามเหลี่ยมคล้ายภาพภาพที่ 6.12 (ข) จะได้

$$\frac{d_1}{2} = \frac{t_{BA}}{4}$$

$$d_1 = 050 + 9.957\times10^{-3}$$

$$\therefore\ d_1 = 4.978\times10^{-3}\ \text{m.}$$

t_{AC} = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง C ถึง รอบจุด A

$$= \left\{\left(\frac{1}{2}\times 2.00\left(\frac{1.968\times10^{3}}{EI}\right)\left(\frac{1}{3}\times 2.00\right)\right\}$$

$$= -\frac{1.312\times10^{3}}{(196\times10^{9})(5\times10^{-5})}$$

$$= 1.339\times10^{-3}\ \text{m.}$$

$$y_c = \left((+4.978\times10^{-3}) - (+1.339\times10^{-3})\right)$$

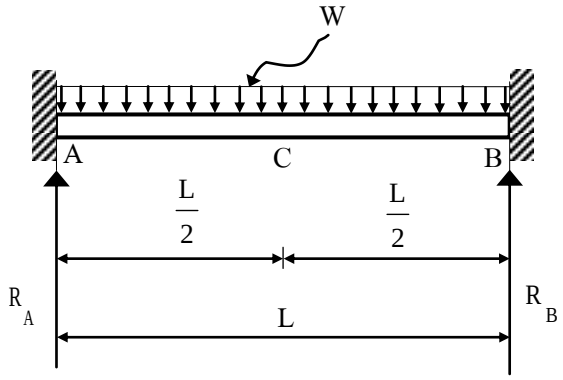
$$= -3.639\times10^{-3}\ \text{m.}$$

$$\therefore\ y_c = 0.364\ \text{cm.}$$

ดังนั้น การโก่งตัวสูงสุดของคานเท่ากับ 0.369 cm. **ตอบ**

และการโก่งตัวที่กึ่งกลางของคานเท่ากับ 0.364 cm.

ตัวอย่างที่ 6.7 จงสร้างสมการสำหรับใช้หาค่าการโก่งตัวสูงสุดของคาน โดยมีน้ำหนักกระจายสม่ำเสมอ W ช่วงคาน L และ EI ดังแสดงในภาพที่ 6.25



ภาพที่ 6.25 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:241)

เนื่องจากคานมีการสมมาตรทั้งโครงสร้างและน้ำหนักบรรทุก คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดที่กึ่งกลางคาน ดังภาพภาพที่ 6.25

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times L - W \times L \times \frac{L}{2} = 0$$

$$R_A \times L - \frac{WL^2}{2} = 0$$

$$R_A \times L = +\frac{WL^2}{2}$$

$$\therefore R_A = +\frac{WL}{2} \uparrow^{+}$$

$$-R_B \times L + W \times L \times \frac{L}{2} = 0$$

$$-R_B \times L + \frac{WL^2}{2} = 0$$

$$+\frac{WL^2}{2} = -R_B \times L$$

$$\therefore R_B = +\frac{WL}{2} \uparrow^{+}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - W \times L = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ $\frac{WL}{2}$

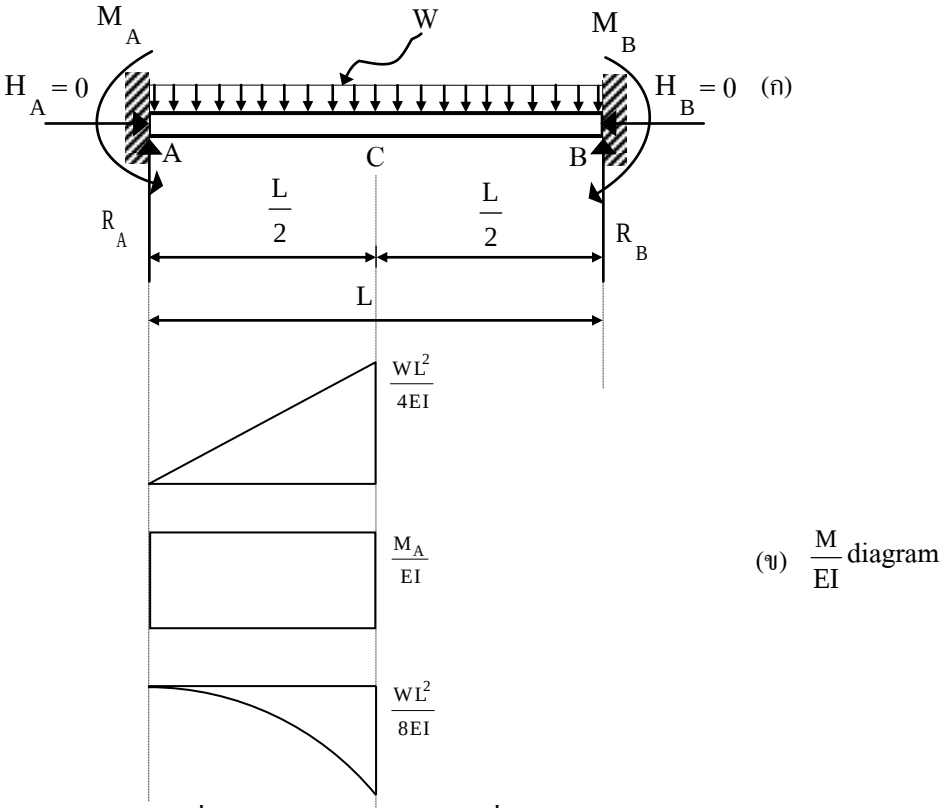
$$R_A + \frac{WL}{2} - W \times L = 0$$

$$R_A - \frac{WL}{2} = 0$$

$$\therefore R_A = +\frac{WL}{2} \uparrow^{+}$$

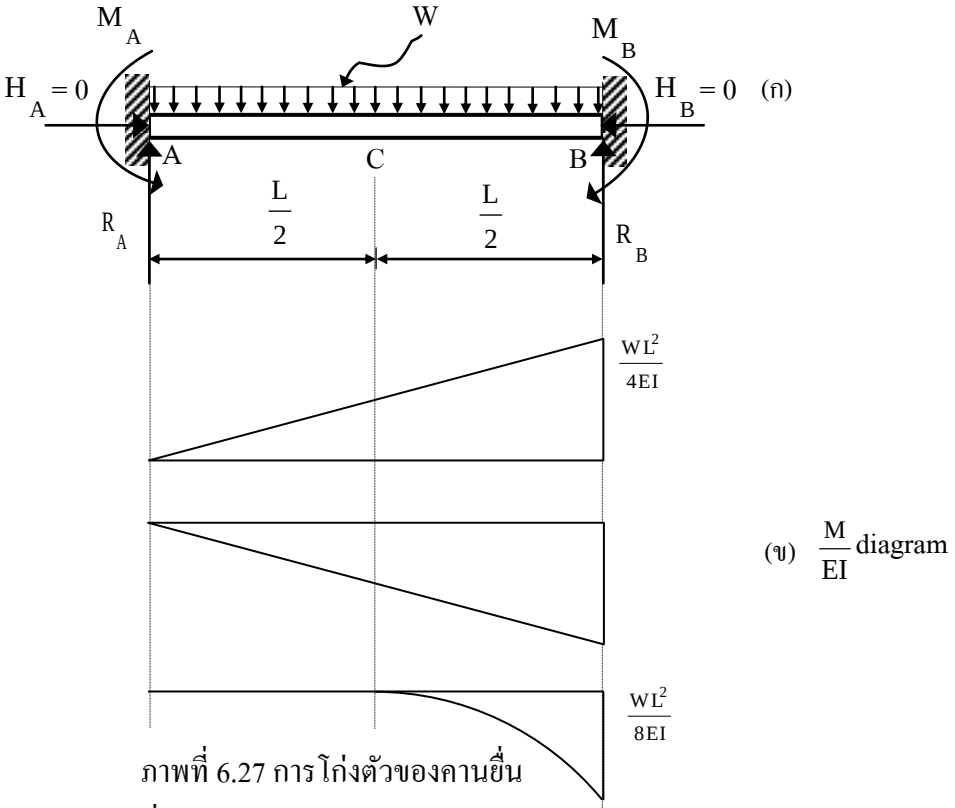
และ $M_A = M_B$

พิจารณาเพียงครั้งเดียวและการโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C อยู่ที่ระยะ $\frac{L}{2}$ จากฐานรองรับ A และ B ดังแสดงในภาพภาพที่ 6.25 (ข)



ภาพที่ 6.26 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:243)



ภาพที่ 6.27 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:245)

เลือกจุด A เป็นจุดสัมผัสอ้างอิง

$(\theta_A - \theta_C)$ = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง C

หรือ $(0-0)$ = $\{(\frac{1}{2}\times(\frac{WL^2}{4EI})(\frac{L}{2})+(\frac{1}{2}\times(\frac{M_A}{EI})(\frac{L}{2})+(\frac{1}{3}\times(-\frac{WL^2}{8EI})(\frac{L}{2})\}$

$\therefore \quad M_A$ = $\frac{WL^2}{12}$)-

χ^2 = $(5.059\times10^{-6})(196\times10^{9})(5\times10^{-6})$

$y_{max}=t_{CA}$ = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง C ถึง A รอบจุด C

= $\{(\frac{1}{2}\times(\frac{WL^2}{4EI})(\frac{L}{2})(\frac{L}{3}\times\frac{L}{2})+(\frac{1}{12}\times(\frac{M_A}{EI})(\frac{L}{2})(\frac{L}{4})$

$+(\frac{1}{3}\times(-\frac{WL^2}{8EI})(\frac{L}{2})(\frac{L}{4}\times\frac{L}{2})\}$

$\therefore \quad y_{max}=t_{CA}$ = $\frac{WL^4}{384EI}$

ดังนั้น โมเมนต์ที่จุด A เท่ากับ $\frac{WL^2}{12}$ และการโก่งตัว $y_{max}=t_{CA}$ เท่ากับ $\frac{WL^4}{384EI}$ **ตอบ**

6.2.5 คานที่มีโมเมนต์แห่งความเฉื่อยแตกต่างกัน

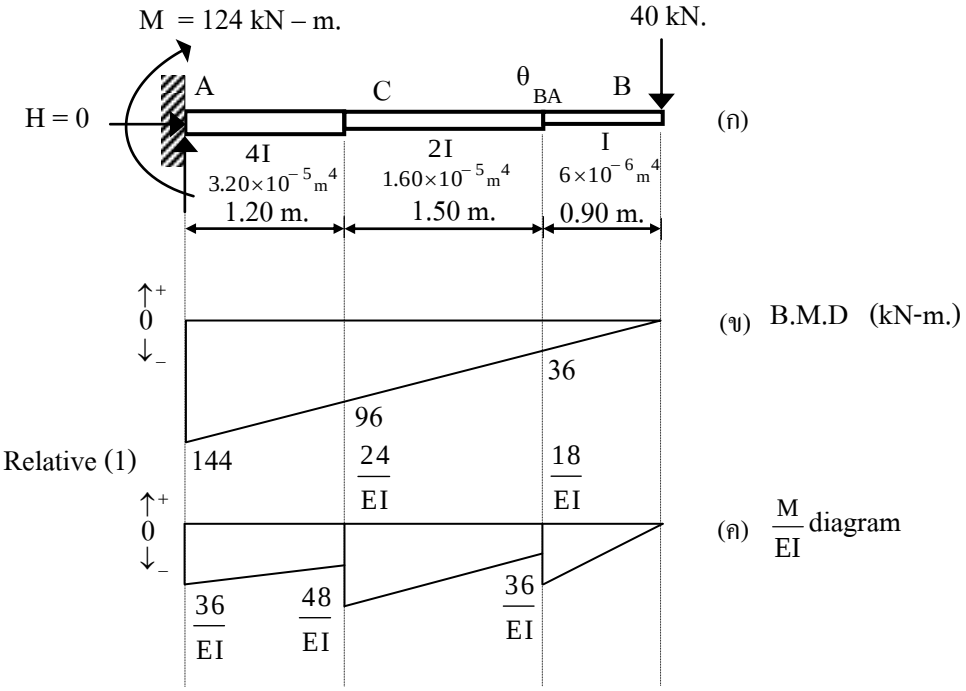
ถ้าคานมีค่า E คงที่ การหาของมุมลาดชันความลาดและการโก่งตัวของเส้นโค้งยืดหยุ่นจุใดๆ บนคาน สามารถเขียนในภาพของสมการ ดังนี้

$E(\theta_2-\theta_1)$ = $\frac{AM}{I}$

และ $-500\times t_{21}$ = $\frac{AM}{I}\times\bar{X}$

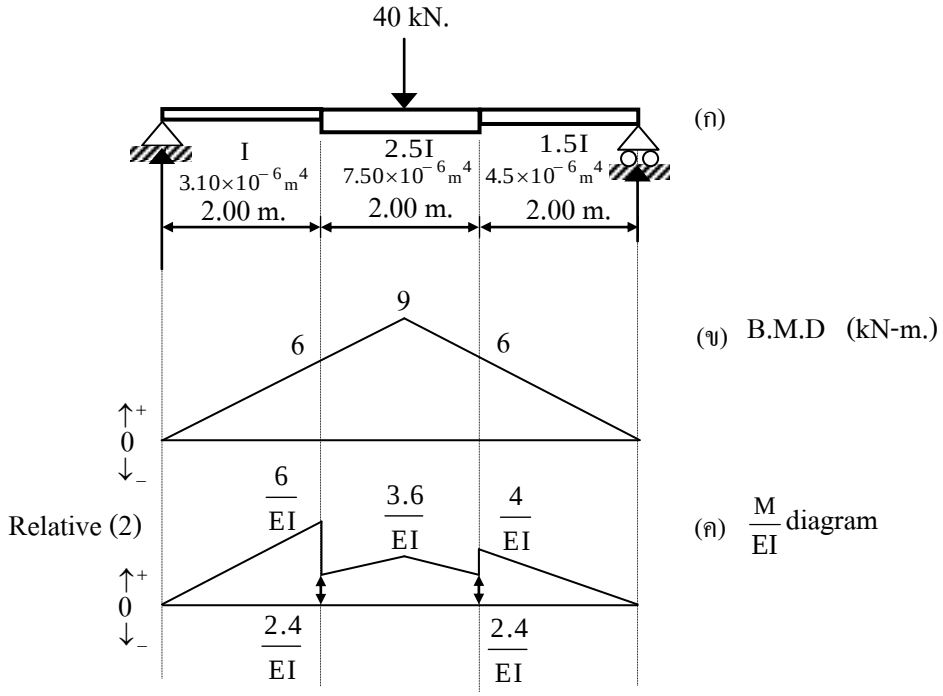
ตัวอย่างที่ 6.8 จงเขียนการเขียน $\frac{M}{EI}$ diagram ของคานที่มีค่าโมเมนต์แห่งความเฉื่อยคงที่ ดังแสดงในภาพที่ 6.28 , 6.29 และ 6.30

ในการเขียน $\frac{M}{EI}$ diagram ของคานที่มีค่าโมเมนต์แห่งความเฉื่อยคงที่ ผิดกันที่จุดซึ่งมีค่าของโมเมนต์แห่งความเฉื่อยเปลี่ยนค่าของ $\frac{M}{EI}$ จะเปลี่ยนด้วย และจะมี 2 ค่า กล่าวคือ คิดโมเมนต์แห่งความเฉื่อยมีค่าเดิม 1 ค่า คิดเมื่อโมเมนต์แห่งความเฉื่อยมีค่าเดิม 1 ค่า เมื่อมีค่าโมเมนต์แห่งความเฉื่อยมีค่าใหม่อีก 1 ค่า แต่คิดที่จุดเดียวกัน 2 ค่า รายละเอียด ดังนี้



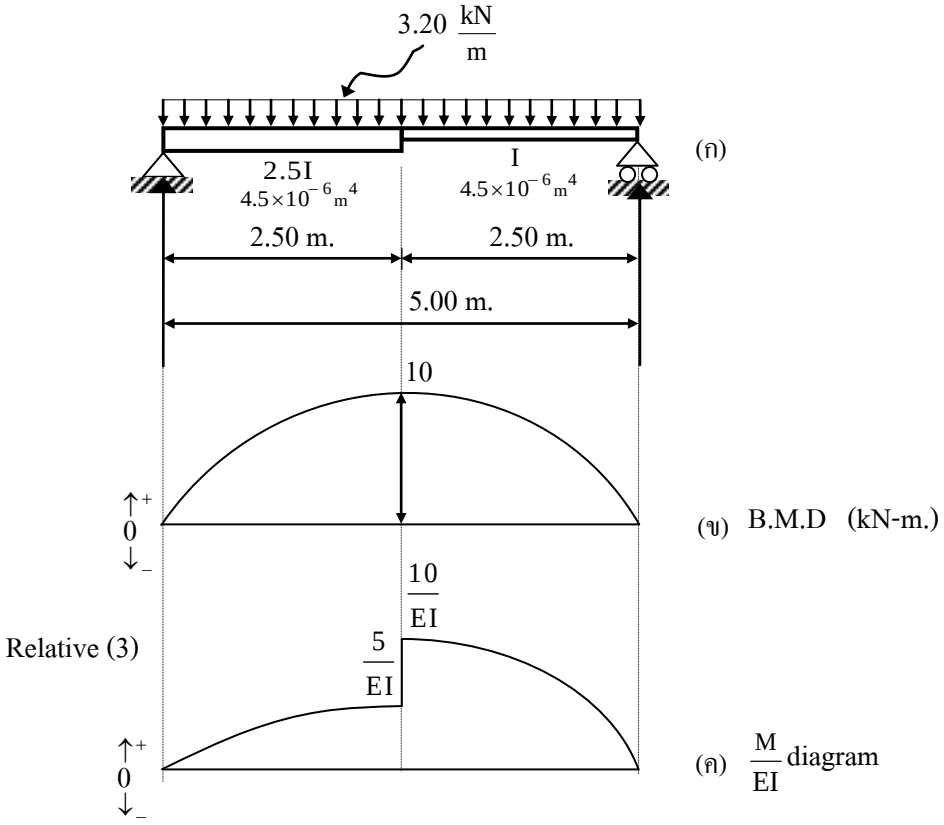
ภาพที่ 6.28 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:250-255)



ภาพที่ 6.29 การโก่งตัวของคานยื่น

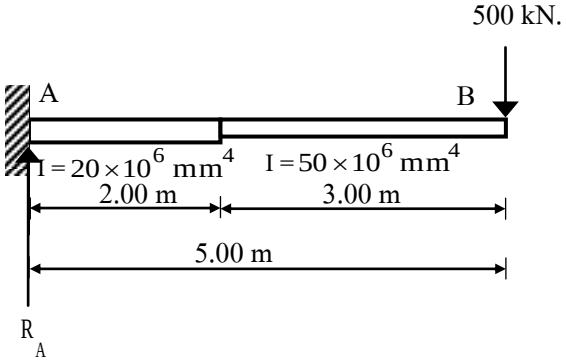
ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:250-255)



ภาพที่ 6.30 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:250-255)

ตัวอย่างที่ 6.9 จงคำนวณหาค่าของมุมลาดและระยะการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างที่จุด B ของคานยื่น AB กำหนดให้ $E = 20\times10^{6}\ \frac{kN}{cm^2}$ ดังแสดงในภาพที่ 6.31



ภาพที่ 6.31 คานอยู่ในสภาวะสมดุล

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2535:366)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด B ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.31

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$$R_A - 500 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = +500 \text{ N.} \quad (\uparrow^+)$$

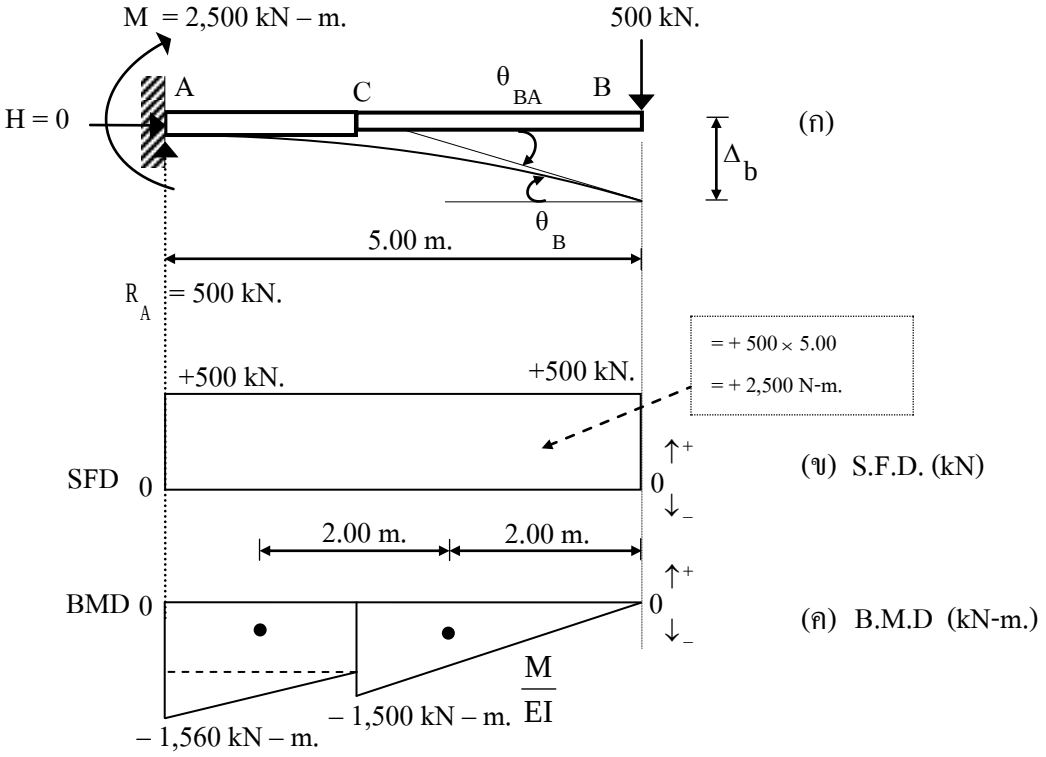
การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0 \quad \uparrow^+ \downarrow_-$

จุด A	SFA_L	= 0	= 0	
	SFA_R	= + 500	= + 500	kN.
จุด B	SFB_L	= – 500	= – 500	kN.
	SFB_R	= – 500 + 500	= 0	

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A

การหาโมเมนต์ $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

จุด A	BMA	= – 500 × 5.00	= – 2,500	kN-m.
จุด B	BMB	= – 500 × 0	= 0	



ภาพที่ 6.32 คานยื่น

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2535:63

การคำนวณหาค่า $\frac{M}{EI}$ ที่จุด A ดังภาพภาพที่ 6.24

$\frac{M}{EI}$ ที่จุด A $= \frac{-2,500}{(2\times10^{7})\times(80\times10^{-6})} = \frac{-1,560\times10^{6}}{EI}$

ดังนั้น $\theta_B = \theta_A + \theta_{BA}$

$\theta_B = 0 - 10^{-3}(3.00\times\frac{1,500}{2} + 2.00(0.94) + 2.00(0.62)/2 = \frac{1,333.33}{EI}\downarrow$

$= -0.00475$ เรเดียน ↷

ดังนั้น $D_B = D_{BA}$

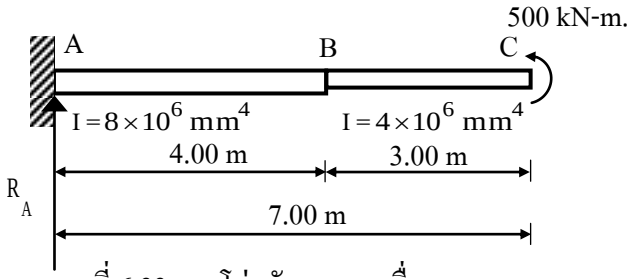
$= -10^{-3}(2.25)(2.00) + 1.88(4.00) + 0.62(4.33))$

$= -14.70\times10^{-3}$ m.

$D_B = -14.70$ mm. ↓

ดังนั้น การโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างคานที่จุด B เท่ากับ -14.70 mm. ↓ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.10 จงคำนวณหาระยะการเสียภาพการโก่งตัวสูงสุดของคานที่จุด B และจุด C และค่าเฉลี่ยของพื้นที่ของแต่ละชิ้นส่วน กำหนดให้ E= 200GPa โครงสร้างที่จุด B ของคานยื่น AB กำหนดให้ E= 20×10^{6} $\frac{kN}{cm^2}$ ดังแสดงในภาพที่ 6.33



ภาพที่ 6.33 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.33

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

$R_A + 500\times7.00 = 0$

$\therefore \quad R_A = -3,500$ kN. $(\downarrow\_)$

การหาแรงเฉือน $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^+ \downarrow_-$

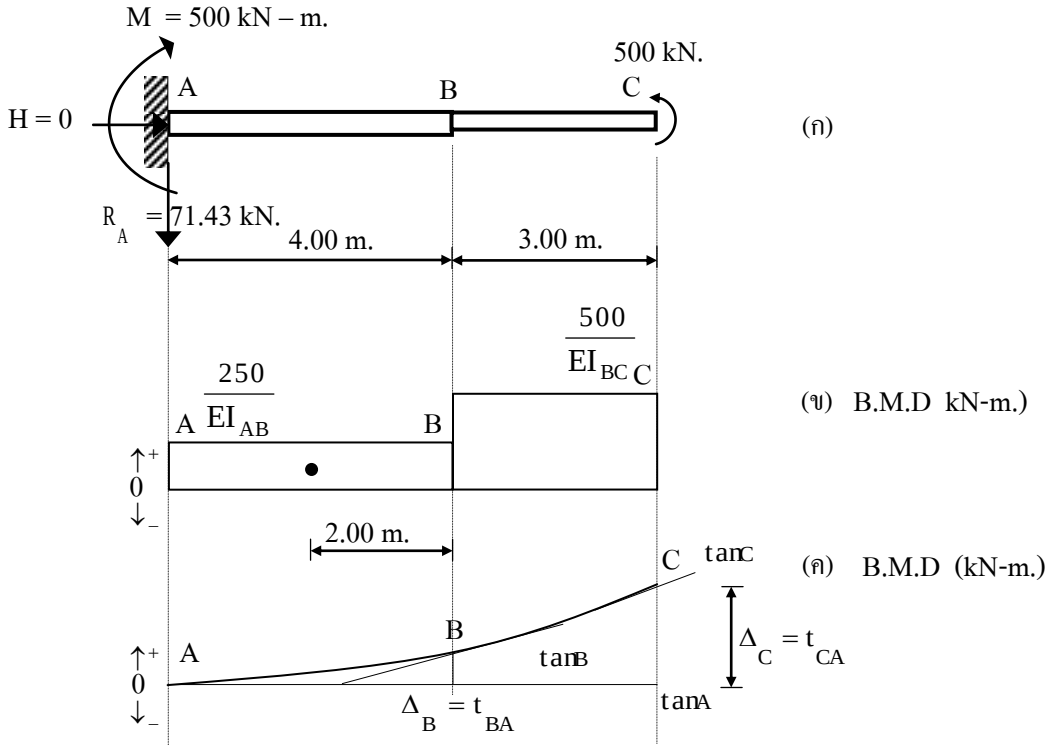
จุด A	SFA_L	= 0	= 0	
	SFA_R	= – 71.43	= + 71.43	kN.
จุด B	SFB_L	= – 166.67	= +166.67	kN.
	SFB_R	= – 166.67	= +166.67	kN.

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A

การหาโมเมนต์ $\Sigma M_A = 0$ $^+\circlearrowleft^-$

จุด A	BMA	= – 250	= +250	kN-m.
จุด C	BMB	= – 500	= +500	

เขียนผัง $\frac{M}{EI}$ ($\frac{M}{EI}$ diagram) เขียนผังของโมเมนต์สำหรับคานซึ่งมีภาพภาพสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วสร้างผัง $\frac{M}{EI}$ จากความสัมพันธ์ของ I_{BC} และ $I_{BA} = 2I_{BA}$ ดังแสดงในภาพภาพที่ 6.34 (ข) ค่าของ EI_{BC} จะต้องถูกแทนที่ด้วยเชิงตัวเลขในขั้นตอนสุดท้าย



ภาพที่ 6.34 คานยื่น

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2535:63)

สำหรับภาพภาพเส้นโค้งที่แสดงพฤติกรรมแบบยืดหยุ่น (Elastic Curve) โมเมนต์คู่ควบที่จุด C จะทำให้คานมีระยะการเสียภาพหรือระยะการทรุดตัว ดังแสดงในภาพภาพที่ 6.34 (ค) แนวเส้นสัมผัสที่จุด A,B และ C ถูกใช้ในการคำนวณหาค่า Δ_B และ Δ_C ระยะการกระจัดดังกล่าวสามารถหาความสัมพันธ์ได้โดยตรงกับระยะการขจัดระหว่างแนวเส้นสัมผัส จากภาพภาพจะสามารถหาค่าของ Δ_B ซึ่งมีค่าเท่ากับระยะห่างในแนวดิ่งของเส้นสัมผัส tanB เทียบกับ tanA ใช้สัญลักษณ์ t_{BA} ซึ่งหัวลูกศรจะมีทิศทางจากล่างขึ้นข้างบน ดังแสดงในภาพภาพที่ 6.34 (ค) รายละเอียด ดังนี้

นอกจากนั้น $\Delta_B = t_{BA}$

$\Delta_C = t_{CA}$

ทฤษฎีโมเมนต์ของพื้นที่ (Moment Area Theorem) ประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่ 2 t_{BA} มีค่าเท่ากับโมเมนต์ของผัง $\frac{M}{EI_{bc}}$ ระหว่างช่วง A และ B รอบจุด B ดังภาพภาพที่ 6.24 (ข)

$$\Delta_B = t_{BA} = \left\{\left(\frac{250}{EI}\times 4.00\times 2.00\right)\right\}$$

$$= \frac{2{,}000\times 10^3}{EI_{BC}}$$

แทนค่าเชิงตัวเลขลงในสมการ ดังกล่าว จะได้ว่า

$$\Delta_B = \frac{2{,}000}{(200\times 10^9)(4\times 10^6)(1\times 10^3)^4}$$

$$= 0.0025 \text{ m.} = 2.50 \text{ mm.}$$

ในขณะเดียวกัน ค่าของ t_{CA} จะคำนวณได้จากผัง M/EI_{BC} ทั้งหมดในช่วง A ไป C โดยหาโมเมนต์ของพื้นที่รอบจุด C จะได้ว่า

$$\Delta_C = t_{CA} = \left\{\left(\frac{250}{EI}\times 4.00\right)(5.00)\right\} + \left\{\left(\frac{500}{EI}\times 3.00\right)(1.50)\right\}$$

$$= \frac{7{,}250\times 10^3}{EI_{BC}}$$

$$\Delta_C = \frac{7{,}250}{(200\times 10^9)(4\times 10^6)(10^{-12})}$$

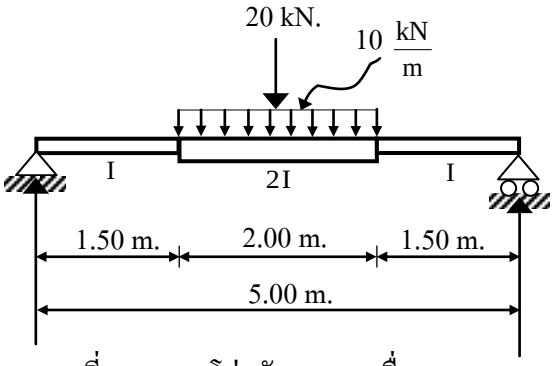
$$= 0.00906 \text{ m.} = 9.06 \text{ mm.}$$

เนื่องจากคำตอบทั้ง Δ_B และ Δ_C มีค่าเป็นบวก จึงพอสรุปได้ว่าที่จุด B และจุด C อยู่เหนือเส้นสัมผัสของจุด A

ดังนั้น การโก่งตัวสูงสุดของคานที่จุด B เท่ากับ 2.50 mm. **ตอบ**

และการโก่งตัวสูงสุดของคานที่จุด C เท่ากับ 9.06 mm.

ตัวอย่างที่ 6.11 จงคำนวณหาระยะการเสียภาพการโก่งตัวสูงสุดของคานที่จุด B และจุด C และค่าเฉลี่ยของพื้นที่ของแต่ละชิ้นส่วน กำหนดให้ $E=200 GPa$, $E=196 \frac{GN}{m^2}$, $I_1 = 1.80\times10^{-5} m^4$, $I_2 = 1.80\times10^{-5} m^4$ ดังแสดงในภาพที่ 6.35



ภาพที่ 6.35 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.35

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}$

$$R_A \times 5.00 - 20\times 2.50 - 10\times 2.00\times (\frac{2.00}{2}+1.50) = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 100 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 0$$

$$R_A = \frac{100}{5.00}$$

$$\therefore R_A = 20 \text{ kN.}$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}$

$$-R_B \times 5.00 + 20\times 2.50 + 10\times 2.00\times (\frac{2.00}{2}+1.50) = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 100 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 = -100$$

$$-R_B = \frac{100}{5.00}$$

$$\therefore R_B = 20 \text{ kN.}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \ \uparrow^+ \downarrow_-$

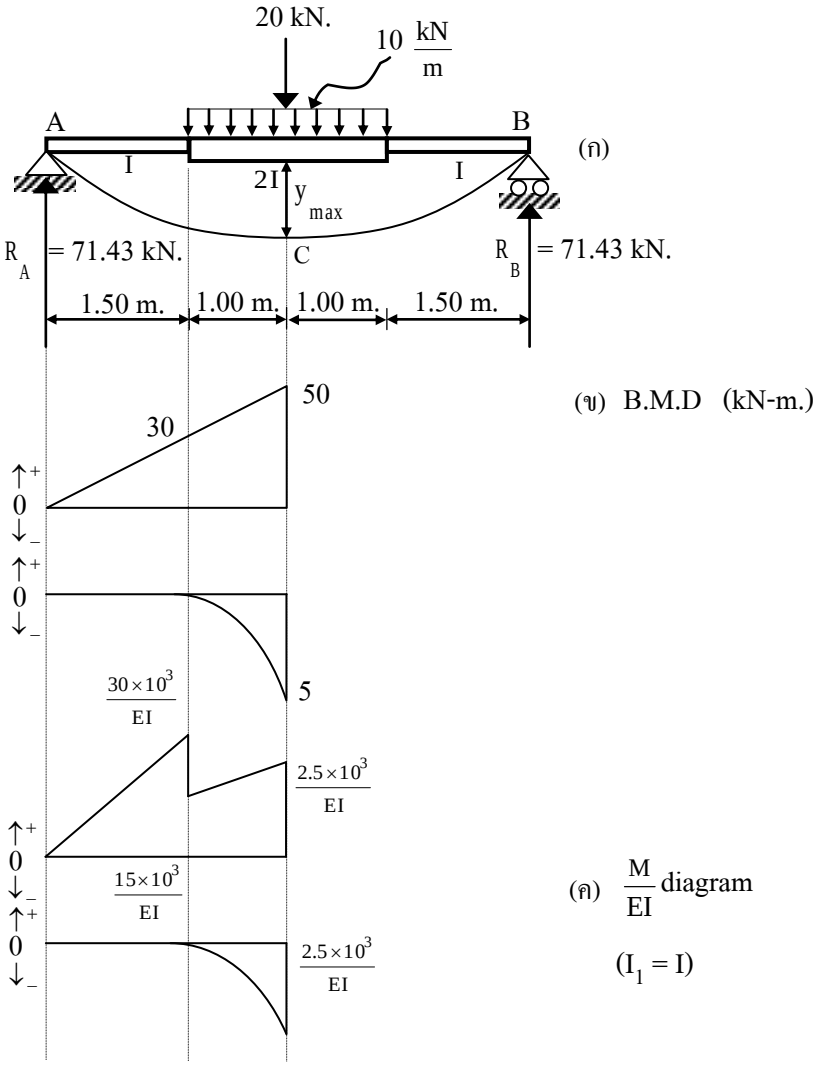
$$R_A + R_B - 10 \times 2.00 - 20 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 20 kN.

$$20 + R_A - 40 = 0$$

$$R_A - 20 = 0$$

$$\therefore R_A = 20 \text{ kN.} \ \uparrow^+$$



ภาพที่ 6.36 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

เลือกจุด C เป็นจุดสัมผัสอ้างอิง

การโก่งตัวสูงสุดจะเกิดที่ปลายคานยื่นอิสระ รายละเอียด ดังนี้

$y_{max} = t_{AC}$ = โมเมนต์ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่าง A ถึง C โดยรอบจุด A

$$= \{(\frac{1}{2}\times\frac{30\times10^3}{EI})(1.50)(\frac{2.50}{2}+1.50)+(\frac{15\times10^3}{EI})(1.00)(1.50+\frac{1.00}{2})$$
$$+(\frac{1}{2}\times(\frac{10\times10^3}{EI})(1.00)\times(1.50+\frac{2.00}{3}\times1.50)+$$
$$(\frac{1}{3}\times(-\frac{2.50\times10^3}{EI})(1.00)\times(1.50+\frac{3.00}{4}\times1.00)$$
$$= -\frac{75.63\times10^3}{(196\times10^9)(1.8\times10^{-5})}$$

$\therefore\ y_{max} = t_{BA}$ = -0.021 m. (ใช้ -0.021 m.)

ดังนั้น การโก่งตัวสูงสุดของคานที่กึ่งกลางของคาน เท่ากับ $\therefore\ y_{max} = t_{BA} - 0.021$ m. **ตอบ**

6.3 คานเสมือน (Conjugate Beam Method)

วิธีคานเสมือนถูกพัฒนาโดยมูลเลอร์-เบย์ลูร์ (Muller-Breslau) ในปี ค.ศ.1865 วิธีการนี้ใช้เพื่อหาค่าความลาดชันระยะการเสียภาพหรือการโก่งตัวหรือการทรุดตัวของคาน เป็นต้น อย่างไรก็ตาม วิธีการนี้ตั้งอยู่บนหลักการวิชาสถิติศาสตร์และเป็นวิธีการประยุกต์ใช้กันอย่างแพร่หลาย (R.C.Hibbelerh Russell ,2545:231)

ส่วนในการคำนวณหาการโก่งตัวของโครงสร้างโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) ที่กล่าวมานั้นต้องอาศัยการเขียนภาพเส้นโค้งอิลาสติคแสดงลักษณะการโก่งตัวเข้าช่วย สำหรับวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) นั้นสามารถใช้คำนวณหาการโก่งตัวของโครงสร้างได้โดยตรงไม่ต้องอาศัยการเขียนเส้นโค้งอิลาสติค เพียงแต่ดัดแปลงบางสิ่งบางอย่างเท่านั้น (สมนึก กุลประภา ,2528:/29)

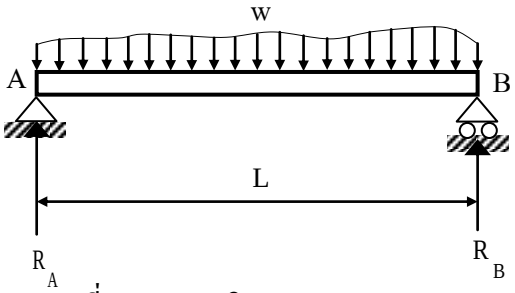
สำหรับสมการที่ใช้เป็นพื้นฐานสำหรับวิธีการนี้คือ $(\frac{dv}{dx} = -w)$ และสมการ $(\frac{dm}{dx} = V)$ หรือ $\frac{d^2M}{dx^2} = -w)$ ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดภายในของคานกับแรงกระทำ และสมการ $(\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} - w)$ และสมการ $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI})$ แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าความชันและระยะการเสียภาพหรือระยะการโก่งตัวหรือระยะการทรุดตัว เป็นต้น ของภาพเส้นดังที่แสดง

พฤติกรรมแบบยืดหยุ่นกับโมเมนต์ดัดภายในเพื่อแสดงความคล้ายคลึงกันจึงเขียนสมการเพื่อการเปรียบเทียบกันได้ดังนี้ (R.C.Hibbelerh Russell ,2545:232)

คานจริง $(\frac{dv}{dx} = -w)$ คานจริง $\frac{d^2M}{dx^2} = -w)$

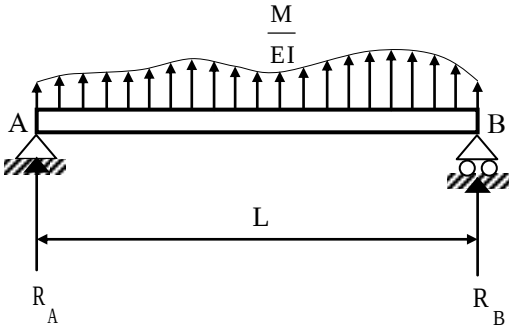
คานเสมือน $(\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} - w)$ คานเสมือน $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI})$

หรือถ้าใช้วิธีการ จะได้ว่า



ภาพที่ 6.37 คานจริง (Real Beam)

ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537:41)



ภาพที่ 6.38 คานเสมือน (Conjugate Beam)

ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537:41)

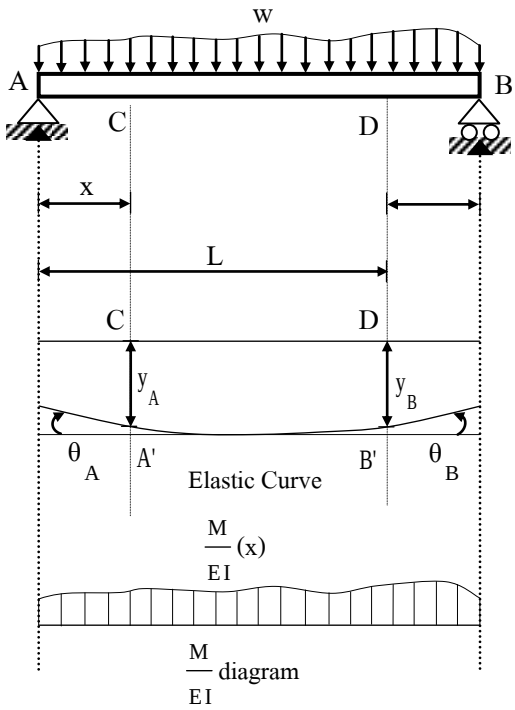
คานจริง $V = -\int w dx$ คานจริง $M = \int(-\int w dx)dx$

คานเสมือน $\theta = \int\left(\frac{M}{EI}\right)dx$ คานเสมือน $V = \int\left[\int\left(\frac{M}{dx}\right)dx\right]dx$

พบว่าแรงแอน V เทียบได้กับค่าความลาดชัน θ โมเมนต์ดัด M เทียบได้กับระยะการเสียภาพ หรือระยะการขจัด v และขนานของการกระจายแรงกระทำภายนอก w เทียบได้กับพื้นที่ภายใต้ผัง $\frac{M}{EI}$ โดยการใช้สิ่งที่เทียบกันดังกล่าวนี้ไปกระทำต่อคานเสมือนที่มีขนาดความยาวเท่ากับความ

จริง ตัวอย่างที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างคานจริงและคานเสมือน ได้แสดงไว้ในภาพที่ 6.38 พบว่าคานเสมือนนั้นต้องรองรับแรงกระทำที่เกิดจาก $\frac{M}{EI}$ ซึ่งเสมือนว่าแรงกระทำเทียบเท่าดังกล่าวเป็นแรง w ที่กระทำบนคานจริงดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น สามารถกล่าวได้ว่าทฤษฎีทั้งสองมีความสัมพันธ์กัน (R.C.Hibbelerh Russell ,2545:233)

สำหรับหลักการของคานเสมือน คานและน้ำหนักบรรทุก เส้นโค้งอีลาสติค และ $\frac{M}{EI}$ diagram รายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 6.39 หลักการของวิธีคานเสมือน

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2524:238)

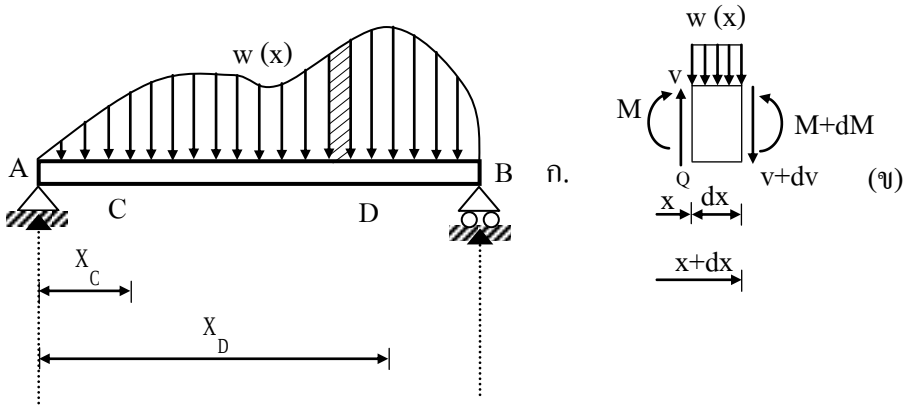
ในช่วง A ถึง B ใดๆ ของส่วนหนึ่งของโครงสร้าง ซึ่งมีฟังก์ชั่นของ $\frac{M}{EI}$ เป็น $\frac{M}{EI}(x)$ ของอินทิเกรต สมการ ดังนี้

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{M}{EI}(x) \quad \text{จะได้}$$

$$\theta_B - \theta_A = -\int_{X_A}^{X_B} \left(\frac{M}{EI}\right)(x)\, dx \quad \text{.....(6.1)}$$

และ $$y_B - y_A = -\int_{X_A}^{X_B} \left[\frac{M}{EI}(x).dx\right] dx \quad \text{.....(6.2)}$$

จากการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างน้ำหนักบรรทุก แรงเฉือน (Sharing Force) และโมเมนต์ดัด (Bending Moment)



ภาพที่ 6.40 หลักการของวิธีคานเสมือน

ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537:41)

พิจารณาจากภาพที่ 6.40 (ข.)

$$\sum v = 0$$

$$V - w(x) - (v+dv) = 0$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = +w(x)$$

เมื่ออินทิเกรต ระหว่าง A และ B จะได้

$$V_B - V_A = -\int_{X_A}^{X_B} w(x)$$

$$V - w(x) - (v+dv) = 0$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = +w(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

จากสมการภาพที่ 6.40 หลักการ (ข)

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด Q ; $\Sigma M_Q = 0$

$$M + (v+dv)\,dx + W \times (w)\,dx \times \frac{dx}{2} - M+dM = 0$$

$$\therefore \frac{dM}{dx} = V \qquad (\therefore dv.dx = 0)$$

เมื่ออินทิเกรต ระหว่าง A และ B จะได้

$$M_B - M_A = \int_{X_A}^{X_B} wV(x)\,dx$$

$$V - w(x) - (v+dv) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = + w(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.4)$$

จากการเปรียบเทียบสมการ (A) กับ (B) จะได้ มุมความลาด (Slope Angle) = แรงเฉือน

และจากการเปรียบเทียบสมการ (2) กับ (4) มุมความลาด (Defection) = แรงดัด

ดังนั้นในการหาความลาดและการโก่งตัวของคานเสมือนพอสรุปได้ดังนี้

1) เมื่อต้องการหามุมลาดเอียงของเส้นโค้งยืดหยุ่นของคาน

(1) มุมความลาดที่จุด C = แรงเฉือนของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด A

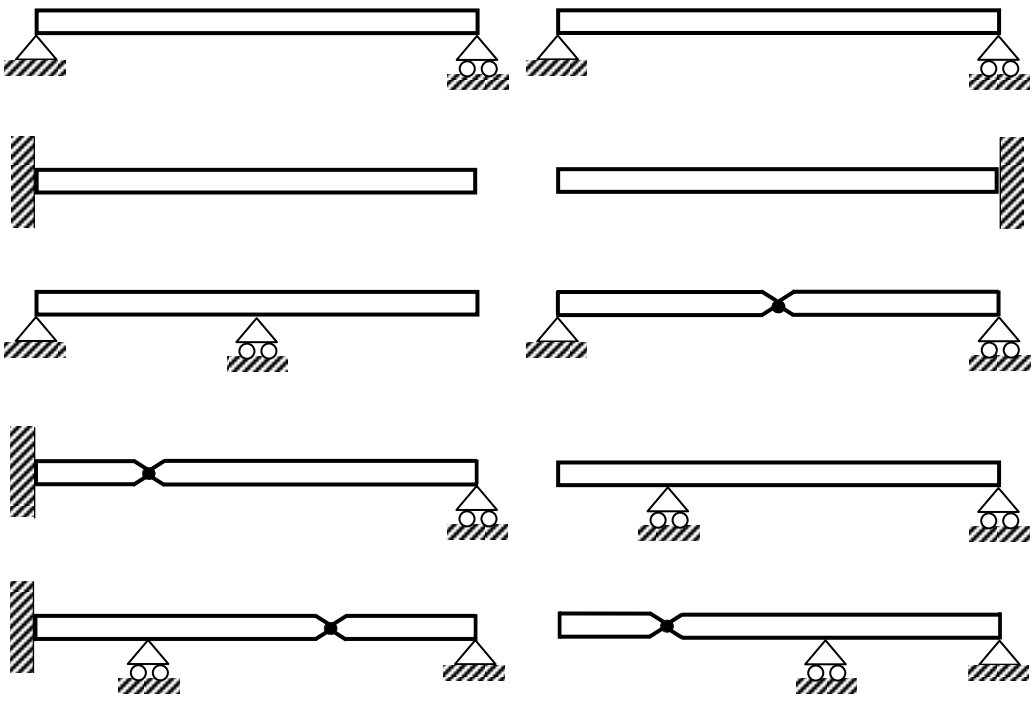
2) เมื่อต้องการหาการโก่งตัวของเส้นโค้งยืดหยุ่น

(1) การโก่งตัวที่จุด C = แรงดัด ของคานเสมือนซึ่งรับ มุมความลาดที่ = แรงเฉือนของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด C

(2) คานเสมือน (Conjugate Beam) คือ คานซึ่งได้รับ $\frac{M}{EI}$ diagram

ทฤษฎีที่ 1 (Theorem1)

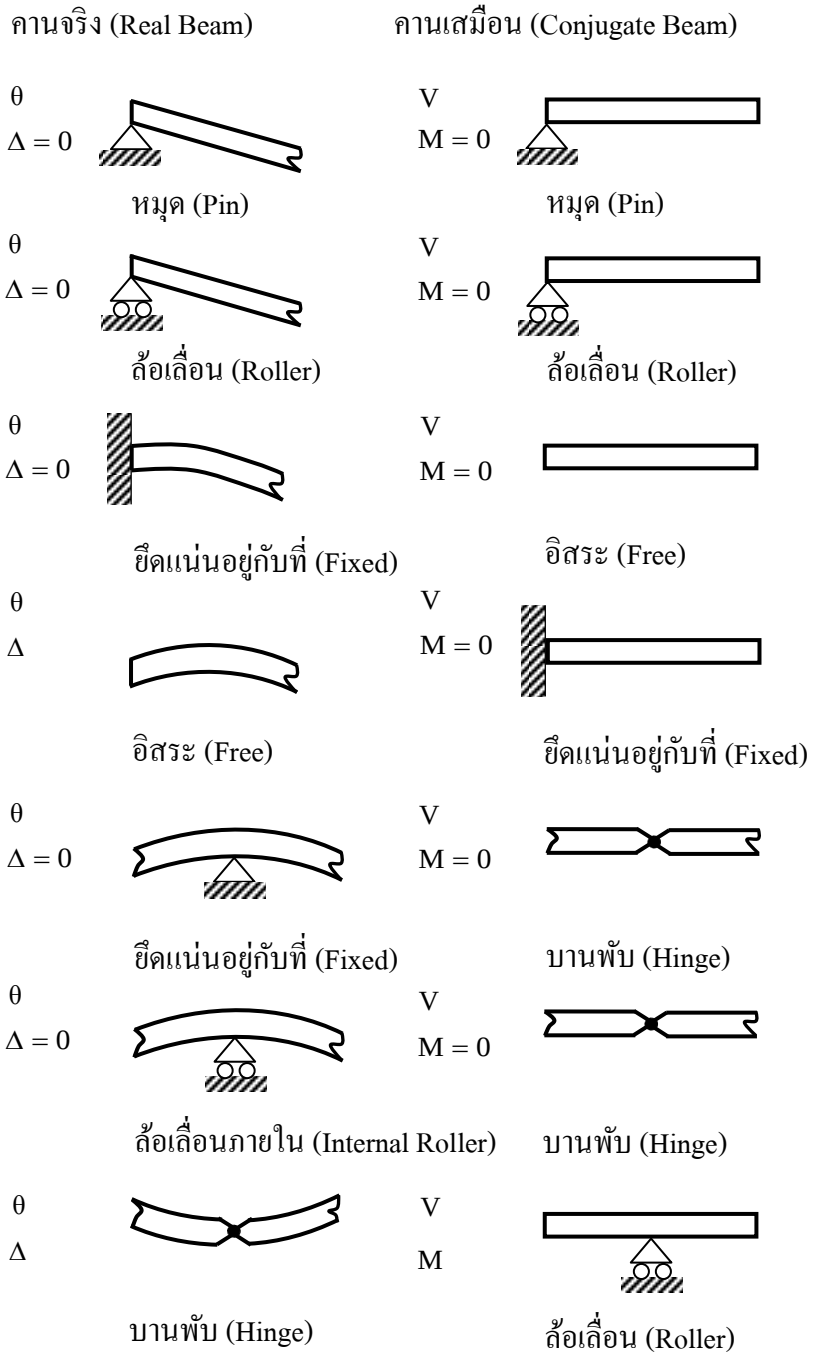
ค่าความลาดชันที่จุดที่ต้องการทราบค่าคานจริงมีค่าเท่ากับแรงเฉือนที่จุดเดียวกัน



คานจริง (Real Beam) คานเสมือน (Conjugate Beam)

ภาพที่ 6.41 คานจริงและคานเสมือน

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:291-292)



ภาพที่ 6.42 คานจริงและคานเสมือน

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:291-292)

ทฤษฎีที่ 2 (Theorem2)

ระยะการเสียภาพหรือระยะการโก่งตัวหรือระยะการขจัดของจุดที่ต้องการทราบค่าในคานจริงมีค่าเท่ากับโมเมนต์ที่จุดเดียวกันในคานเสมือน

6.3.1 ฐานรองรับของคานเสมือน (Conjugate Beam Support)

สำหรับฐานรองรับของคานเสมือนในสมการข้างต้นที่กล่าวมาต้องใช้สมการอินทิเกรต ซึ่งมีความสำคัญที่จะต้องใช้เงื่อนไขและขอบเขตที่เหมาะสม ในทำนองเดียวกันเมื่อทำการวาดภาพของคานเสมือนแล้วแรงเฉือนและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับ ซึ่งสามารถคำนวณจากค่าความลาดชันและระยะการเสียภาพหรือการโก่งตัวหรือระยะการขจัดของคานจริงที่เกิดขึ้นที่ฐานรองรับซึ่งเป็นผลลัพธ์ของทฤษฎีที่ 1 และ2 ดังแสดงในภาพที่ 6.42 ฐานรองรับแบบหมุดหรือล้อเลื่อนที่ปลายของคานจริงมีค่าระยะการเสียภาพหรือระยะการโก่งตัวหรือระยะการขจัดเป็นศูนย์ แต่คานจะมีความลาดชัน ดังนั้น จากทฤษฎีที่ 1 และ2 คานเสมือนที่ถูกรองรับด้วยหมุด เนื่องจากฐานรองรับมีโมเมนต์ดัดเป็นศูนย์ที่มีแรงเฉือนหรือแรงปฏิกิริยาที่จุดนั้น และถ้าคานจริงที่ถูกรองรับแบบยึดติดแน่นกับที่แสดงในฐานรองรับชนิดที่ 3 ทั้งค่าความลาดชันและระยะการเสียภาพหรือระยะการโก่งตัวหรือระยะการขจัดที่ฐานรองรับจะมีค่าเป็นศูนย์ และสมมุติให้คานเสมือนมีปลายเป็นอิสระเนื่องจากที่ปลายนี้มีค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดเป็นศูนย์นั้นเอง ถ้าฐานรองรับของคานเสมือนและคานจริงสอดคล้องกัน ได้แสดงไว้ในภาพที่ 6.42 ตัวอย่างเช่น คานจริง (Real Beam) และคานเสมือน (Conjugate Beam) ได้แสดงไว้ในภาพที่ 6.42 โดยทั่วไปแล้ว จะไม่คิดผลของแรงตามแนวแกน คานจริงมีดีเทอร์มิเนท (Determinate Real Beam) แบบสถิตศาสตร์ก็จะเปลี่ยนไปเป็นคานเสมือนดีเทอร์มิเนท (Determinate Conjugate Beam) แบบสถิตศาสตร์เช่นกัน และคานจริงชนิดอินดีเทอร์มิเนท (Indeterminate Real Beam) แบบสถิตก็จะเป็นคานเสมือนชนิดอินดีเทอร์มิเนท (Indeterminate Conjugate Beam) เช่นกัน ดังแสดงในภาพ 4.42 ซึ่งคานเสมือนจะเป็นคานที่ไม่มีเสถียรภาพ ถึงแม้เหตุการณ์นี้เกิดขึ้นแต่แรงกระทำที่เกิดขึ้นจากผัง $\frac{M}{EI}$ จะทำให้คานเกิดความสมดุลบนคานเสมือนนั้นเอง และคานเสมือนนี้จะมีเสถียรภาพโดยอัตโนมัติ ดังนั้น เมื่อเปลี่ยนคานให้เป็นคานเสมือนแล้วจึงไม่จำเป็นต้องคำนึงถึงความมีเสถียรภาพของคาน (R.C.Hibbelerh Russell ,2545:236)

ส่วนความสัมพันธ์ระหว่างคานจริงกับคานเสมือนที่รองรับของคานจริงกับที่รองรับของคานเสมือนแบบต่างๆ เป็นต้นว่า เมื่อที่รองรับของคานจริงเป็นแบบยึดหมุน (Simple Support) ซึ่งค่าของมุมลาดเอียงไม่เท่ากับศูนย์แต่การโก่งตัวที่ฐานรองรับเท่ากับศูนย์ ที่รองรับของคานเสมือนจึงเป็นแบบยึดหมุน ทั้งนี้เพราะว่าคานเสมือนที่มีที่รองรับแบบนี้ ค่าของแรงเฉือนไม่เท่ากับศูนย์ แต่ค่าของโมเมนต์รอบจุดรองรับเป็นศูนย์ เป็นต้น (วินิต ช่อวิเชียร,2527:32)

6.3.2 วิธีการสำหรับวิเคราะห์ (Procedure of Analysis)

ขั้นตอนดังกล่าวนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการที่ใช้หาระยะการเสียรูปหรือการโก่งตัวและระยะการขจัดและค่าความลาดชันที่จุดที่อยู่บนภาพเส้นโค้งที่แสดงพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นของคาน โดยใช้วิธีคานเสมือน

6.3.3 หลักการของคานเสมือน (Conjugate Beam)

ในกาวาดภาพคานเสมือนจากคานจริง คานนี้จะมีความยาวเท่ากับคานจริง และมีฐานรองรับที่สอดคล้องกันดังแสดงในภาพที่ 6.42 โดยทั่วไปถ้าฐานรองรับจริงมีค่าความชันฐานรองรับของคานเสมือนจะมีแรงเฉือน และถ้าฐานรองรับจริงมีระยะการขจัด ฐานรองรับของคานเสมือนจะเป็นค่าโมเมนต์ดัด คานเสมือนจะถูกกระทำด้วยแรงเทียบเท่าจากผังของ $\frac{M}{EI}$ ของคนจริง แรงกระทำดังกล่าวนี้จะถูกสมมุติว่ากระจายอยู่บนคานเสมือนมีทิศพุ่งขึ้น เมื่อ $\frac{M}{EI}$ มีค่าเป็นบวก จะมีทิศทางพุ่งลงเมื่อ $\frac{M}{EI}$ มีค่าเป็นลบ เป็นต้น

สอดคล้องกันกับของอำนวย พานิชกุล (2527:32) กล่าวว่าเมื่อคานเสมือน (Conjugate Beam) มีน้ำหนักกระทำเป็น $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรม ซึ่ง $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมนี้ได้จากคานจริง (Real Beam) ค่าของแรงเฉือนที่จุดใดๆ บนคานเสมือนนี้จะมีค่าเท่ากับมุมลาดเอียง (Slope) ที่จุดนั้นของคานจริง และค่าของโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ บนคานเสมือนนี้จะมีค่าเท่ากับระยะการโก่งตัว (Deflection) ที่จุดนั้นของคานจริง

6.3.4 การสมดุล (Equilibrium)

ใช้สมการสมดุลเพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของคานเสมือน แล้วพิจารณาหาตำแหน่งที่ต้องการทราบค่าความลาดชัน θ และระยะการขจัด Δ ของคานจริง แล้วทำการตัดภาค ตัดที่ตำแหน่งเดียวกันที่คานเสมือน และตรงภาคตัดจะมีแรงเฉือนที่ยังไม่ทราบค่า V' และโมเมนต์ดัด M' ที่กระทำในทิศทางที่เป็นบวก คำนวณหาค่าของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดดังกล่าวนั้น โดยใช้สมการสมดุลจะได้ค่า V' และ M' ซึ่งมีค่าเท่ากับ θ และ Δ ของคานจริงตามลำดับ โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้าค่าทั้งสองดังกล่าวนี้มีค่าเป็นบวก ความชันจะมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและระยะการขจัดหรือระยะการโก่งตัวจะมีทิศทางพุ่งขึ้น เป็นต้น

6.3.5 ลำดับการคำนวณ

6.3.5.1 จากโจทย์ที่กำหนดให้ คำนวณหาแรงปฏิกิริยาต่างๆ และเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์

6.3.5.2 เขียน $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรม

6.3.5.3 ใช้ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมที่ได้จากขั้นตอนที่ 6.2.6.2 เป็นน้ำหนัก (Elastic Weight) กระทำบนคานเสมือนซึ่งมีความยาวเท่ากับความยาวของคานจริง ที่รองรับของคานเสมือนจะหาได้จากความสัมพันธ์ระหว่างคานจริงกับคานเสมือนตามภาพที่ 6.42

6.3.5.4 คำนวณหาแรงปฏิกิริยาในคานเสมือน เนื่องจาก (Elastic Weight) นี้

6.3.5.5 คำนวณหาค่าของมุมลาดเอียง และระยะการโก่งตัวตามโจทย์ที่ต้องการ โดยที่มุมลาดเอียงจุดใดบนเส้นโค้งอิลาสติคของคานจริง มีค่าเท่ากับแรงเฉือนที่จุดนั้นของคานเสมือน และระยะการโก่งตัวที่จุดใดบนเส้นโค้งอิลาสติคของคานจริงมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัดที่จุดนั้นของคานเสมือน

6.3.6 เครื่องหมาย

สำหรับเครื่องหมายในการคำนวณหาคานจริงกับคานเสมือน ดังนี้

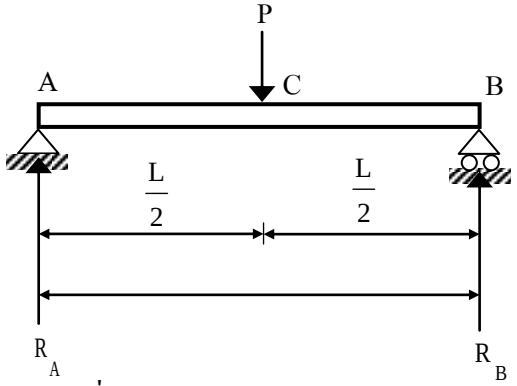
6.3.6.1 โมเมนต์ไดอะแกรมที่มีค่าเป็นบวกจะเขียนอยู่ด้านบนด้านรับแรงอัดของคานจริงเสมอ

6.3.6.2 ค่าบวกของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมจากคานจริง จะเป็น (Elastic Weight) กระทำขึ้นไปบนคานเสมือน

6.3.6.3 ถ้าโมเมนต์ดัดของคานเสมือนมีค่าเป็นบวก (ทำให้ด้านบนของคานรับแรงอัด) แสดงว่าการโก่งตัวของจุดบนเส้นโค้งอีลาสติคอยู่เหนือคร์อด

6.3.6.4 ถ้าแรงเฉือนในคานเสมือนมีค่าเป็นบวก แสดงว่ามุมลาดเอียงของจุดบนเส้นโค้งอิลาสติคหมุนทวนเข็มนาฬิกา จากซ้ายไปขวา

ตัวอย่างที่ 6.12 จงคำนวณหามุมลาดที่ฐานรองรับและการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างของคาน AB EI มีค่าคงที่ โดยมีนำหนักกระทำแรงดังแสดงในภาพที่ 6.43



ภาพที่ 6.43 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง

ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537:41)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางช่วงพาดที่แกนสมมาตรผ่านพอดี ถ้าลากเส้นสัมผัสจะอยู่ในแนวราบ ดังภาพภาพที่ 6.43

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times L - P \times \frac{L}{2} = 0$$

$$R_A \times L - \frac{PL}{2} = 0$$

$$R_A = +\frac{PL}{L2}$$

$$\therefore R_A = +\frac{P}{2} \uparrow^{+}$$

$$-R_B \times L + P \times \frac{L}{2} = 0$$

$$-R_B \times L + \frac{PL}{2} = 0$$

$$+\frac{PL}{2} = -R_B \times L$$

$$\therefore R_B = +\frac{P}{2} \uparrow^{+}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

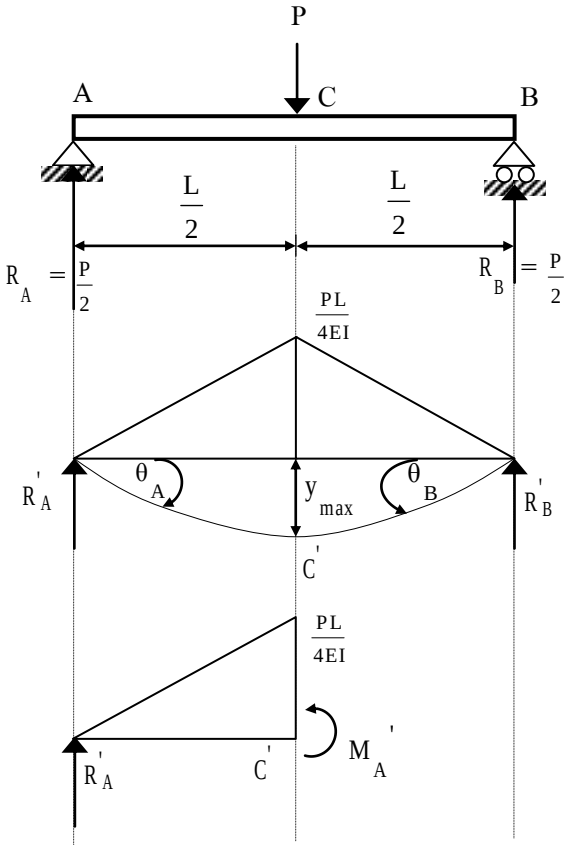
$$R_A + R_B - P = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ $\frac{PL}{2}$

$$R_A + \frac{PL}{2} - P = 0$$

$$R_A - \frac{PL}{2} = 0$$

$$\therefore R_A = +\frac{P}{2} \uparrow^{+}$$



ภาพที่ 6.44 แนวการโก่งตัวของคานเสมือน

ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537:41)

เนื่องจากการสมมาตรทั้งโครงสร้างและน้ำหนักบรรทุก ในการคำนวณหาค่ามุมลาดเอียงและการโก่งตัวของคานที่มีน้ำหนักลงเป็นจุด (Point Load) มีรายละเอียด ดังนี้

θ_A = แรงเฉือนของคานเสมือน ซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด A

$$\theta_A - R_A = (\frac{1}{2}) \times \frac{PL}{4EI})(\frac{L}{2})$$

$$\therefore \theta_A = \frac{PL^2}{16EI} +\circlearrowleft$$

$$\therefore \theta_B = \frac{PL^2}{16EI} \circlearrowright -$$

การโก่งตัวสูงสุดจะเกิดที่จุด C (กึ่งกลางคาน)

y_{max} = แรงดัดของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด C'

$$= M'_C$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A'

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C' ; $\Sigma M'_C = 0$

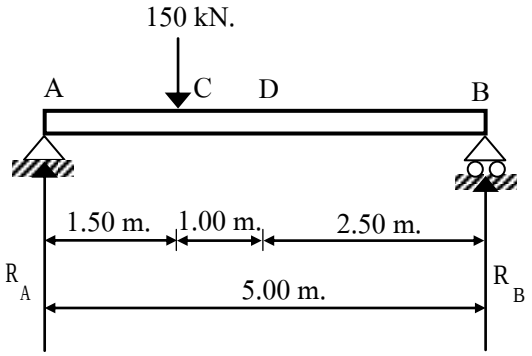
$$(\frac{1}{2})(\frac{PL}{4EI})(\frac{L}{2})(\frac{1}{3}\times\frac{L}{2}) + M'_C = (\frac{PL^2}{16EI})(\frac{L}{2})$$

$$M'_C = \frac{PL^3}{32EI} - \frac{PL^3}{96EI}$$

$$\therefore\ M'_C = \frac{PL^3}{48EI}$$

การโก่งตัวสูงสุด $y_{max} = \frac{PL^3}{48EI}$

ตัวอย่างที่ 6.13 จงคำนวณหามุมลาดที่ฐานรองรับและการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างของคาน AB EI มีค่าคงที่ โดยมีน้ำหนักกระทำแรงดังแสดงในภาพที่ 6.45



ภาพที่ 6.45 คานอย่างง่าย

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:268)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางช่วงพาดที่แกนสมมาตรผ่านพอดี ถ้าลากเส้นสัมผัสจะอยู่ในแนวราบ ดังภาพภาพที่ 6.46

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 150 \times 3.50 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 525 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 0$$

$$R_A = \frac{525}{5.00}$$

$$\therefore R_A = 105 \text{ kN.}$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$

$$-R_B \times 5.00 + 150 \times 1.50 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 + 225 = 0$$

$$-R_B \times 5.00 = 0$$

$$-R_B = \frac{225.00}{5.00}$$

$$\therefore R_B \quad 45 \text{ kN.}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0 \uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_A + R_B - 150 = 0$$

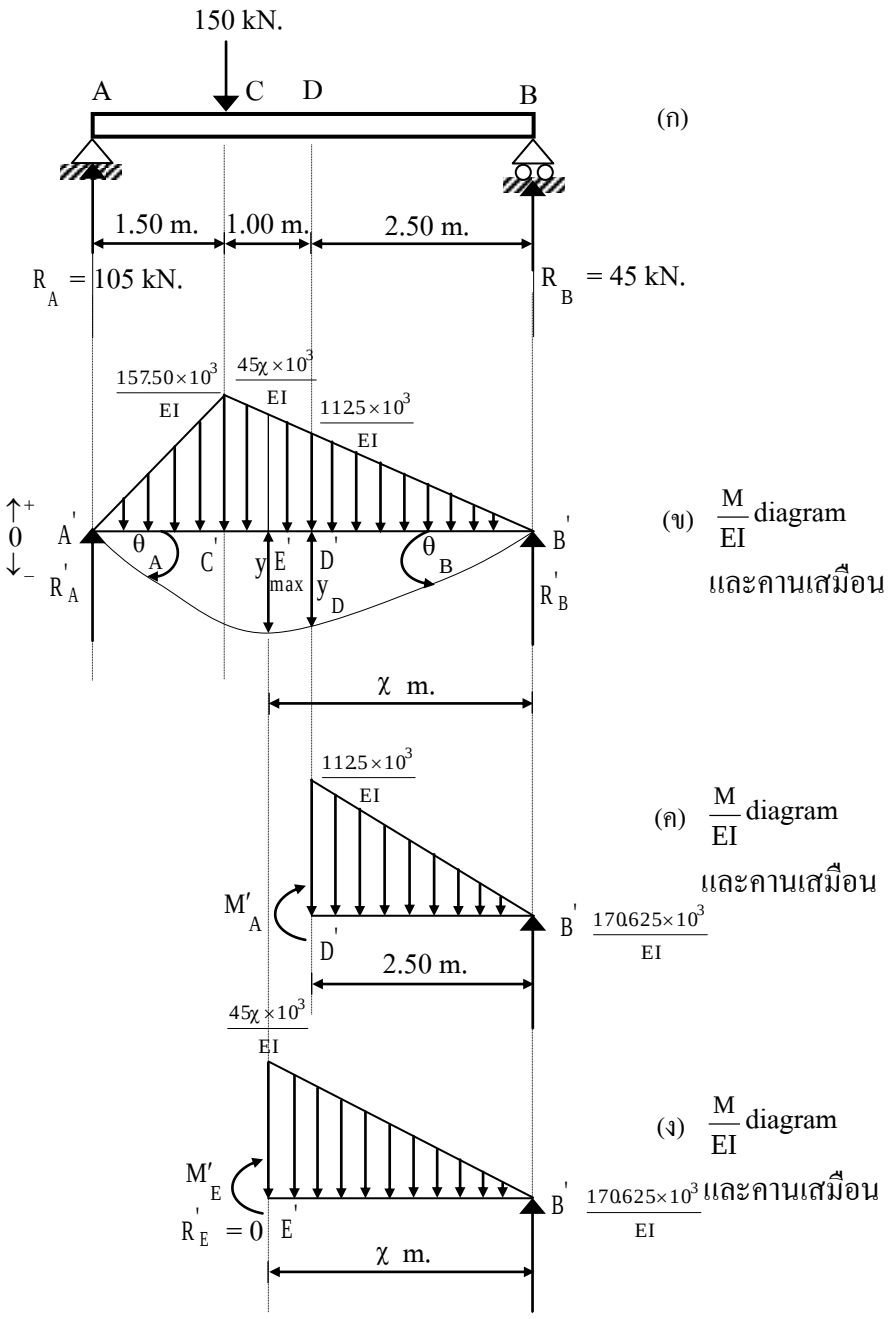
ดังนั้น R_B เท่ากับ 45 kN.

$$45 + R_A - 150 = 0$$

$$R_A - 105 = 0$$

$$\therefore R_A = 105 \text{ kN.} \uparrow^{+}$$

เขียน Free body Diagram ของโครงสร้างคาน ดังนี้



ภาพที่ 6.46 คานอย่างง่าย

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:269)

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B'

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A' ; $\Sigma M'_A = 0$

$$R'_B \times 5.00 = \left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{157.50\times10^3}{EI}\right)(1.50)\left(\frac{2}{3}\times1.50\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\frac{157.50\times10^3}{EI}\right)(3.50)\left(1.50+\frac{1.00}{3}\times3.50\right)\right\}$$

$$\therefore\ R'_B = \frac{170.625\times10^3}{EI}\ \text{kN-m}^2\ \uparrow^+$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0\ \uparrow^+\ \downarrow_-$

$$R'_A = \left(\frac{1}{2}\times\frac{157.50\times10^3}{EI}\right)(5.00)-\left(\frac{170.625\times10^3}{EI}\right)$$

$$\therefore\ R'_A = \frac{223.125\times10^3}{EI}\ \text{kN-m}^2\ \uparrow^+$$

θ_A = แรงเฉือนของคานเสมือน ซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด A

หรือ $\theta_A = R_A$

$$= \frac{223.125\times10^3}{(196\times10^9)(1.6\times10^{-4})}$$

$$= 7.115\times10^{-3}\ \text{rad}$$

$\therefore\ \theta_A = 0.408$ องศา $^+\circlearrowleft$

θ_B = แรงเฉือนของคานเสมือน ซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด A

หรือ $\theta_B = R'_B$

$$= \frac{170.625\times10^3}{(196\times10^9)(1.6\times10^{-4})}$$

$$= 5.441\times10^{-3}\ \text{rad}$$

$\therefore\ \theta_B = 0.312$ องศา $\circlearrowright^-$

การโก่งตัวที่จุด D (y_D) จะได้ รายละเอียด ดังนี้

y_D = แรงดัดของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด D'

$y_D = M'_D$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B'

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D' ; $\Sigma M'_D = 0$

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{112.50\times10^3}{EI}\right)(2.50)\left(\frac{1}{3}\times2.50\right)+M'_D = \left(\frac{170.625\times10^3}{EI}\right)(2.50)$$

$$M'_D = \frac{309.375\times10^3}{(196\times10^9)(1.6\times10^{-4})}$$

$$\therefore\ M'_D = 9.865\times10^{-3}\ \text{m.}$$

การโก่งตัวสูงสุด $y_D = 9.865\times10^{-3}\ \text{m.}$

ให้การโก่งตัวสูงสุด (y_{max}) เกิดที่จุด E ห่างจากจุด B เป็นระยะ χ m.

จาก θ_E = แรงเฉือนของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด E'

$y_D = R'_E$

แต่จุดที่มีการโก่งตัวสูงสุดจะมีมุมลาดเอียงเป็นศูนย์

$\theta_E = R'_E = 0$

จากภาพที่ (ง) จะได้ ดังนี้

$R'_E = 0$ ในเมื่อพื้นที่ของภาพสามเหลี่ยม

$$(\frac{1}{2}\times\frac{45\times10^3}{EI})(\chi) = \frac{170.625\times10^3}{EI}$$

$$\chi = 2.754\ \text{m.}$$

y_{max} = แรงดัดของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ diagram ที่จุด E'

$y_{max} = M'_E$

จากภาพที่ (ง) คานอย่างง่ายจะได้ รายละเอียด ดังนี้

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B'

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D' ; $\Sigma M'_D = 0$

$$(\frac{1}{2}\times\frac{45\times2.754\times10^3}{EI})(2.754)(\frac{1}{3}\times2.754) + M'_E = (\frac{170.625\times10^3}{EI})(2.754)$$

$$M'_E = \frac{313.243\times10^3}{(196\times10^9)(1.6\times10^{-4})}$$

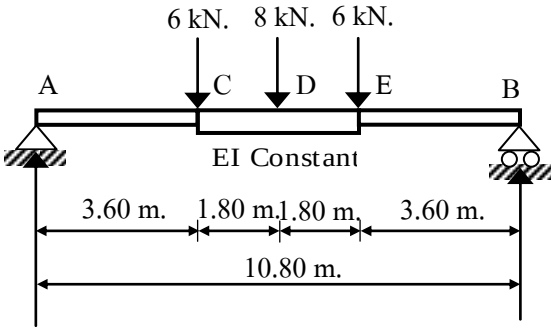
$$\therefore\ M'_E = 9.989\times10^{-3}\ \text{m.}$$

การโก่งตัวสูงสุด $y_{max} = 9.865\times10^{-3}\ \text{m.}$

หมายเหตุ ในการใช้วิธีคานเสมือน เพื่อคำนวณหามุมความลาดและการโก่งตัวสูงสุดของเส้นโค้งที่ยืดหยุ่นของคาน ณ ตำแหน่งใดๆ ของคานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam) จะสะดวกที่สุด

ดังนั้น มุมความลดเอียง θ_A เท่ากับ 0.408 องศา θ_B เท่ากับ 0.312 องศา **ตอบ**
และ θ_E เท่ากับ 0 ส่วนการโก่งตัว y_D เท่ากับ 9.865×10^{-3} m.
และ y_{max} เท่ากับ 9.865×10^{-3} m.

ตัวอย่างที่ 6.14 จงคำนวณหาระยะการเสียภาพหรือระยะการโก่งตัวที่ระยะจุดศูนย์กลางที่จุด D จากคานเชิงประกอบ ทำจากคานต่อเนื่องและเสริมความแข็งแกร่งที่ส่วนกลางด้วยโลหะแผ่นบางนำมาครอบที่ผิวบนและล่าง ทำให้มีโมเมนต์ความเฉื่อยมากขึ้น โดยกำหนดให้ EI คงที่ ดังแสดงในภาพที่ 6.47



ภาพที่ 6.47 คานประกอบ
ที่มา : YUAN-YU HSIEH (1995:98-99)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด C ซึ่งเป็นคานยื่น ดังภาพภาพที่ 6.47

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 10.80 - 6\times 7.20 - 8\times 5.40 - 6.00\times 3.60 = 0$$

$$R_A \times 10.80 - 108 = 0$$

$$R_A = \frac{108}{10.80}$$

$$\therefore R_A = 10 \text{ kN.}$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

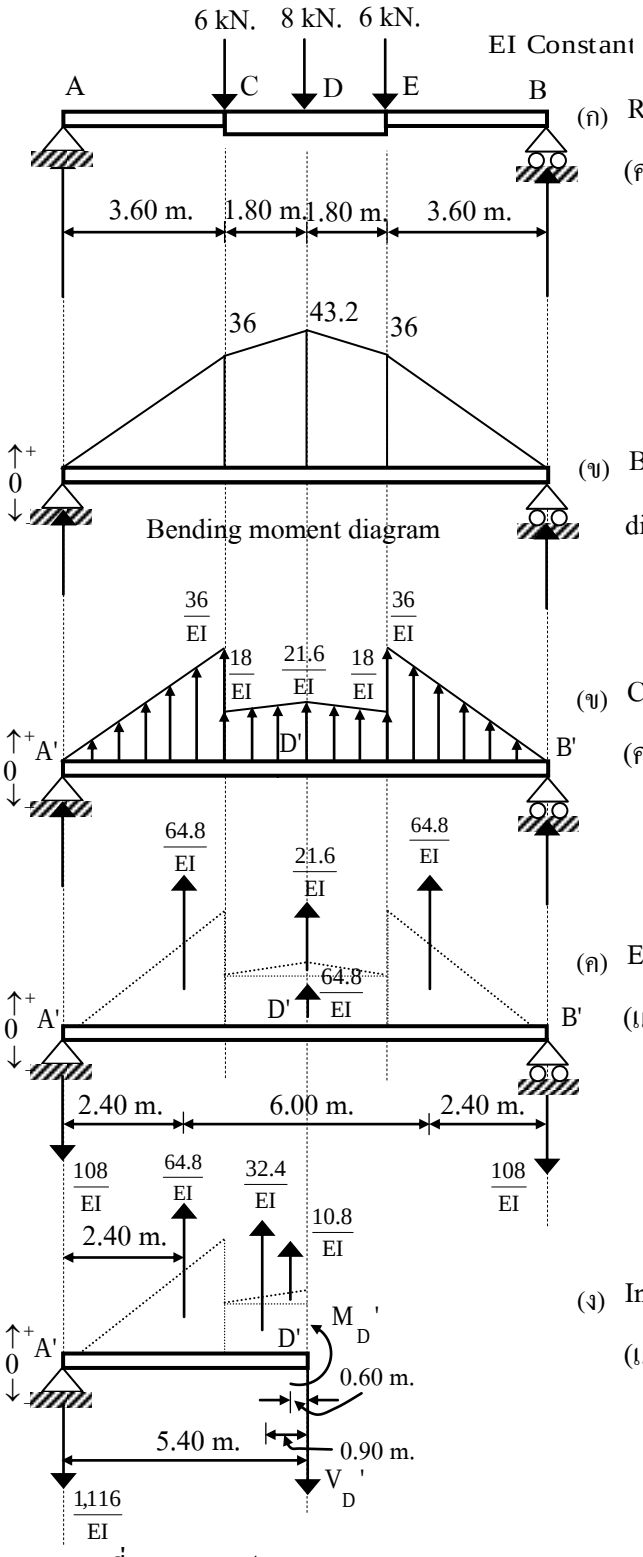
ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 10.80 + 6\times 7.20 + 8\times 5.40 + 6.00\times 3.60 = 0$$

$$-R_B \times 10.80 + 108 = 0$$

$$-R_B = \frac{108}{10.80}$$

$$\therefore R_B = 10 \text{ kN.}$$



(ก) Real beam (คานจริง)

(ข) Bending moment diagram (kN.-m)

(ข) Conjugate beam (คานเสมือน)

(ค) External reaction force (แรงปฏิกิริยาภายนอก)

(ง) Internal reaction force (แรงปฏิกิริยาภายนอก)

ภาพที่ 6.48 คานประกอบ

ที่มา : YUAN-YU HSIEH (1995:98-99)

โมเมนต์ดัดภายในที่จุด D' มีค่าเท่ากับระยะการขจัดของหมุด D ดังนี้

$$\Sigma M'_D = 0 \quad {}^{+}\circlearrowleft{}^{-}$$

$$\frac{108}{EI}\times 5.40 - \frac{64.8}{EI}\times 3.00 - \frac{32.4}{EI}\times 0.90 = 0$$

$$-\frac{10.8}{EI}\times 0.60 + M'_C$$

$$\frac{353.16}{EI} + M'_D = 0$$

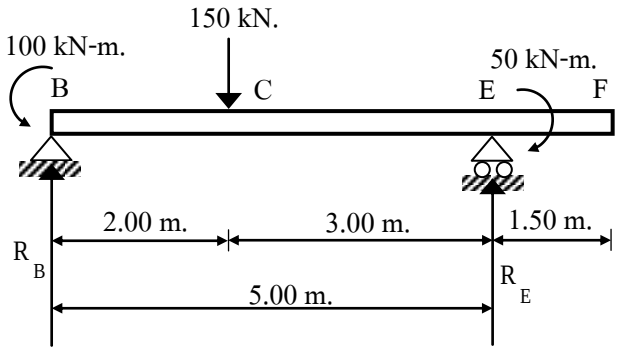
$$M'_D = -\frac{353.16}{EI}$$

$$y'_C = M'_D = -\frac{353.16}{EI}$$

$$\therefore\ y'_D = -\frac{353.16}{EI}\downarrow_{-}$$

ดังนั้น การโก่งตัวที่จุด y'_D แล M'_D เท่ากับ $-\frac{353.16}{EI}\downarrow_{-}$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6.15 จงคำนวณหามุมลาดเอียงที่จุด B,C,E และ F ระยะการโก่งตัวที่จุด Cและ F โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้คานมี EI คงที่ตลอด ดังแสดงในภาพที่ 6.49



ภาพที่ 6.49 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:373)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะโก่งตัวสูงสุดเกิดที่จุด D ตำแหน่งและขนาดของการโก่งตัวที่มากที่สุด ดังภาพภาพที่ 6.49

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด E ; $\Sigma M_E = 0 \quad {}^{+}\circlearrowleft{}^{-}$

$$R_B \times 5.00 - 150\times 3.00 - 100 + 50 = 0$$

$$R_B \times 5.00 - 500 = 0$$

$$R_B \times 5.00 = 0$$

$$R_B = \frac{500}{5.00}$$

$$\therefore R_B = 100 \text{ kN.}$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$-R_E \times 5.00 + 150 \times 2.00 + 50 - 100 = 0$$

$$-R_E \times 5.00 + 250 = 0$$

$$-R_E \times 5.00 = -250$$

$$-R_E = \frac{250}{5.00}$$

$$\therefore R_E \quad 50 \text{ kN.}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

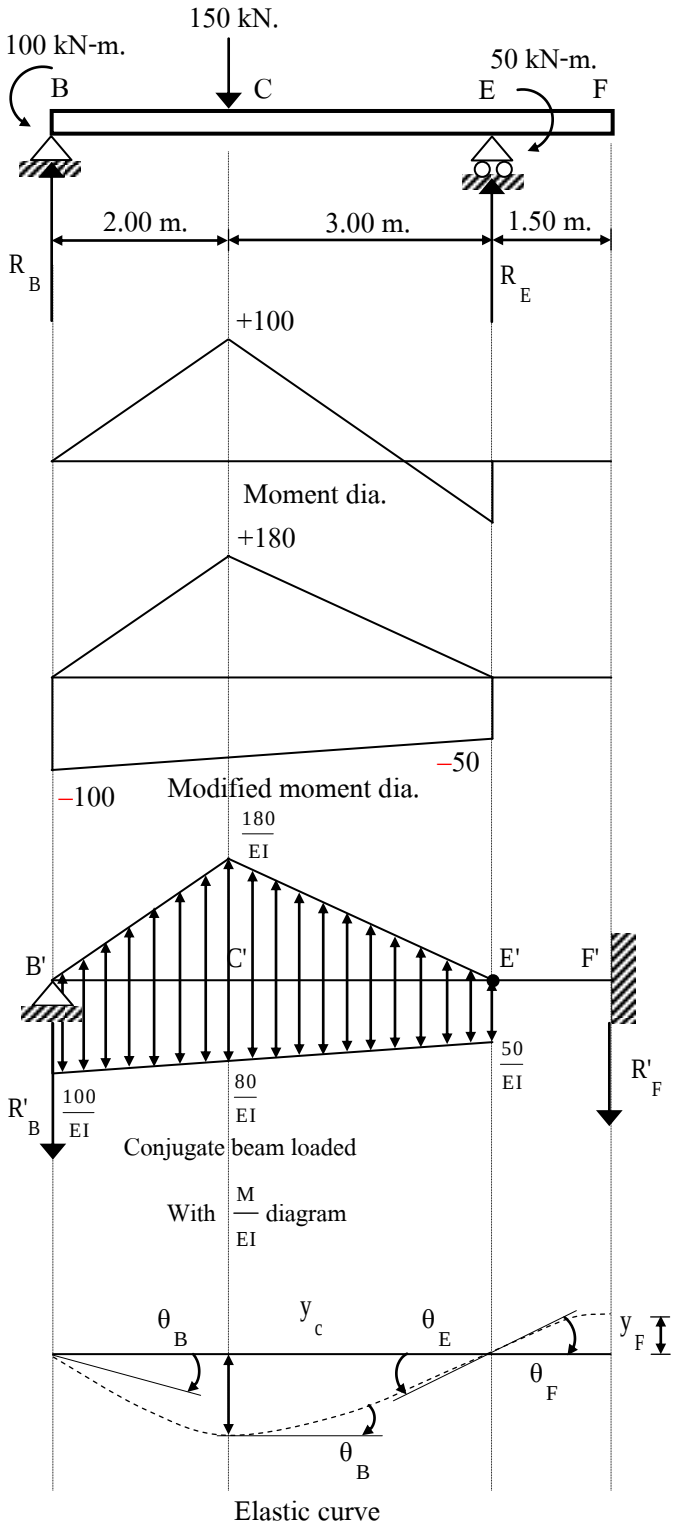
$$R_E + R_B - 150 = 0$$

ดังนั้น R_B เท่ากับ 100 kN.

$$100 + R_E - 150 = 0$$

$$R_E - 50 = 0$$

$$\therefore R_E = 50 \text{ kN. } \uparrow^{+}$$



ภาพที่ 6.50 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง

ที่มา : อำนวย พาณิชกุล (2528:36-38)

สำหรับช่วงคาน B' และ E'

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B'

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด E' ; $\Sigma M_{E'} = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 - (\frac{1}{6} \times \frac{100}{EI})(5.00)(\frac{2}{3} \times 5.00) - = 0$$

$$(\frac{1}{2} \times \frac{50}{EI})(5.00)(\frac{5}{3}) + (\frac{1}{2} \times \frac{180}{EI})(3.00)(\frac{2}{3} \times 3.00)$$

$$+ (\frac{1}{2} \times \frac{180}{EI})(2.00)(\frac{2}{3} + 3.00)$$

$$-R_B = -\frac{500}{3EI} - \frac{125}{EI} + \frac{108}{EI} + \frac{132}{EI}$$

$$\therefore R_B = \frac{95}{3EI} \downarrow$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด E' B'

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B' ; $\Sigma M_{B'} = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-V_E \times 5.00 - (\frac{1}{2} \times \frac{100}{EI})(5.00)(\frac{5}{3}) - = 0$$

$$(\frac{1}{2} \times \frac{50}{EI})(5.00)(\frac{2}{3} \times 5.00) + (\frac{1}{2} \times \frac{180}{EI})(2.00)(\frac{2}{3} \times 2.00)$$

$$+ (\frac{1}{2} \times \frac{180}{EI})(3.00)(\frac{3}{3} + 2.00)$$

จะได้ $-V_E = -\frac{250}{3EI} - \frac{205}{EI} + \frac{48}{EI} + \frac{162}{EI}$

$$\therefore R_B = \frac{130}{3EI} \downarrow$$

สำหรับช่วงคาน E' และ F' $= R'_F = \frac{130}{3EI} \downarrow$

จากวิธี Conjugate Beam รายละเอียด ดังนี้

$$\theta_B = R'_B = \frac{95}{3EI}$$

$$V_C = -\frac{95}{3EI} + (\frac{1}{2} \times \frac{180}{EI})(2.00) - (\frac{1}{2} \times (\frac{100}{EI} + \frac{80}{EI})(2.00)$$

$$\therefore V_C = -\frac{95}{3EI} \downarrow$$

$$\theta_C = \frac{95}{3EI} \curvearrowright^{+}$$

$$\therefore \theta_E = V'_E = \frac{130}{3EI} \curvearrowleft^{-}$$

$$\therefore \theta_F = R'_F = \frac{130}{3EI} \curvearrowleft^{-}$$

$$M'_C = (-\frac{2\times 95}{3EI}) + (\frac{1}{2}\times\frac{180}{EI}\times 2.00\times\frac{2.00}{3}) - (\frac{1}{2}\times\frac{100}{EI})(2.00)(\frac{2.00}{3}\times 2.00) - (\frac{1}{2}\times\frac{80}{EI}\times 2.00\times\frac{2.00}{3})$$

$$y_D = M'_D = -\frac{190}{3EI} - \frac{120}{EI} - \frac{400}{EI} - \frac{160}{EI}$$

$$= -\frac{130}{3EI}\downarrow_-$$

นั้นคือ $\therefore\ y_C = \frac{130}{3EI}\downarrow_-$

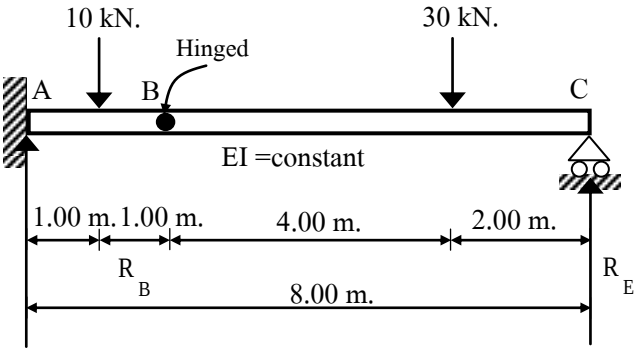
$$\therefore\ M'_F = \frac{130}{3EI}\times 1.50 = \frac{65}{EI}$$

นั้นคือ $\therefore\ y_F = \frac{65}{EI}\uparrow^+$

ดังนั้น การโก่งตัว y_C เท่ากับ $\downarrow_-$ โมเมนต์ที่ M'_F เท่ากับ $\frac{65}{EI}$ **ตอบ**

ส่วนการโก่งตัว y_F เท่ากับ $\frac{65}{EI}\uparrow^+$

ตัวอย่างที่ 6.16 จงคำนวณหาระยะการโก่งตัวที่มากที่สุดของคาน โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้คานมี EI คงที่ตลอด ดังแสดงในภาพที่ 6.51



ภาพที่ 6.51 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:37)

คำนวณแรงปฏิกิริยา เขียนไดอะแกรมและโมเมนต์ดัดและเขียนแนวการโก่งตัว ระยะการโก่งตัวสูงสุดตำแหน่งและขนาดของการโก่งตัวที่มากที่สุด ดังภาพภาพที่ 6.51

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 6.00 - 30 \times 2.00 = 0$$

$$R_B \times 6.00 - 60 = 0$$

$$R_B = \frac{60.00}{6.00}$$

$$\therefore R_B = 10 \text{ kN.} \uparrow^{+}$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 6.00 + 30 \times 4.00 = 0$$

$$-R_C \times 6.00 - 120 = 0$$

$$-R_C = \frac{120.00}{6.00}$$

$$\therefore R_C = 20 \text{ kN.} \uparrow^{+}$$

ตรวจสอบ $\Sigma F_y = 0$ $\uparrow^{+} \downarrow_{-}$

$$R_C + R_B - 30 = 0$$

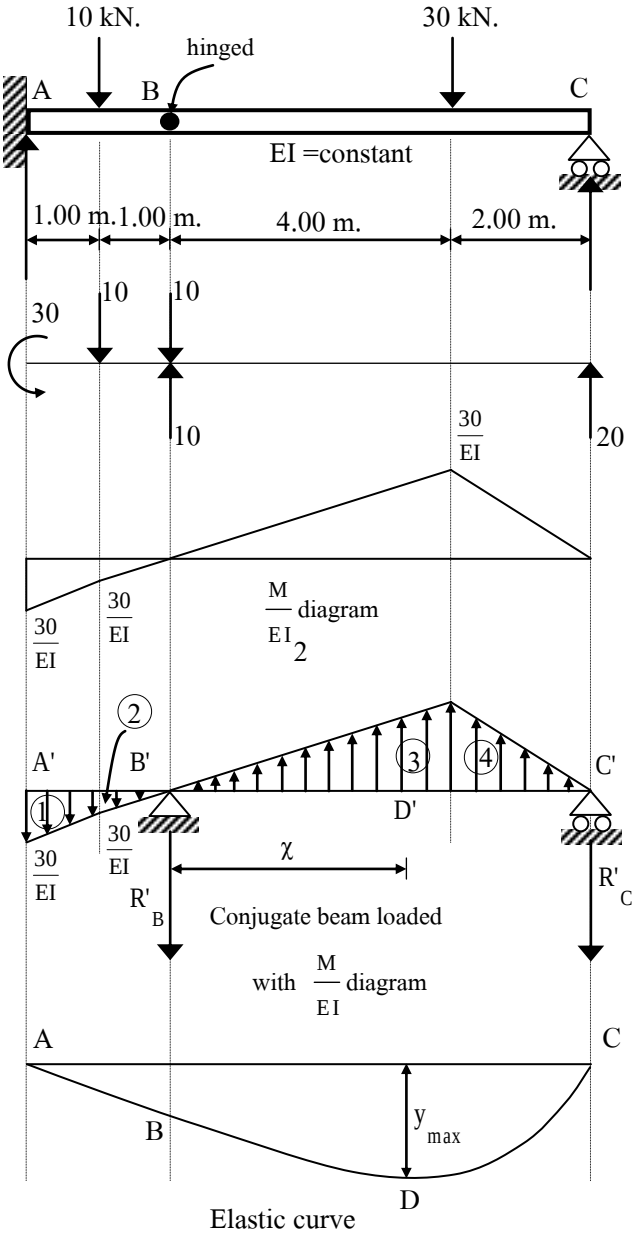
ดังนั้น R_B เท่ากับ 10 kN.

$$10 + R_C - 30 = 0$$

$$R_C - 10 = 0$$

$$\therefore R_C = 10 \text{ kN.} \uparrow^{+}$$

เขียน Free body Diagram ของโครงสร้างคาน ดังนี้



ภาพที่ 6.52 แนวการโก่งตัวของโครงสร้าง

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:37)

คำนวณหาพื้นที่ของคานเสมือน (Conjugate beam loaded with $\frac{M}{EI}$ diagram)

$$\text{พื้นที่ } 1 = \frac{1}{2}\times(\frac{40}{EI})(4.00) = \frac{80}{EI}$$

$$\text{พื้นที่ } 2 = \frac{1}{2}\times(\frac{10}{EI})(2.00) = \frac{10}{EI}$$

$$\text{พื้นที่ } 3 = \frac{1}{2}\times(\frac{30}{EI})(1.00) = \frac{15}{EI}$$

$$\text{พื้นที่ } 4 = \frac{1}{2}\times(\frac{40}{EI})(2.00) = \frac{40}{EI}$$

$\therefore$ น้ำหนักทั้งหมด บนคานเสมือน

$$= \frac{80}{EI}+\frac{40}{EI}+\frac{10}{EI}+\frac{15}{EI}$$

$$= \frac{95}{EI}\downarrow_{-}$$

หาแรงปฏิกิริยาที่จุด B' และ C' ของคานเสมือน

$$-R'_C = \{(\frac{1}{2}\times\frac{30}{EI})(3.00)+(\frac{40}{EI}\times\frac{14}{3})+(\frac{10}{EI}\times 1.00)+(\frac{15}{EI}\times\frac{5}{3})\}$$

$$= \frac{72.5}{EI}\downarrow_{-}$$

$$\therefore R'_B = \frac{95}{EI}-\frac{72.5}{EI} = \frac{22.5}{EI}\downarrow_{-}$$

สมมุติให้ D' เป็นจุดที่มีระยะโก่งมากที่สุด อยู่ห่างจากจุด B' เป็นระยะ X ดังนั้นค่าของแรงเฉือนที่จุด D' ต้องเท่ากับศูนย์

$$-\frac{10}{EI}-\frac{15}{EI}-\frac{22.5}{EI}+\frac{1}{2}(\chi)(10\chi) = 0$$

$$5X^2 = 47.5$$

$$X = 3.08 \text{ m.}$$

$$EIM'_D = -(15\times 4.75)-(10\times 4.08)-(22.50\times 3.08)+(\frac{1}{2}\times 3.08\times 3.08\times\frac{3.08}{2})$$

$$= -132.65$$

$\therefore$ ระยะโก่งมากที่สุด $= \frac{132.5}{EI}\downarrow_{-}$

ดังนั้น ระยะโก่งมากที่สุด เท่ากับ $\frac{1325}{EI}\downarrow_{-}$ **ตอบ**

บทสรุป

1. วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area method)

วิธีของพื้นที่โมเมนต์ขึ้นอยู่กับความสัมพันธ์ง่ายๆ ระหว่างการหมุนและโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ ของชิ้นส่วนที่รับแรงดัด ดังนี้

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

การเปลี่ยนมุมลาดในช่วงความยาวของคาน ดังนี้

$$\theta_{ba} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{M}{EI}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.1$$

สำหรับทฤษฎีพื้นที่โมเมนต์ข้อที่ 1 อาจกล่าว ดังนี้

$$D_{bc} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{M}{EI}dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6.2$$

1.1 ทฤษฎีของพื้นที่โมเมนต์ (Moment-Area)

1.1.1 ทฤษฎีที่1 มุมระหว่างเส้นสัมผัสจากจุดสองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติคหรือการเปลี่ยนของมุม จากจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติคไปยังอีกจุดหนึ่งบนเส้นโค้งอีลาสติคนี้จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองนั้น

$$\theta = \frac{M}{EI}dx$$

1.1.2 ทฤษฎีที่2 ระยะเคลื่อนที่ T_{AB} ของจุด B บนเส้นโค้งอีลาสติคซึ่งวัดตั้งฉากกับแนวเดิมของส่วนโครงสร้าง กับเส้นสัมผัสซึ่งลากสัมผัสจากจุด A บนเส้นโค้งอีลาสติคเดียวกันจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์รอบจุด B ของพื้นที่ของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมระหว่างจุดทั้งสองนั้น

$$t_{BA} = \frac{M}{EI}dx$$

E = คือ ค่าโมดูลัสยืดหยุ่นของวัตถุ (Modulus of Elasticity)

I = คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุ (Moment of Inertia)

EI = หมายถึงความแข็งแกร่งต่อแรงดัดของโครงสร้าง (Flexural Rigidity)

2. คานเสมือน (Conjugate Beam Method)

สำหรับพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นกับโมเมนต์ดัดภายในเพื่อแสดงความคล้ายคลึงกันจึงเขียนสมการเพื่อการเปรียบเทียบกันได้ ดังนี้ (R.C.Hibbelerh Russell ,2545:232)

คานจริง $(\frac{dv}{dx} = -w)$ คานจริง $\frac{d^2M}{dx^2} = -w)$

คานเสมือน $(\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} - w)$ คานเสมือน $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI})$

คานจริง $V = -\int wdx$ คานจริง $M = \int(-\int wdx)dx$

คานเสมือน $\theta = \int\left(\frac{M}{EI}\right)dx$ คานเสมือน $V = \int\left[\int\left(\frac{M}{dx}\right)dx\right]dx$

2.1 ทฤษฎีที่ 1 (Theorem1)

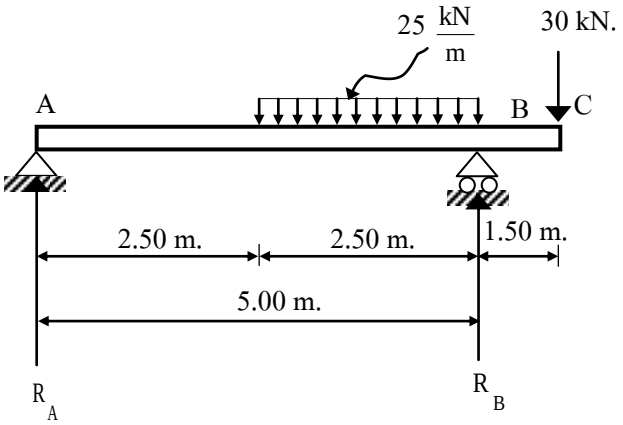
ค่าความลาดชันที่จุดที่ต้องการทราบค่าคานจริงมีค่าเท่ากับแรงเฉือนที่จุดเดียวกัน

2.2 ทฤษฎีที่ 2 (Theorem2)

ระยะการเสียภาพหรือระยะการโก่งตัวหรือระยะการขจัดของจุดที่ต้องการทราบค่าในคานจริงมีค่าเท่ากับโมเมนต์ที่จุดเดียวกันในคานเสมือน

แบบฝึกหัด

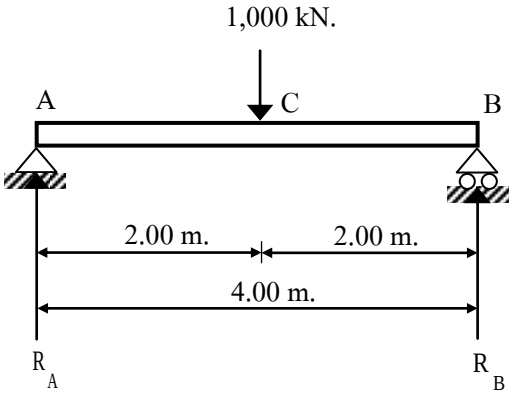
1. จงคำนวณหาการโก่งตัวที่จุด C และ D ของคาน โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area)
กำหนดให้ $E=19.6\times10^{6}\ \frac{N}{cm^2}$ และ $I=4.26\times10^{-5}\ m^4$ ดังแสดงในภาพที่ 6.53
(การโก่งตัวที่จุด C = 0.436 cm., A=0.376 cm.) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 6.53 คานยื่น (Cantilever Beam)
ที่มา : บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545:234)

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

2. จงคำนวณระยะการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างของคาน AB โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) ซึ่งมีน้ำหนักกระทำแรง 1,000 kN. กระทำที่กึ่งกลางช่วงพาด ดังแสดงในภาพที่ 6.54 ($AB = \frac{1,333.33}{EI}\downarrow$) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 6.54 คานช่วงเดียวธรรมดา

ที่มา : วทัชภศ เดชพันธ์ (2545:237)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

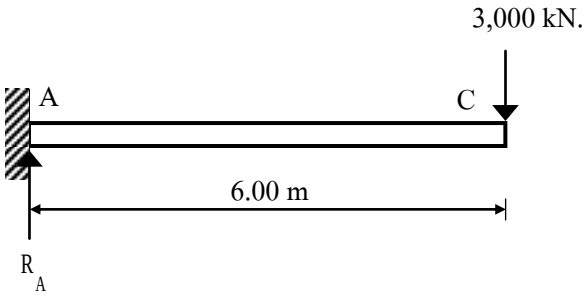
……

……

3. จงคำนวณหาความลาดชันหรือมุมลาดที่จุด B , C โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area)

กำหนดให้ $E = 2 \times 10^3 \frac{kN}{cm^2}$ $I = 600\ mm^4$ ของคานยื่น AB ดังแสดงในภาพที่ 6.55

(B = – 0.13 องศา , C = – 0.09 องศา)



ภาพที่ 6.55 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

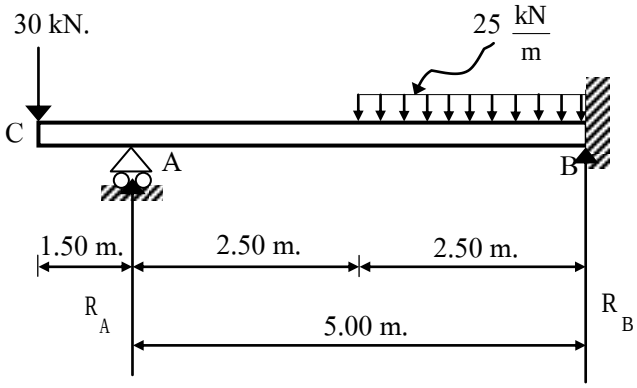
……

……

……

……

4. จงคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่แต่ละฐานรองรับของคานโดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) ในการวิเคราะห์ ดังแสดงในภาพที่ 6.57 (R_B = 42.490 kN.)



ภาพที่ 6.57 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:235)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

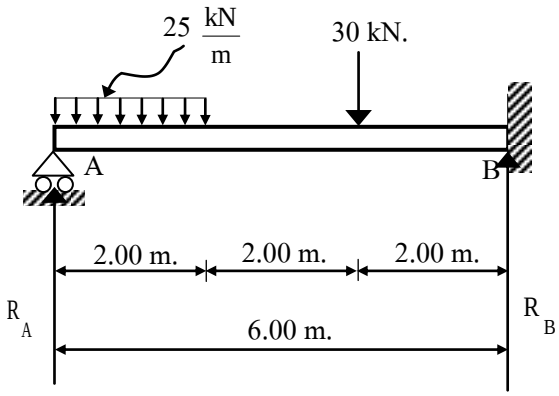
……

……

……

……

5. จงคำนวณหาค่าโก่งตัวสูงสุดของคานโดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) ในการวิเคราะห์ ดังแสดงในภาพที่ 6.58 ($y_{max} = t_{CB}$ เท่ากับ -4.886×10^{-3} m.)



ภาพที่ 6.58 การโก่งตัวของคานยึดแน่น

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2524:243)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

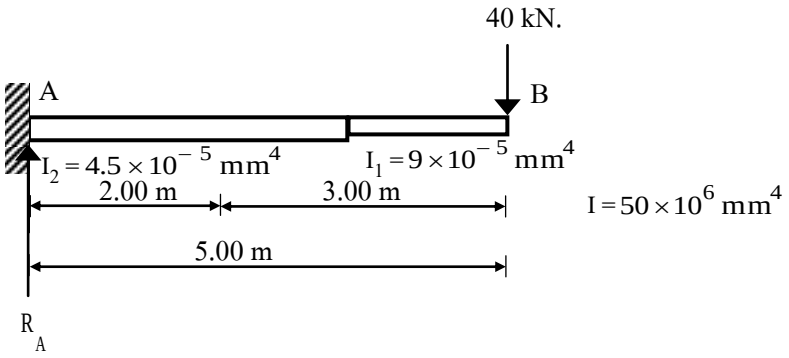
……

……

……

6. จงคำนวณหาค่าของมุมลาดและระยะการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างที่จุด B ของคานยื่น AB โดยใช้วิธีพื้นที่โมเมนต์ (Moment Area) กำหนดให้ $E = 20 \times 10^6 \frac{kN}{cm^2}$ ดังแสดงในภาพที่ 6.59

($\theta_B = -0.631$ และการโก่งตัว B = – 0.021 m.)



ภาพที่ 6.59 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : Wang, C.K. (1966:248)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

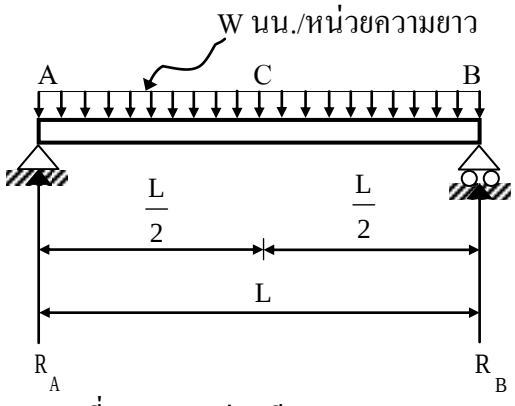
……

……

……

……

7. จงคำนวณหามุมลาดที่ฐานรองรับและการโก่งตัวสูงสุดของโครงสร้างของคานAB โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้ EI มีค่าคงที่ ซึ่งมีนำหนักกระทำแรงดังแสดงในภาพที่ 6.60 ($y_{max} = \frac{5WL^4}{384EI}$)



ภาพที่ 6.60 คานช่วงเดียวธรรมดา

ที่มา : บัญชา สุปรินายก (2537:41)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

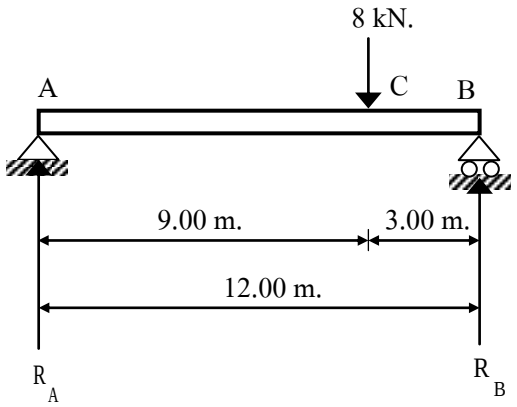
……

……

……

……

8. จงคำนวณหาระยะการโก่งตัวของโครงสร้างคาน AB โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้ EI มีค่าคงที่ซึ่งมีนำหนักกระทำแรงดังแสดงในภาพที่ 6.61 ($y'_{max} = -\frac{201.20}{EI} m^3 \downarrow$)



ภาพที่ 6.61 คานช่วงเดียวธรรมดา

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:167)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

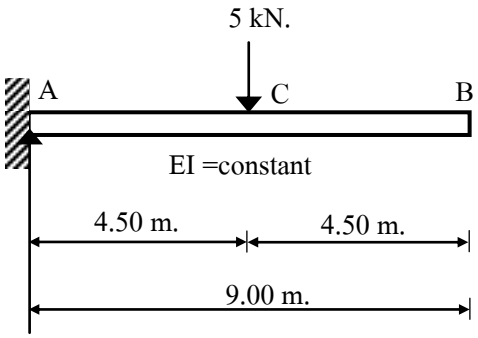
……

……

……

……

9. จงคำนวณหามุมลาดเอียงและระยะการโก่งตัวที่จุด B โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้คานมี EI คงที่ตลอด ดังแสดงในภาพที่ 6.62 ($\theta_B = -\frac{50.63}{EI}, y'_B = -\frac{379.73}{EI} \downarrow$)



ภาพที่ 6.57 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:292)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

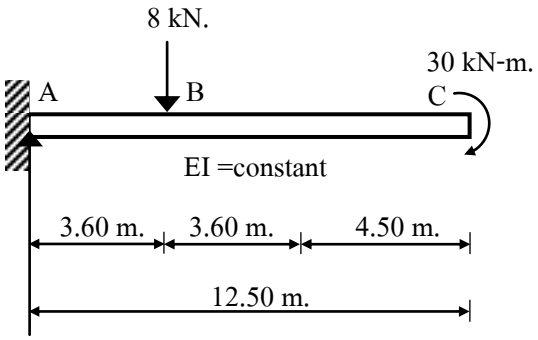
……

……

……

……

10. จงคำนวณหามุมลาดเอียงและระยะการโก่งตัวที่จุด B โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้คานมี EI คงที่ตลอด ดังแสดงในภาพที่ 6.63 ($\theta_{BR} = \frac{522}{EI}, \theta_{BL} = 0, y'_B = \frac{168924}{EI} \downarrow$)



ภาพที่ 6.57 การโก่งตัวของคานยื่น

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:294)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

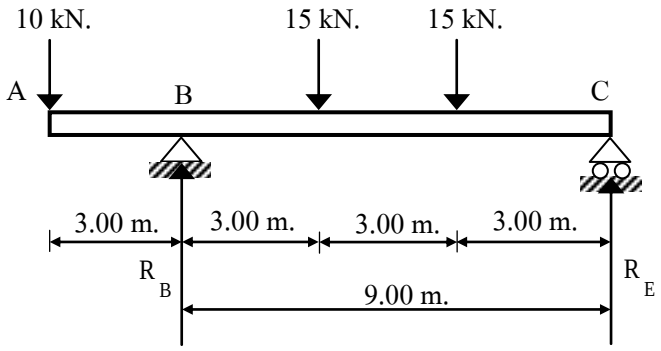
……

……

……

……

11. จงคำนวณหาการโก่งตัวที่จุด A และที่จุดกึ่งกลางของช่วง BC โดยวิธีคานเสมือน (Conjugate Beam) กำหนดให้คานมี EI คงที่ตลอด ดังแสดงในภาพที่ 6.64 ($y_A = -\frac{45}{EI}\uparrow^{+}, y_D = -\frac{905}{4EI}\downarrow_{-}$)



ภาพที่ 6.64 แนวการโก่งตัวของธรรมดาและคานยื่น
ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:126)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (✕) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. การวิเคราะห์การโก่งตัวของโครงสร้างโดยใช้วิธีพื้นที่ของโมเมนต์ วิธีนี้ใช้การเขียนภาพของเส้นโค้งอิลาสติคเข้าประกอบในการคำนวณ เพื่อหามุมลาดเอียงและระยะการโก่งตัว

..... 2. ถ้าระยะการโก่งตัวของจุดใดๆ ที่วัดจากเส้นสัมผัสมีค่าบวกแสดงว่าจุดนั้นอยู่ใต้เส้นสัมผัส

..... 3. สำหรับวิธีพื้นที่โมเมนต์แกน x มีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวาและแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้นข้างบน

..... 4. ถ้าไม่คำนึงถึงการยืดตัวของโครงสร้างอันเนื่องมาจากแรงตามแนวแกนแล้วเส้นโค้งอิลาสติคนี้จะมีความยาวเดิมของส่วนโครงสร้างนั้นเสมอ

..... 5. การกำหนดเครื่องหมายบวกของวิธีพื้นที่โมเมนต์สำหรับคานในส่วนของโมเมนต์ M จะมีค่าเป็นบวกเมื่อพยายามทำให้คานโก่งตัวขึ้น

..... 6. ใช้สมการสมดุลเพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของคานเสมือนแล้วพิจารณาหาตำแหน่งที่ต้องการทราบค่าความลาดชัน

..... 7. ในการวาดภาพของคานเสมือนจากคานจริง คานนี้จะมีความยาวเท่ากับคานจริงแล้วมีฐานรองรับที่ไม่สอดคล้องกัน

..... 8. ทฤษฎีที่2 ของคานเสมือนคือระยะการเสียภาพหรือการโก่งตัวหรือระยะการขจัดของจุดที่ต้องการทราบค่าในคานจริงจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ที่จุดหลายจุดในคานเสมือน

..... 9. ฐานรองรับของคานจริงเป็นแบบยึดหมุน ซึ่งค่าความลาดเอียงไม่เท่ากับศูนย์แต่การโก่งตัวที่ฐานรองรับเท่ากับศูนย์

..... 10. การหาระยะการเสียรูปภาพหรือการโก่งตัวและระยะขจัดและความลาดชันที่จุดที่อยู่ในรูปภาพเส้นโค้งที่แสดงพฤติกรรมแบบยืดหยุ่นของหยุ่นของคานโดยใช้วิธีของคานเสมือน

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 4 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องมากที่สุด คือข้อใด
   ก. เส้นแสดงการโก่งตัวจะต้องมีความโค้งไม่ต่อเนื่อง
   ข. การยึดที่ปลายของฐานรองรับสามารถช่วยในการเขียนเส้นโค้งอิลาสติคไม่ได้
   ค. วิธีคำนวณการเคลื่อนที่เนื่องจากแรงดัดของคานข้อแข็งใช้สำหรับโครงข้อหมุนไม่ได้
   ง. ข้อ ข และ ค ถูกต้อง
2. สำหรับทฤษฎีข้อที่1 สำหรับวิธีพื้นที่โมเมนต์ คือข้อใด
   ก. โมเมนต์และแรงเฉือนมีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวาและแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้น
   ข. ระยะการโก่งตัวเนื่องจากแรงดัด สามารถคำนวณโดยวัดจากเส้นสัมผัสอ้างอิง
   ค. การเปลี่ยนมุมลาดหรือระยะการโก่งตัวที่คำนวณโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์นี้วัดจากเส้นสัมผัสที่กำหนดขึ้นบนเส้นแสดงการเสียรูปทุกครั้ง
   ง. แกน x มีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวา และแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้นบน
3. สำหรับทฤษฎีข้อที่2 สำหรับวิธีพื้นที่โมเมนต์ คือข้อใด
   ก. โมเมนต์และแรงเฉือนมีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวาและแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้น
   ข. ระยะการโก่งตัวเนื่องจากแรงดัด สามารถคำนวณโดยวัดจากเส้นสัมผัสอ้างอิง
   ค. การเปลี่ยนมุมลาดหรือระยะการโก่งตัวที่คำนวณโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์นี้วัดจากเส้นสัมผัสที่กำหนดขึ้นบนเส้นแสดงการเสียรูปทุกครั้ง
   ง. แกน x มีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวา และแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้นบน
4. ความหมายของคานเสมือน คือข้อใด
   ก. เส้นแสดงการโก่งตัวจะต้องมีความโค้งต่อเนื่อง
   ข. สามารถคำนวณการโก่งตัวของโครงสร้างได้โดยไม่ต้องอาศัยการเขียนเส้นประและเส้นอิลาสติค
   ค. ในการเขียนแผนภาพเส้นโค้งอิลาสติคแสดงลักษณะการโก่งตัวเข้าช่วย
   ง. ใช้หาความลาดชันระยะการโก่งตัวของโครงสร้าง

5. ความหมายของคานเสมือน (Conjugate Beam) ข้อใดถูกต้อง
   ก. แรงเฉือนเทียบได้กับความลาดชัน θ
   ข. โมเมนต์ M เทียบได้กับระยะการโก่งตัว
   ค. ขนาดหรือระยะของการกระจายเทียบได้กับพื้นที่ภายใต้ผัง $\frac{M}{EI}$
   ง. ถูกต้องทุกข้อ
6. ข้อใดคือความหมายของการหามุมเอียงของเส้นยืดหยุ่นของคาน คือข้อใด
   ก. มุมลาดเอียงที่จุดใดๆ เท่ากับแรงดัดของคานเสมือนซึ่งรับ $\frac{M}{EI}$ ที่จุด A
   ข. การโก่งตัวของโครงสร้างที่จุดใดๆ เท่ากับแรงดัดซึ่งรับมุมความลาด
   ค. ค่าความลาดชันที่จุดที่ต้องการทราบค่าคานจริงมีค่าเท่ากับแรงเฉือนที่จุดเดียวกันในอาคาร
   ง. ข้อ ข และ ค ถูกต้อง
7. ความหมายของฐานรองรับของคานเสมือน คือข้อใด
   ก. ฐานรองรับแบบหมุดหรือล้อเลื่อนที่ปลายของคานจริงมีค่าการโก่งตัวเป็นหนึ่ง
   ข. ฐานรองรับแบบหมุดหรือล้อเลื่อนที่ปลายของคานจริงมีค่าการโก่งตัวเป็นศูนย์
   ค. คานจริงเป็นแบบหมุด (Pin) คานเสมือนจะเป็นอิสระ (Free)
   ง. คานจริงจะเป็นอิสระ (Free) คานเสมือนจะเป็นแบบบานพับ (Hinge)
8. ข้อใดคือหลักการของคานเสมือน คือข้อใด
   ก. โดยทั่วไปถ้าฐานรองรับจริงมีค่าความลาดชันที่ฐานรองรับของคานเสมือนจะเป็นโมเมนต์
   ข. ฐานรองรับคานเสมือนมีค่าความลาดชันที่ฐานรองรับของคานจริงจะเป็นแรงเฉือน
   ค. การวาดรูปภาพคานเสมือนจากคานจริง คานนี้จะมีความยาวเท่ากับคานจริงและมีฐานรองรับที่สอดคล้องกัน
   ง. ฐานรองรับคานจริงมีระยะการขจัดที่ฐานรองรับของคานเสมือนจะเป็นแรงเฉือน
9. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. โมเมนต์ไดอะแกรมที่มีค่าบวกจะเขียนอยู่ด้านล่าง ด้านรับแรงอัดของคานจริงเสมอ
   ข. ค่าของแรงเฉือนที่จุดใดๆ บนคานเสมือนนี้จะมีค่าเท่ากับมุมลาดเอียง (Slope) ที่จุดนั้นของคานจริง
   ค. ค่าของโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ บนคานเสมือนจะมีค่าเท่ากับระยะการโก่งตัวที่จุดนั้นของคานเสมือนเอง
   ง. แรงที่กระทำบนคานเสมือนจะกระจายอยู่บนคานมิทิศทางพุ่งไปทางซ้ายหรือทางขวาก็ได้

10. สำหรับเครื่องหมายของคานเสมือน คือข้อใด

ก. แรงเฉือนในคานเสมือนมีค่าเป็นบวก แสดงว่ามุมลาดเอียงของจุดบนเส้นโค้งอิลาสติคหมุนตามเข็มนาฬิกา

ข. ถ้าโมเมนต์ดัดของคานเสมือนมีค่าเป็นบวกแสดงว่าการโก่งตัวแสดงว่าการโก่งตัวของจุดบนเส้นโค้งอิลาสติคอยู่ล่างคร์อดเสมอ

ค. ค่าบวกของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมของคานจริงจะเป็น (Elastic Weight) กระทำนั้นไปบนคานเสมือน

ง. โมเมนต์ไดอะแกรมที่มีค่าบวกจะเขียนอยู่ด้านล่าง ด้านรับแรงอัดของคานจริงเสมอ

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

ก่อเกียรติ บุญชูกุศลและคณะ.(2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ.(2548). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด, 2546.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ.(2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546).**ทฤษฎีโครงสร้าง** ภาควิชาครุศาสตร์โยธา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ.

บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

สมนึก กุลประภา (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

สุรศักดิ์ รายี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

อำนวย พาณิชกุล (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วทัชภพ เดชพันธ์ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

วินิจ ช่อวิเชียร (2521).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วินิจ ช่อวิเชียร (2528).**ทฤษฎีโครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980). **Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Bresler, B., Lin, T.Y., and Scalzi, J.B.: (1963). **Design of Steel Structural**. 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York.

Elwyn E. Seelye. (1960). **Data book for civil engineers**. New York.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

J.B.Wilbur (1965). **Elementary Structural Analysis ,**2nd Ed, Mc Graw-Hill,New York.

Timoshenko,S.P. (1969).**S.P. and D.H.Young: Throry of Structures**, 2ed Ed., McGraw-Hill New York,

YUAN-YU HSIEH (1995)**.Elementary theory of Structural,** U.S.A,Mexico.

หน่วยที่ 7 การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ

เนื้อหาสาระ

7.1 บทนำ

7.2 โมเมนต์ลบ (Negative Moment)

7.3 โมเมนต์บวก (Positive Moment)

จุดประสงค์การเรียนรู้

7.1 อธิบายความหมายของวิธีสามโมเมนต์ได้

7.2 สามารถคำนวณหาโมเมนต์ลบของวิธีสามโมเมนต์ได้

7.3 อธิบายความหมายของน้ำหนักที่กระทำแบบแผ่กระจายได้

7.4 อธิบายความหมายของน้ำหนักที่มากระทำแบบลงเป็นจุด

7.5 อธิบายความหมายของโมเมนต์ลบได้

7.6 สามารถคำนวณหาค่าของโมเมนต์ลบได้

7.7 อธิบายความหมายของโมเมนต์บวกได้

7.8 สามารถคำนวณหาค่าของโมเมนต์บวกได้

แนวคิดในการสอน

ในการวิเคราะห์โครงสร้างทั่วไปสำหรับคานต่อเนื่องที่เป็นโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท เพื่อหาโมเมนต์ดัด (Moment) แรงปฏิกิริยา (Reaction) แผนภาพแรงเฉือน (Shear Force Diagram) และแผนภาพโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram) ของคานต่อเนื่องมีหลายวิธี ได้แก่ Superposition ,Least Work ,Moment Distribution, Slope Deflection, Colum Analogy และ Three Moment Equation แต่ในหน่วยนี้จะใช้สมการวิธีสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) เท่านั้น ซึ่งสามารถวิเคราะห์โครงสร้างที่จุดรองรับมากกว่า 2 จุดขึ้นไป การแก้ปัญหาของโครงสร้างชนิดนี้ใช้สำหรับแก้ปัญหาคานต่อเนื่องหลายๆ จุด ซึ่งจะใช้สมการหาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดสามจุดของคานต่อเนื่องเมื่อรับน้ำหนักกระทำ ส่วนที่สำคัญที่สุดของวิธีการหาค่าคือโมเมนต์ลบ (Negative Moment) ของคานวิธีสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) สามารถแยกออกเป็น 4 สมการ เพื่อสะดวกในการคิดเนื่องจากคานแต่ละช่วงความยาวและน้ำหนักไม่เหมือนกันและไม่เท่ากัน เป็นต้นหน่วยนี้ผู้เรียนจะได้เรียนรู้เกี่ยวกับการวิเคราะห์โครงสร้างทั่วไปหรือคานต่อเนื่อง

สำหรับวิธีสามสมการ (Three Moment Equation)น้ำหนักที่กระทำเป็นน้ำหนักแผ่กระจาย (Uniform Load) น้ำหนักที่มากระทำเป็นน้ำหนักที่ลงเป็นจุด (Concentrate Load) โมเมนต์ลบ (Negative Moment) โมเมนต์บวก (Positive Moment) เป็นต้น

วิธีสอนและกิจกรรมการเรียนการสอน

7.1 บอกจุดประสงค์การเรียนรู้

7.2 อธิบายสาระสำคัญในการเรียน

7.3 สอนแบบบรรยายและสาธิตการคำนวณ

7.4 นักศึกษาเรียนรู้และจดบันทึก

7.5 ครู นักเรียน สรุป ทบทวนความรู้ ความเข้าใจ

สื่อการเรียนการสอน

7.1 สื่อ Power Point

7.2 สื่อแผ่นใส

7.3 แบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน

7.4 แบบฝึกหัด

ผังความคิดรวบยอด

(Mind Mapping)

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่1จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. วิธีคานต่อเนื่องแบบวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) เป็นโครงสร้างแบบดีเทอมิเนท

..... 2. สำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) เพื่อใช้หาแรงเฉือนก่อนเป็นอันดับแรกและขั้นตอนต่อไปจึงจะหาโมเมนต์ลบ

..... 3. แรงปฏิกิริยาเป็นสิ่งที่สำคัญอันดับแรกที่จะต้องหาสำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)

..... 4. วิธีการหาค่าโมเมนต์ลบ (Negative Moment) ของคานต่อเนื่องใช้วิธีพื้นที่ (Moment Area) และคานเสมือน (Conjugate Beam)

..... 5. สำหรับคานที่มีจุดรองรับหนึ่งจุดขึ้นไปเรียกว่าคานต่อเนื่อง

..... 6. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ใช้แก้ปัญหาคานธรรมดาที่มีความต่อเนื่องกันตั้งแต่หนึ่งจุดขึ้นไป

..... 7. วิธีศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดที่จุดสามจุดสามจุดของคานต่อเนื่องเมื่อรับน้ำหนักบรรทุกกระทำ

..... 8. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) สามารถแก้ของคานช่วงเดียวธรรมดา (Simple Beam) ได้เป็นอย่างดี

..... 9. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะต้องวิเคราะห์สมการครั้งละ 3 สมการขึ้นไป

..... 10. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ฐานรองรับริมสุดท้ายที่เป็น (Hing)จะต้องเป็นศูนย์เสมอ

แบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 2 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ความหมายของคานต่อเนื่อง คือข้อใด
   ก. การแดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ 1 จุด
   ข. การแดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ 2 จุด
   ค. การแดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ 3 จุด
   ง. การแดงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ 4 จุด
2. ขอใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. คานอย่างง่าย (Simple Beam)
   ข. คานต่อเนื่องที่จะต้องใช้วิธีวิธีหาโมเมนต์เริ่มตั้งแต่ 2 จุดขึ้นไป (Continuous Beam to Point)
   ค. เป็นโครงสร้างอย่างยาก (Indeterminate)
   ง. คานต่อเนื่องที่จะต้องมีหาแรงปฏิกิริยาก่อนเสมอ (Continuous Beam to Reaction)
3. สำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะใช้ในการอะไรก่อนเสมอ คือข้อใด
   ก. แรงปฏิกิริยา (Reaction)
   ข. โมเมนต์ลบ (Negative Moment)
   ค. โมเมนต์บวก (Positive Moment)
   ง. แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์บวก (Bending Diagram and Positive Moment)
4. ข้อใดคือความหมายของคานต่อเนื่องวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. ใช้วิเคราะห์ปัญหาสำหรับคานช่วงเดียวธรรมดาจุดเดียว
   ข. ใช้วิเคราะห์ปัญหาสำหรับคานช่วงเดียวธรรมดาสองจุด
   ค. ใช้วิเคราะห์ปัญหาสำหรับคานช่วงเดียวธรรมดาครั้งละสามจุด
   ง. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง
5. ในการวิเคราะห์วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ข้อใดกล่าวได้ถูกต้อง
   ก. ใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดตั้งแต่หนึ่งจุดขึ้นไป
   ข. ใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดบวกและโมเมนต์ดัดลบตั้งแต่หนึ่งจุดขึ้นไป
   ค. ใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดตั้งแต่สองจุดขึ้นไป
   ง. ใช้สมการความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดบวกและโมเมนต์ดัดลบตั้งแต่สองจุดขึ้นไป

6. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) แตกต่างจากวิธีการวิเคราะห์แบบคานต่อเนื่องชนิด (Superposision) คือข้อใด
   ก. วิธี Superposision จะหาแผนภาพของแรงปฏิกิริยาเริ่มต้นก่อนเสมอ
   ข. วิธี Superposision จะหาแผนภาพของโมเมนต์ดัดเริ่มต้นก่อนเสมอ
   ค. วิธี Three Moment Equation จะหาแผนภาพของแรงปฏิกิริยาเริ่มต้นก่อนเสมอ
   ง. วิธี Three Moment Equation จะหาแผนภาพของโมเมนต์ดัดเริ่มต้นก่อนเสมอ
7. การเริ่มต้นในการหาวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. การถอดแรงที่สมดุลออกก่อนเสมอถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของความยาวเป็นส่วนเกิน
   ข. ถอดแรงสม่ำเสมอออกก่อนเสมอถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของความยาวเป็นส่วนเกิน
   ค. ถอดแรงน้ำหนักลงเป็นจุดออกก่อนเสมอถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของความยาวเป็นส่วนเกิน
   ง. ถอดแรงส่วนเกินออกถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของความยาวเป็นส่วนเกิน
8. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) เป็นคานต่อเนื่องที่สามารถวิเคราะห์คานอย่างยากได้สูงๆ จะพบปัญหาในการวิเคราะห์ คือข้อใด
   ก. ใช้หลักการสถิตยศาสตร์สลับซับซ้อนมากขึ้นเพราะว่าสมการมีความยุ่งยาก
   ข. ใช้หลักการสถิตยศาสตร์โครงสร้างใช้เวลามาก เพราะว่าสมการมีความยุ่งยาก
   ค. ใช้หลักการรวมพื้นฐานต่างๆ ที่สร้างขึ้นและใช้เวลาน้อยเพราะสมการไม่สลับซับซ้อน
   ง. ใช้หลักการรวมผลใช้เวลามากเพราะว่าสมการมีความยุ่งยาก
9. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องคือข้อใด
   ก. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะต้องหาแรงปฏิกิริยาได้ก่อนเสมอ
   ข. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะต้องหาแผนภาพของโมเมนต์ดัดก่อนจึงจะไปหาแรงปฏิกิริยา
   ค. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะต้องโมเมนต์ดัดลบได้ก่อนจึงจะไปหาแรงปีกิริยา
   ง. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะต้องโมเมนต์ดัดบวกได้ก่อนจึงจะไปหาแรงปีกิริยา

10. ในการวิเคราะห์โครงสร้าง (Indeterminate) โดยวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะต้องเข้าใจหลักการอะไร คือข้อใด

ก. วิเคราะห์คานต่อเนื่องครั้งละสามจุด

ข. หาโมเมนต์ลบเพื่อที่จะไปหาแรงปฏิกิริยาของคานต่อเนื่องแต่ละฐานรองรับ

ค. คำนวณหาแรงปฏิกิริยาก่อนจากนั้นเขียนแผนภาพแรงเฉือนและเขียนแผนภาพโมเมนต์ดัด

ง. ถูกหมดทุกข้อ

7.1 บทนำ

การวิเคราะห์โครงสร้างทั่วไปหรือคานต่อเนื่องที่เป็นโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท (Indeterminate)เพื่อหาหาค่าของโมเมนต์ดัด (Moment) แรงปฏิกิริยา (Reaction) แผนภาพของแรงเฉือน (Shear Force Diagram) และแผนภาพของโมเมนต์ดัด (Bending Moment Diagram) ของคานต่อเนื่อง (Continuous Beam) มีวิธีการหาหลายวิธี ได้แก่ Superposition ,Least Work ,Moment Distribution, Slope Deflection, Colum Analogy และThree Moment Equation เป็นต้น แต่สำหรับหน่วยนี้จะกล่าวถึงเฉพาะ การวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) เท่านั้น

ในการออกแบบโครงสร้างโดยเฉพาะโครงสร้างอาคารคอนกรีตเสริมเหล็กที่ไม่สูงมากนักมักจะต้องทำการวิเคราะห์คานต่อเนื่อง ซึ่งเป็นโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท วิธีการวิเคราะห์ที่กระทำได้ง่ายๆ ได้แก่ วิธีสามสมการ (Three Moment Equation) ผู้ที่คิดค้นทฤษฎีนี้เป็นวิศวกรประเทศฝรั่งเศส ชื่อชาปียอน (Clapeyron) เสนอวิธีการนี้เมื่อปี พ.ศ.2400 และได้รับความนิยมโดยตลอดมาอย่างสม่ำเสมอ เพราะเป็นวิธีการที่ไม่สลับซับซ้อน ใช้เวลาในการวิเคราะห์น้อยเหมาะแก่การเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ได้เป็นอย่างดี (บัญชา สุปรินายก,2537:141)

สำหรับคานที่มีจุดรองรับมากกว่าสองจุดขึ้นไปเรียกว่าคานต่อเนื่อง คานประเภทนี้จัดอยู่ในโครงสร้างประเภทอินดีเทอมิเนท การแก้ปัญหาของโครงสร้างแบบนี้โดยทั่วไปจะใช้วิธี สามสมการ (Three Moment Equation) เป็นที่นิยมกันเป็นอย่างมาก และเป็นอีกวิธีหนึ่งที่วิเคราะห์ปัญหาสำหรับคานต่อเนื่องกันหลายจุด วิธีนี้จะใช้สมการซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดที่จุดสามจุดของคานต่อเนื่องเมื่อรับน้ำหนักหรือแรงกระทำ (วินิต ช่อวิเชียร,2526:267:268)

ในขณะที่คานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation)วิธีนี้จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดสามจุดของคานต่อเนื่องเมื่อรับน้ำหนักหรือแรงกระทำมีประโยชน์มากในการแก้ปัญหาของคานต่อเนื่องได้เป็นอย่างดี (อำนวย พานิชกุล,2528:139)

ส่วนวิธี Superposition จะใช้เพื่อที่จะหาค่าของแรงปฏิกิริยาในคานโดยตรง ส่วนวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) จะใช้เพื่อหาค่าของโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับในคานต่อเนื่อง เมื่อทราบค่าของโมเมนต์ดัดเหล่านี้ ค่าของแรงปฏิกิริยาอื่นๆ จะหาได้โดยใช้สมการสมดุล จากนั้นก็สามารถเขียนภาพของแรงเฉือนและภาพของแรงเฉือนและภาพของโมเมนต์ดัดได้ ค่าหน่วยแรงที่เกิดขึ้นในคานหรือระยะการโก่งตัวของคานก็จะหาได้เช่นกัน

และคานต่อเนื่องโดยวิธีสามสมการ ความหมายคือสมการซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างของโมเมนต์ดัด 3 จุด เมื่อมีน้ำหนักหรือแรงมากระทำต่อคานนั้น คานอาจจะมีการทรุดตัว

เกิดขึ้น หรืออาจจะไม่มีการทรุดตัวก็ได้ ความสัมพันธ์นี้มีประโยชน์มากในการแก้ปัญหาสำหรับการหาค่าของโมเมนต์ที่ฐานของคานต่อเนื่อง ซึ่งทำให้สามารถหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับได้

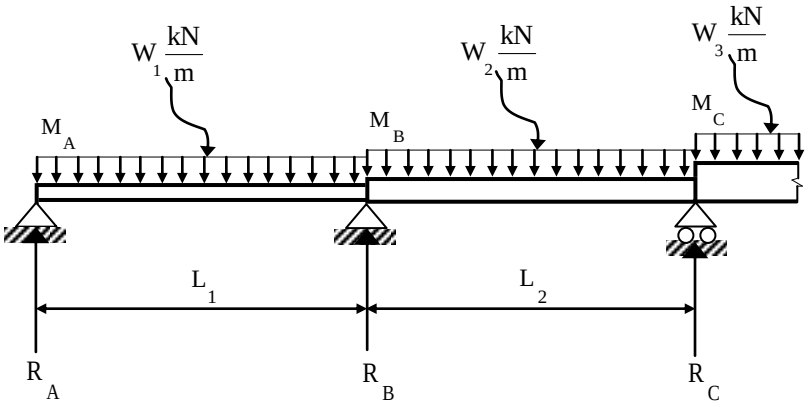
สมการสามโมเมนต์เป็นสมการที่วิเคราะห์คานต่อเนื่องที่มีช่วงพาดหลายๆ ช่วงพาดอาจทำได้โดยโดยใช้หลักการรวมผลของการวิเคราะห์ซึ่งมาจากน้ำหนักบรรทุกสม่ำเสมอและน้ำหนักลงเป็นจุดตามพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร การวิเคราะห์เริ่มต้นด้วยการถอดแรงส่วนเกินออก ถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับภายในของคานต่อเนื่องเป็นส่วนแรงเกิน โครงสร้างปลดปล่อย (Released Structure) จะเหลือฐานรองรับริมนอกสุด 2 ฐาน นั้นคือโครงสร้างปลดปล่อยมีสภาพเป็นคานช่วงพาดเดียว (Simple Beam) ถ้าคานต่อเนื่องมีดีกรีอินดีเทอมิเนทสูง จะพบปัญหาว่าการวิเคราะห์โดยใช้หลักการรวมผลใช้เวลามาก เพราะสมการมีความยุ่งยาก ปัญหานี้อาจหลีกเลี่ยงได้ด้วยการเลือกชุดของแรงส่วนเกินเสียใหม่ เช่น กำหนดให้โมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับภายในเป็นโมเมนต์ส่วนเกิน คานต่อเนื่องจะแปรสภาพเป็นคานช่วงพาดช่วงเดียวหลายๆ คาน ในกรณีนี้จะพบว่าชุดของสมการที่เขียนขึ้นโดยหลักการรวมผล จะประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า (โมเมนต์ดัดที่ฐานรองรับ) สมการละไม่เกิน 3 ค่า ไม่ว่าคานต่อเนื่องจะมีดีดกรีอินดีเทอมิเนทมิเนซีสูงเท่าใดก็ตาม หลักสมการที่ได้กล่าวมาจะถูกนำมาเขียนเป็นสมการสามโมเมนต์ต่อไป

ในการหาค่าของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับสำหรับคานต่อเนื่อง เมื่อมีน้ำหนักมากระทำบนคาน น้ำหนักที่มากระทำนี้ที่คานแต่ละช่วงอาจจะมีน้ำหนักไม่เท่ากันหรืออาจมีน้ำหนักเท่ากันก็ตาม การหาค่าของแรงปฏิกิริยานั้นต้องทราบค่าของโมเมนต์ลบเสียก่อนเสมอ โดยเฉพาะริมของคานช่วงใดช่วงหนึ่งอาจยึดแน่น (Fixed End) ในกรณีเช่นนี้การหาค่าของโมเมนต์ลบมีความสำคัญอย่างยิ่ง ถ้าเราไม่สามารถหาค่าของแรงปฏิกิริยาได้ ในทำนองเดียวกันถ้าเราไม่สามารถหาแรงปฏิกิริยาได้ เราก็ไม่สามารถหาค่าแรงเฉือนที่จุดต่างๆ ได้เช่นเดียวกัน เมื่อไม่ทราบค่าของแรงเฉือนตามจุดต่างๆ ที่มีแรงกระทำ เราก็ไม่สามารถที่จะเขียนไดอะแกรมของแรงเฉือน (Shear Force)ได้เช่นกันในระเดียวกันก็ไม่สามารถหาค่าของโมเมนต์บวกได้

ฉะนั้นสิ่งที่สำคัญที่สุดก็คือ การหาค่าของโมเมนต์ลบ (Negative Moment) ในการหาค่าของโมเมนต์ลบ โดยใช้สมการของวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) นี้เราสามารถแยกออกได้เป็น 4 สมการ สำหรับเหตุผลที่แยกออกเป็น 4 สมการ ก็เพื่อสะดวกในการคิดเนื่องจากตามลักษณะความเป็นจริงของคาน คานแต่ละช่วงอาจมีความยาวไม่เท่ากัน บางช่วงแรงที่มากระทำเป็นลักษณะอาจเป็นลักษณะแผ่กระจาย (Uniform Load) หรือน้ำหนักลงเป็นจุด (Point Load) เป็นต้น ดังนั้นเพื่อความสะดวกจึงได้แยกออกเป็น 4 สมการ ตามลักษณะของแรงที่มากระทำและตามความยาวของคาน รายละเอียด ดังนี้

7.1.1 น้ำหนักที่กระทำเป็นน้ำหนักแผ่กระจาย (Uniform Load)

7.1.1.1 น้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน



ภาพที่ 7.1 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:249)

วิธีสามสมการ(Three Moment Equation) สำหรับคานดังภาพที่ 7.1 รายละเอียด ดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_1 L_2^3}{4} \quad \text{.....(7.1)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_C .....kN-m

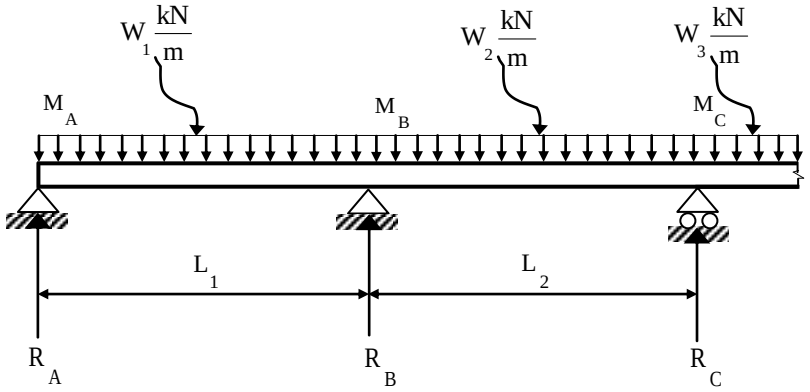
L_1 = ความยาวของคานด้านซ้ายมือ .....m

L_2 = ความยาวของคานด้านขวามือ .....m

W_1 = น้ำหนักแผ่กระจายด้านซ้ายมือ .....kN-m

W_2 = น้ำหนักแผ่กระจายด้านขวามือ .....kN-m

7.1.1.2 น้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน



ภาพที่ 7.2 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:249)

วิธีสามสมการ (Three Moment Equation) สำหรับคานดังภาพที่ 7.2 รายละเอียด ดังนี้

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{WL^2}{2} \quad \text{.....(7.2)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_C .....kN-m

L_1 = ความยาวของคานด้านซ้ายมือ .....m

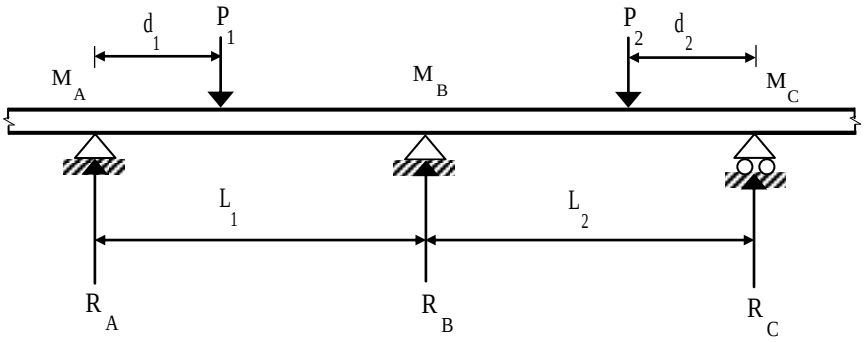
L_2 = ความยาวของคานด้านขวามือ .....m

W_1 = น้ำหนักแผ่กระจายที่คานด้านซ้ายมือ.....kN-m

W_2 = น้ำหนักแผ่กระจายที่คานด้านขวามือ .....kN-m

7.1.2 น้ำหนักที่มากระทำเป็นน้ำหนักที่ลงเป็นจุด (Concentrate Load)

7.1.2.1 น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน



ภาพที่ 7.3 น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:250)

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{P_1 d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) \quad \text{.....(7.3)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบซึ่งอยู่ตรงกลางตรงตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านขวามือตรงกับ R_C .....kN-m

L_1 = ความยาวของคานด้านซ้ายมือ .....m

L_2 = ความยาวของคานด้านขวามือ .....m

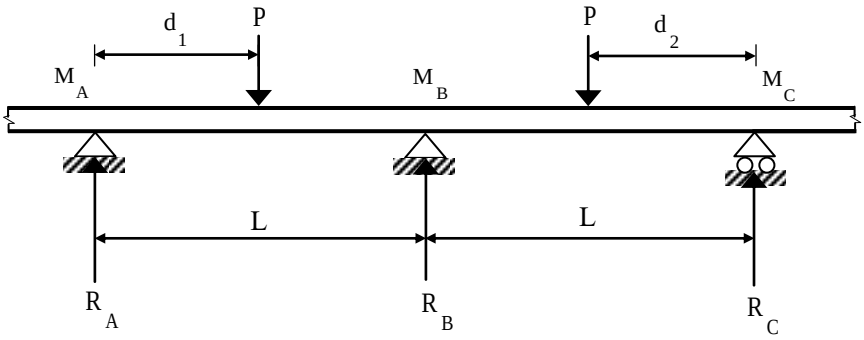
P_1 = น้ำหนักลงเป็นจุดที่คานด้านซ้ายมือ .....kN-m

P_2 = น้ำหนักลงเป็นจุดที่คานด้านขวามือ .....kN-m

d_1 = ระยะของน้ำหนักที่ลงเป็นจุดจาก R_A .....m

d_2 = ระยะของน้ำหนักที่ลงเป็นจุดจาก R_C .....m

7.1.2.2 น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคาน ความยาวคานเท่ากัน



ภาพที่ 7.4 น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคานความยาวคานเท่ากัน
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:250-251)

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{3}{4}PL \quad \text{.....(7.4)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบซึ่งอยู่ตรงกลางตรงตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านขวามือตรงกับ R_C .....kN-m

L = ความยาวของคาน.....m

P = น้ำหนักลงเป็นจุด.....kN

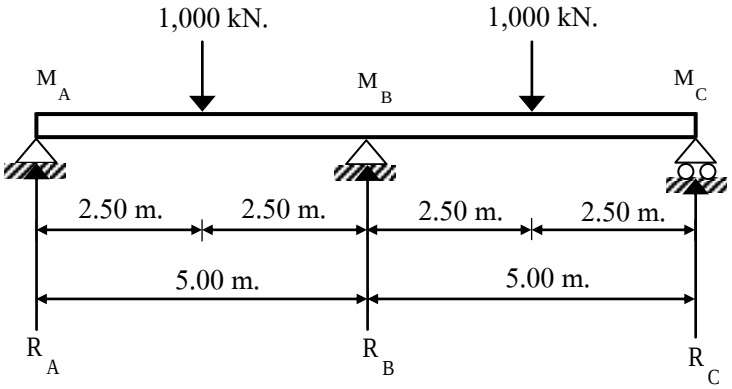
7.2 โมเมนต์ลบ (Negative Moment)

ในการหาโมเมนต์ลบสำหรับคานต่อเนื่อง โดยใช้สมการวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) นั้นวิธีการทำเราจะเริ่มต้นที่จุดแรกคือด้านริมสุดของคานและนับต่อไปอีก 2 จุด โดยจุดแรกให้เป็น M_A โดยเราจะหาค่าโมเมนต์พร้อมกันไปทีละ 3 จุด ใน 1 สมการ คือ M_A , M_B และ M_C ถ้ามีคานหลายช่วงต่อเนื่องกันไปเรื่อยๆ เราก็เลื่อนไปทีละจุดจาก M_A , M_B และ M_C ขั้นตอนต่อไปก็คือ M_B , M_C และ M_D ทำลักษณะอย่างนี้ไปเรื่อยๆ จนสิ้นสุดช่วงของคานในการหาค่าโมเมนต์ลบโดยใช้สมการของวิธีสามสมการนี้ค่าโมเมนต์ลบด้านริมสุดจะต้องมีค่าเป็นศูนย์เสมอยกเว้นด้านริมของคานซึ่งมีการยึดแน่น (Fixed End) ในกรณีเช่นนี้ต้องมีค่าของโมเมนต์เกิดขึ้นด้วย

7.3 โมเมนต์บวก (Positive Moment)

ในการหาค่าโมเมนต์บวก โดยใช้สมการของวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) โดยตรงไม่มีทิศทางการหาค่าของโมเมนต์บวกสำหรับคานต่อเนื่องนั้น ใช้วิธีหาจากภาพไดอะแกรมของแรงเฉือน (Share Diagram) โดยใช้พื้นที่จากภาพไดอะแกรมของแรงเฉือนลบด้วยค่าของโมเมนต์ลบจะได้ค่าของโมเมนต์บวก วิธีการหานั้นจะหาได้จากภาพไดอะแกรมของแรงเฉือนจากซ้ายมือมาขวามือหรือจากขวามาซ้ายก็ได้ ค่าที่ได้รับจะเท่ากัน ถ้าไม่เท่ากันแสดงว่ามีสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่ทำมาผิดพลาด ก็พยายามหาวิธีการตรวจสอบให้ถูกต้อง จะทำให้โมเมนต์ลบและบวก แรงเฉือนและแรงปฏิกิริยาก็จะมีความถูกต้อง เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ ดังแสดงในภาพที่ 7.5 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์



ภาพที่ 7.5 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:224-226)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{3}{4}PL$$

$$0 + 4M_B + 0 = -\frac{3}{4} \times 1{,}000 \times 5.00$$

$$0 + 4M_B + 0 = -3{,}750$$

$$M_B = -\frac{3{,}750}{4}$$

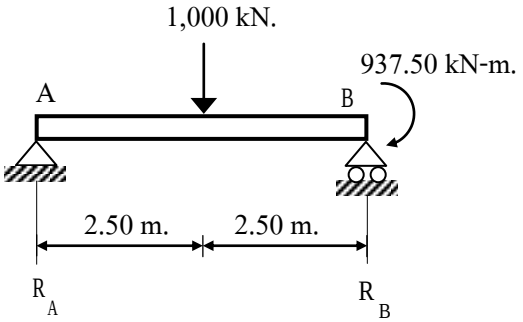
$$\therefore M_B = -937.50 \text{ kN-m.}$$

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore M_A = 0$

$\therefore M_B = -937.50$ kN-m.

$\therefore M_C = 0$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B ดังนี้



ภาพที่ 7.6 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:224-226)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1{,}000 \times 2.50 + 937.50 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 3{,}437.50 = 0$$

$$R_A = \frac{1{,}562.50}{5.00}$$

$$\therefore R_A = 312.50 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowright^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}000 \times 2.50 + 937.50 = 0$$

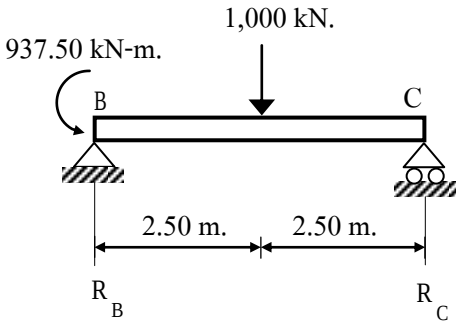
$$-R_B \times 5.50 + 572.11 = 0$$

$$\frac{3{,}437.50}{5.00} = R_B$$

$$\therefore R_B = 687.50 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 312.50 kN. และ R_B เท่ากับ 687.50 kN **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C ดังนี้



ภาพที่ 7.7 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:224-226)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 5.00 - 1{,}000 \times 2.50 - 937.50 = 0$$

$$R_B \times 5.00 - 3{,}437.50 = 0$$

$$R_B = \frac{3{,}437.50}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 687.50 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

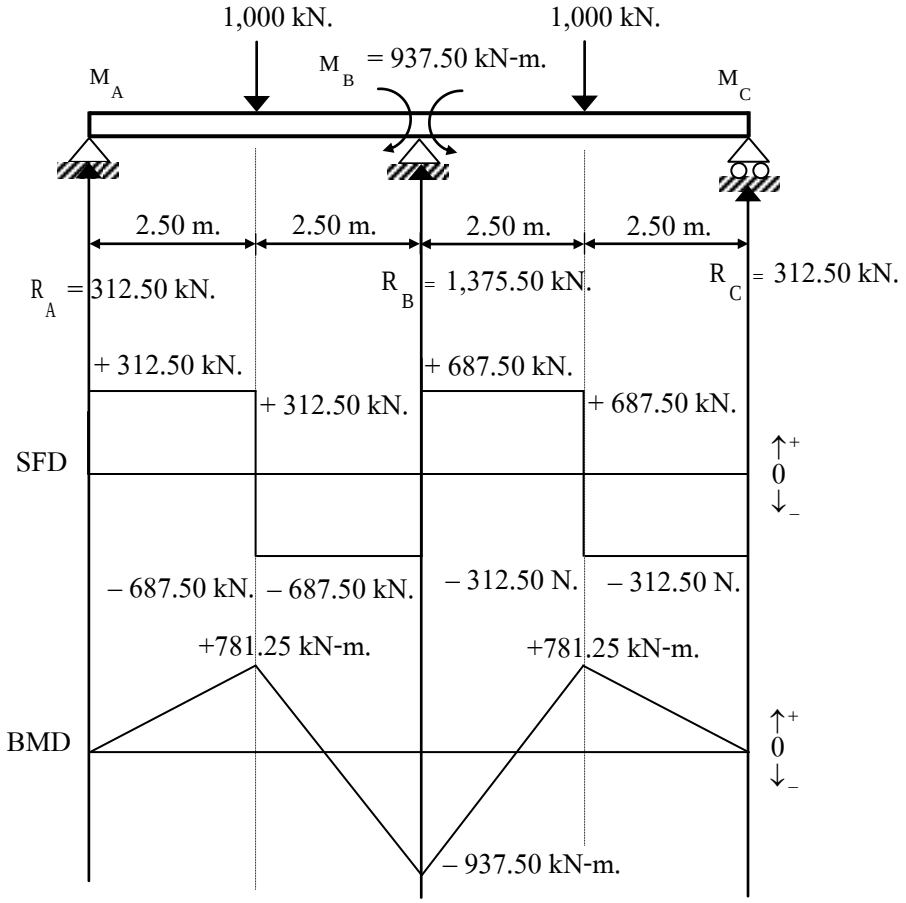
$$-R_C \times 5.00 + 1{,}000 \times 2.50 - 937.50 = 0$$

$$-R_C \times 5.00 + 1{,}562.50 = 0$$

$$\frac{1{,}562.850}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 312.50 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

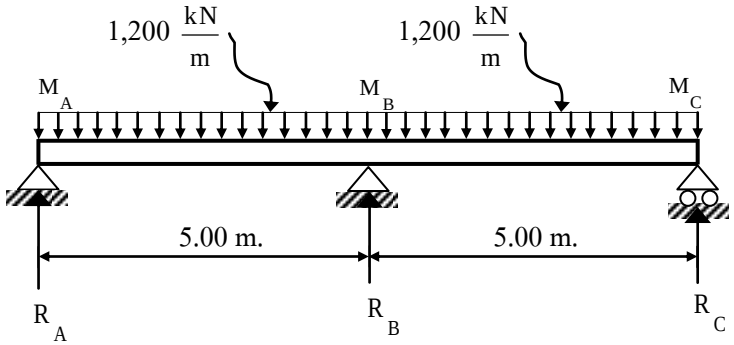
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 937.50 kN-m. และ R_C เท่ากับ 312.50 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.8 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Timoshenko,S.P. (1969:224-226)

ตัวอย่างที่ 2 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.9



ภาพที่ 7.9 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : YUAN-YU HSIEH (1995:157)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{WL^2}{2}$$

$$0 + 4M_B + 0 = -\frac{1{,}200 \times 5.00^2}{2}$$

$$0 + 4M_B + 0 = -15{,}000$$

$$M_B = -\frac{15{,}000}{2}$$

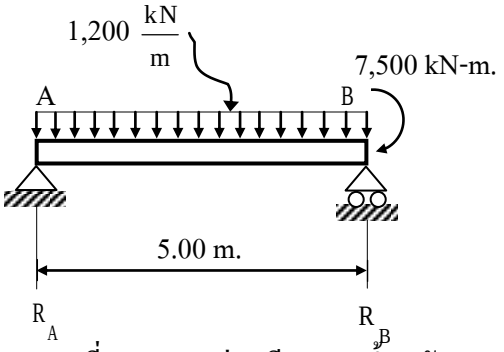
$$\therefore M_B = -7{,}500 \text{ kN-m.}$$

ดังนั้น $\therefore M_A = 0$

$\therefore M_B = -7{,}500$ kN-m.

$\therefore M_C = 0$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B ดังนี้



ภาพที่ 7.10 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : YUAN-YU HSIEH (1995:157)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1{,}200 \times 5.00 + \frac{5.00}{2} + 7{,}500 = 0$$

$$R_A \times 5.00 - 7{,}500 = 0$$

$$R_A = \frac{7{,}500}{5.00}$$

$$\therefore R_A = 1{,}500 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}200 \times 5.00 + \frac{5.00}{2} + 7{,}500 = 0$$

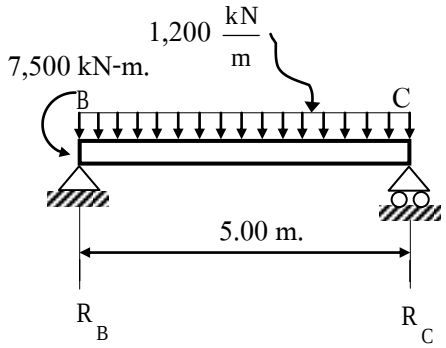
$$-R_B \times 5.00 + 22{,}500 = 0$$

$$\frac{22{,}500}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 4{,}500 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 1,500 kN. และ R_B เท่ากับ 4,500 kN **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C ดังนี้



ภาพที่ 7.11 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : ที่มา : YUAN-YU HSIEH (1995:157)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 5.00 - 1{,}200 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} - 7{,}500 = 0$$

$$R_B \times 5.00 - 22{,}500 = 0$$

$$R_B = \frac{22{,}500.}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4{,}500 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

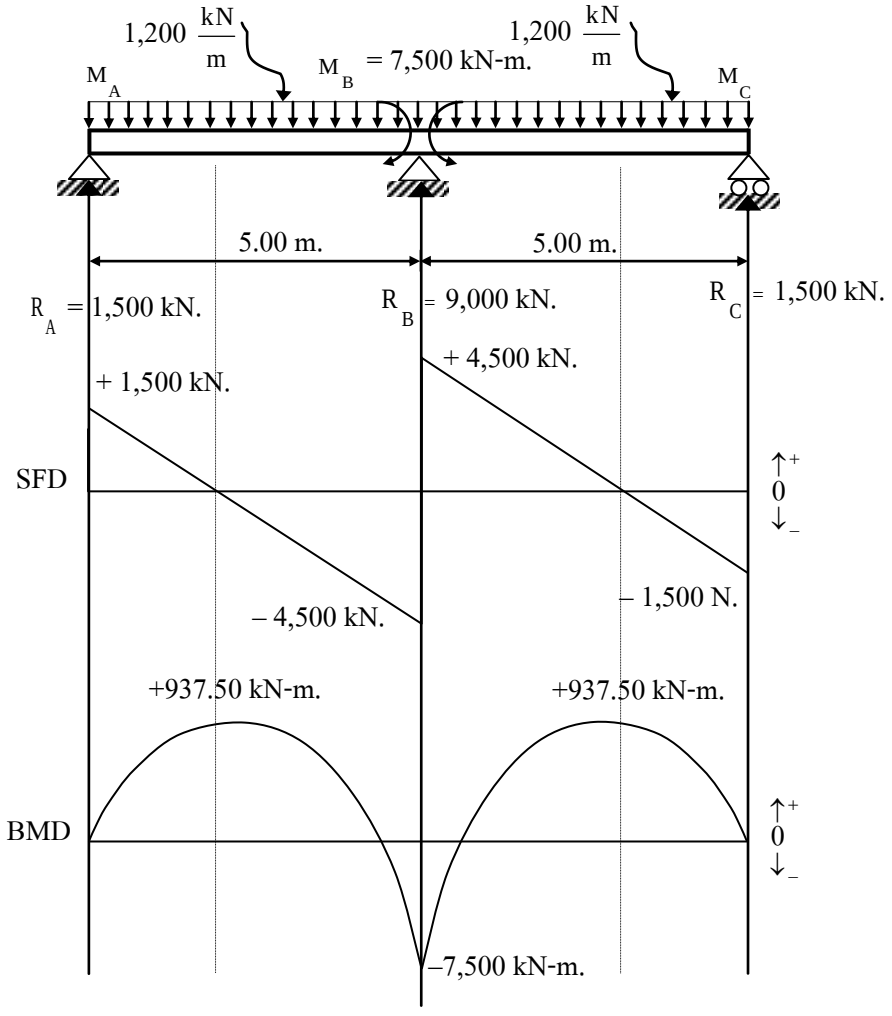
$$-R_C \times 5.00 + 1{,}200 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} - 7{,}500 = 0$$

$$-R_C \times 5.00 + 7{,}500 = 0$$

$$\frac{7{,}500}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 1{,}500 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

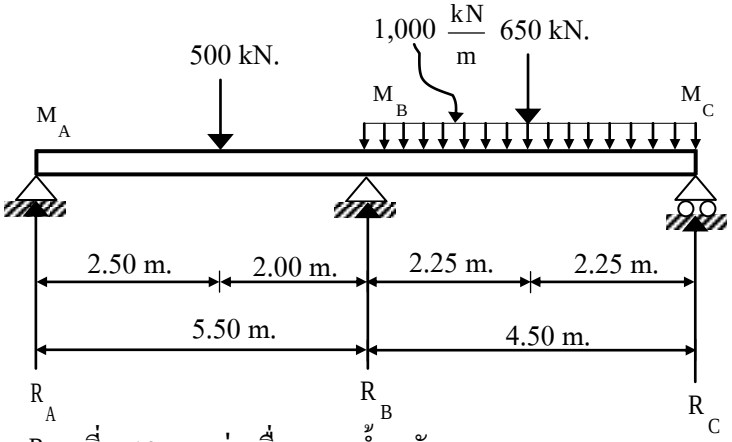
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 7,500 kN-m. และ R_B เท่ากับ 4,500 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.12 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : YUAN-YU HSIEH (1995:157)

ตัวอย่างที่ 3 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ดังแสดงในภาพที่ 7.13 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์



ภาพที่ 7.13 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:193

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{P_1 d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) - \frac{W_2 L_2^3}{4}$$

$$M_A(5.50) + 2M_B(5.50+4.50) + M_C(4.50) = -\frac{500 \times 2.50}{5.50}(5.50^2 - 2.50^2) - \frac{1,000 \times 4.50^3}{4} - \frac{650 \times 2.25}{4.50}(4.50^2 - 2.25^2)$$

$$0 + 20M_B + 0 = -5,454.55 - 22,781.25 - 4,935.94$$

$$20M_B = -33,171.74$$

$$M_B = -\frac{33,171.74}{20.00}$$

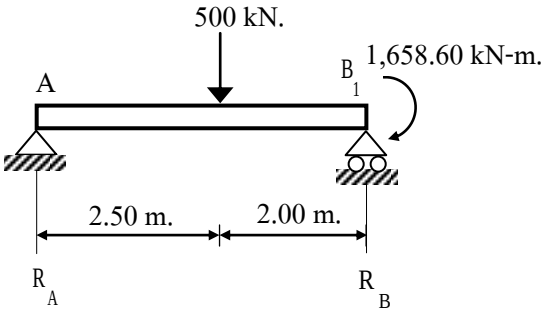
$$\therefore M_B \quad -1,658.60 \text{ kN-m.}$$

ดังนั้น $\therefore M_A = 0$

$\therefore M_B = -1,658.60$ kN-m.

$\therefore M_C = 0$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.14 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:193)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.50 - 500 \times 2.00 + 1{,}658.60 = 0$$

$$R_A \times 4.50 + 658.60 = 0$$

$$R_A \times 4.50 = -658.60$$

$$R_A = -\frac{658.60}{4.50}$$

$$\therefore \quad R_A = -146.37 \text{ kN.} \quad (\downarrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.50 + 500 \times 2.00 + 1{,}658.60 = 0$$

$$-R_B \times 4.50 + 2{,}658.60 = 0$$

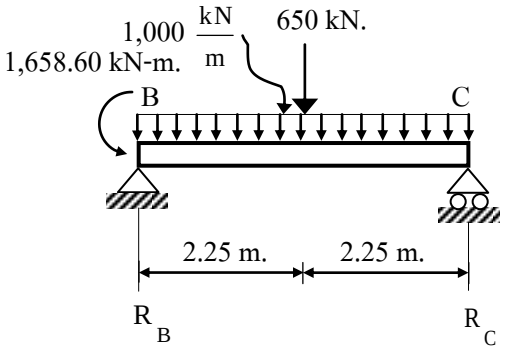
$$2{,}658.60 = R_B \times 4.50$$

$$\frac{2{,}658.60}{4.50} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 590.80 \text{ N} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ –146.37 kN. และ R_B เท่ากับ 590.80 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.15 คานช่วงเดียวอย่างง่ายและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:193)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}\overset{-}{}$

$$R_B \times 4.50 - 1{,}000 \times 4.50 \times \frac{4.50}{2} - 650 \times 2.25 - 1{,}658.60 = 0$$

$$R_B \times 4.50 - 13{,}246.10 = 0$$

$$R_B = \frac{13{,}246.10}{4.50}$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}943.58 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}\overset{-}{}$

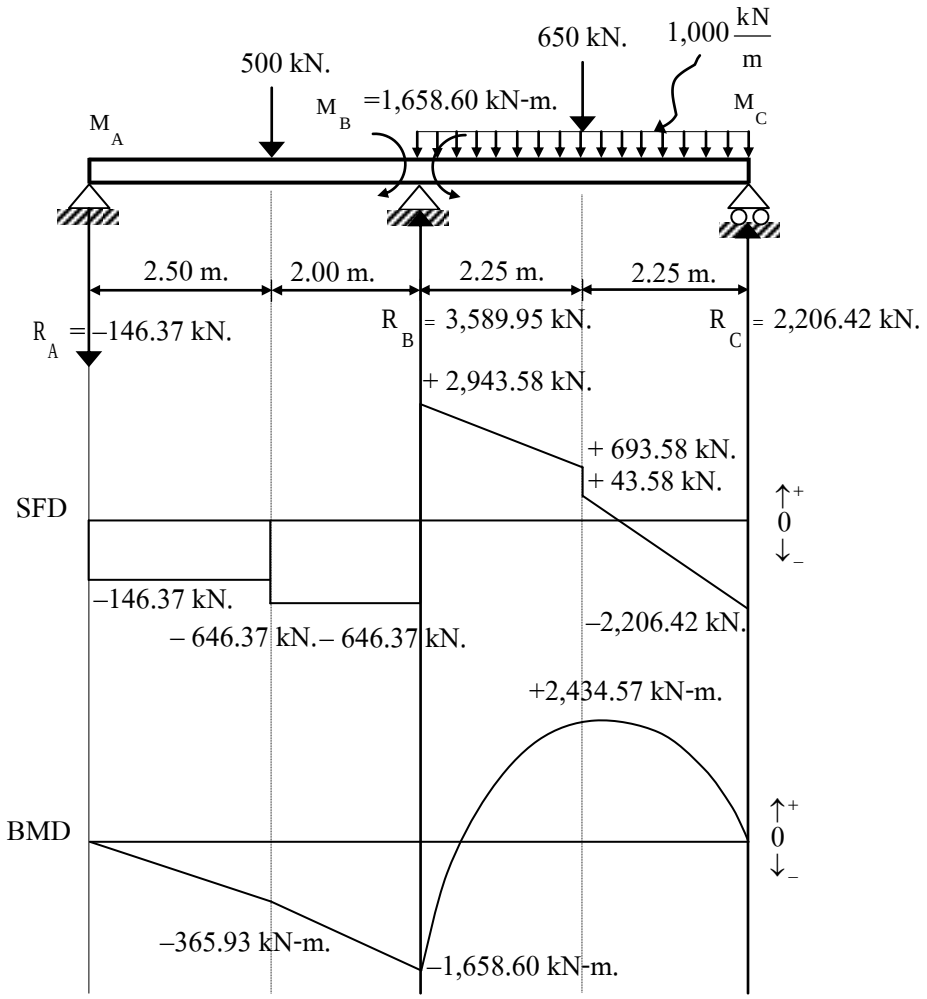
$$-R_C \times 4.50 + 1{,}000 \times 4.50 \times \frac{4.50}{2} + 1{,}000 \times 4.50 - 1{,}658.60 = 0$$

$$-R_C \times 4.50 + 9{,}928.90 = 0$$

$$\frac{9{,}928.90}{4.50} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 2{,}206.42 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

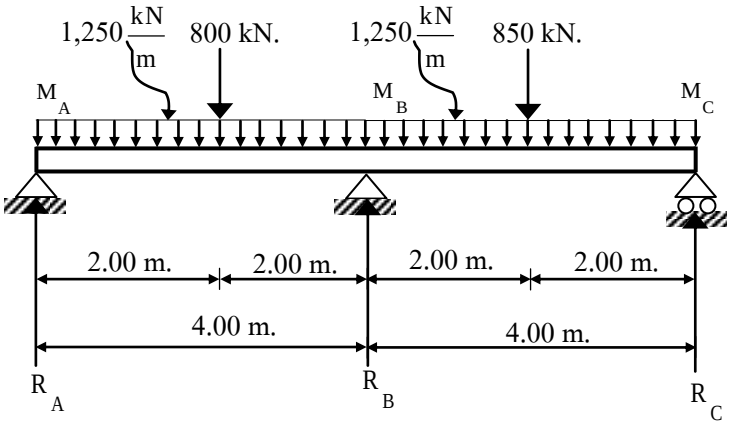
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 2,434.75 kN-m. และ R_B เท่ากับ 2,943.58 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.16 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:193)

ตัวอย่างที่ 4 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.17



ภาพที่ 7.17 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:196-197)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{P_1 d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) - \frac{W_2 L_2^3}{4}$$

$$M_A(4.00) + 2M_B(4.00+4.00) + M_C(4.00) = -\frac{800 \times 2.00}{4.00}(4.00^2 - 2.00^2) - \frac{1,250 \times 4.00^3}{4} - \frac{850 \times 2.00}{4.00}(4.00^2 - 2.00^2) - \frac{1,250 \times 4.00^3}{4}$$

$$0 + 16.00M_B + 0 = -4,800 - 20,000 - 5,100 - 20,000$$

$$16.00M_B = -49,900$$

$$M_B = -\frac{49,900}{16.00}$$

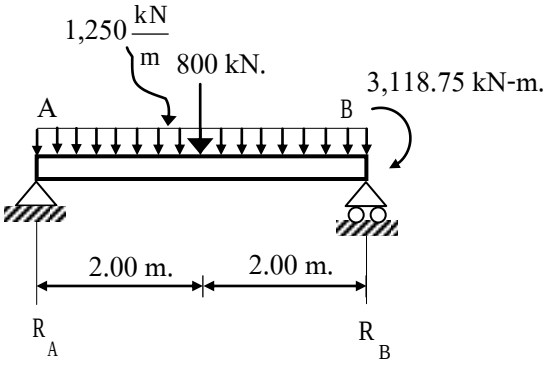
$$\therefore M_B \quad -3,118.75 \text{ kN-m.}$$

ดังนั้น $\therefore M_A = 0$

$\therefore M_B = -3,118.75$ kN-m.

$\therefore M_C = 0$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.18 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:196-197)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 1{,}250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-800 \times 2.00 + 3{,}118.75$$

$$R_A \times 4.50 - 8{,}481.25 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = 8{,}481.25$$

$$R_A = \frac{8{,}481.25}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 2{,}120.31 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 1{,}250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$+800 \times 2.00 + 3{,}118.75$$

$$-R_B \times 4.00 + 14{,}718.75 = 0$$

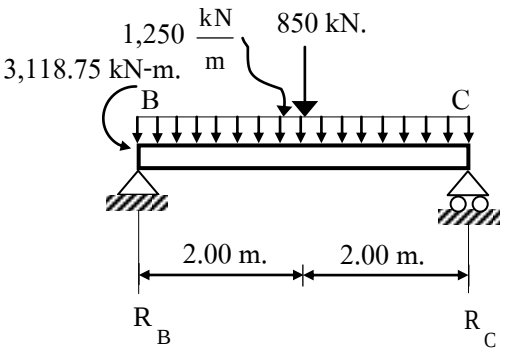
$$14{,}718.75 = R_B \times 4.00$$

$$\frac{14{,}718.75}{4.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 3{,}679.69 \text{ N} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 2,120.31 kN. และ R_B เท่ากับ 3,679.69 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.19 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:196-197)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 4.00 - 1{,}250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-850 \times 2.00 - 3{,}118.75$$

$$R_B \times 4.00 - 14{,}818.75 = 0$$

$$R_B = \frac{14{,}818.75}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 3{,}704.68 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 4.00 + 1{,}250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

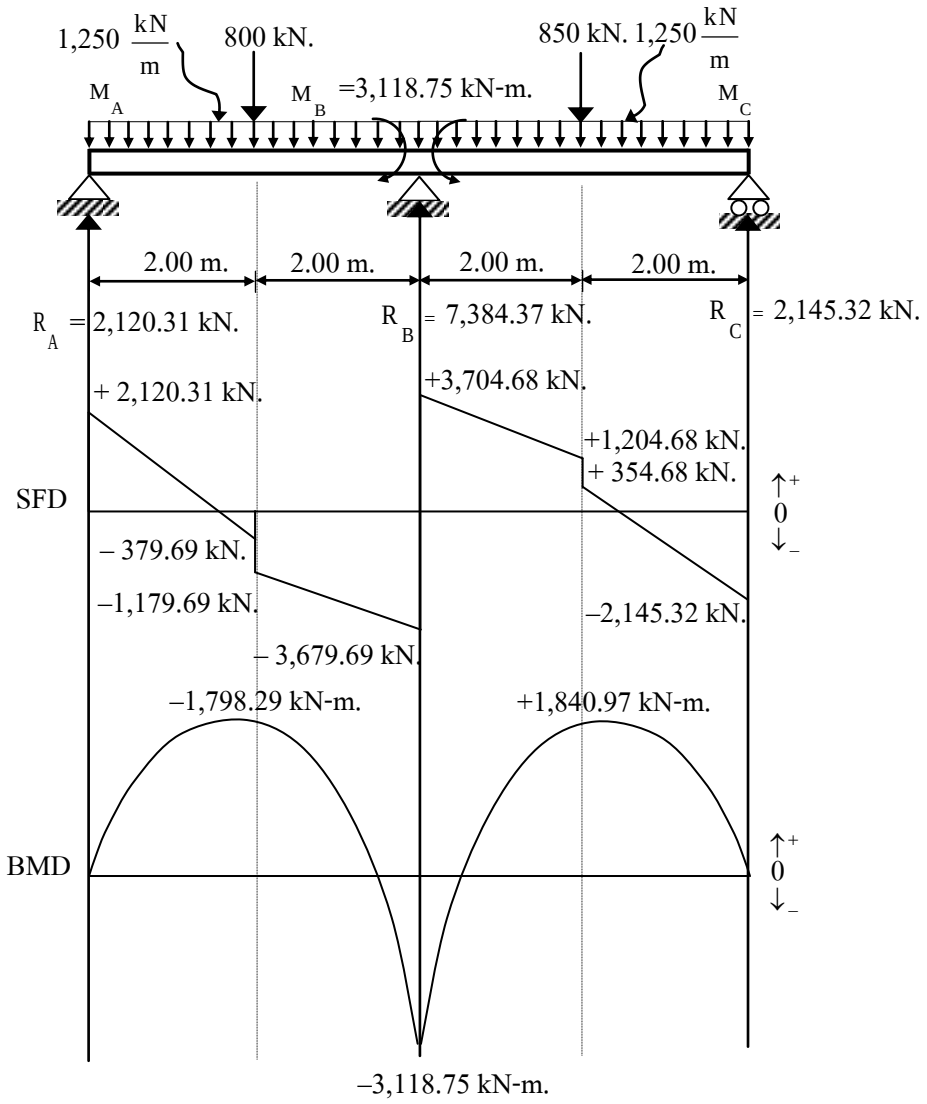
$$+850 \times 2.00 - 3{,}118.75$$

$$-R_C \times 4.50 + 8{,}581.31 = 0$$

$$\frac{8{,}581.75}{4.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 2{,}145.32 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

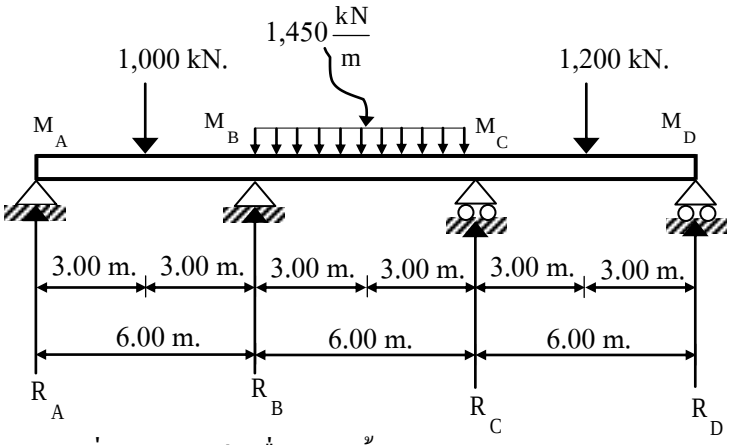
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 3,118.75 kN-m. และ R_B เท่ากับ 3,704.68 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.20 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2548:196-197)

ตัวอย่างที่ 5 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ ดังแสดงในภาพที่ 7.21พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์



ภาพที่ 7.21 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553:81-91)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A , M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{P_1 d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{W_1 L_1^3}{4}$$

$$M_A(6.00) + 2M_B(6.00+6.00) + M_C(6.00) = -\frac{1{,}000 \times 3.00}{6.00}(6.00^2 - 3.00^2) - \frac{1{,}450 \times 6.00^3}{4}$$

$$0 + 24.00M_B + 6.00M_C = -13{,}500 - 78{,}300$$

$$24.00M_B + 6.00M_C = -91{,}800 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_B , M_C และ M_D รายละเอียด ดังนี้

$$M_B L_2 + 2M_C(L_2 + L_3) + M_C L_3 = -\frac{W_2 L_2^3}{4} - \frac{P_3 d_3}{L_3}(L_3^2 - d_3^2)$$

$$M_B(6.00) + 2M_C(6.00+6.00) + M_D(6.00) = -\frac{1{,}450 \times 6.00^3}{4} - \frac{1{,}250 \times 3.00}{6.00}(6.00^2 - 3.00^2)$$

$$6.00M_B + 24.00M_C + 0 = -78{,}300 - 16{,}875$$

$$6.00M_B + 24.00M_C = -95{,}175 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จากสมการที่ (1) $\quad 24.00M_B \; 6.00M_C = -91{,}800$

จากสมการที่ (2) $\times 4 = 24.00M_B + 96.00M_C = -380,700$

$$-90.00M_C = +288,900$$

$$-M_C = +\frac{288,900}{90.00}$$

$$\therefore \ -M_C = 3,210 \text{ kN.-m}$$ -

แทนค่า M_C ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_B

$$24.00M_B + 6.00(-3,210) = -91,800$$

$$24.00M_B - 19,260 = -91,800$$

$$24.00M_B = -91,800 + 19,260$$

$$24.00M_B = -72,540$$

$$M_B = -\frac{72,540}{24.00}$$

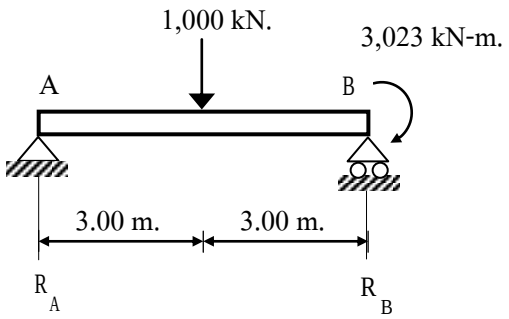
$$\therefore \ -M_B = 3,023 \text{ kN-m.}$$ -

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore \ -M_A = 0$

$$\therefore \ -M_B = 3,023 \text{ kN-m}$$

$$\therefore \ -M_C = 3,210 \text{ kN.-m}$$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.22 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553:81-91)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ +

$$R_A \times 6.00 - 1,000 \times 3.00 - 3,023 = 0$$

$$R_A \times 6.00 - 23 = 0$$

$$R_A \times 6.00 = 23$$

$$R_A = \frac{23}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 4 \text{ kN.} \quad (\downarrow^{-})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 6.00 + 1{,}000 \times 3.00 + 3{,}023 = 0$$

$$-R_B \times 6.00 + 6{,}023 = 0$$

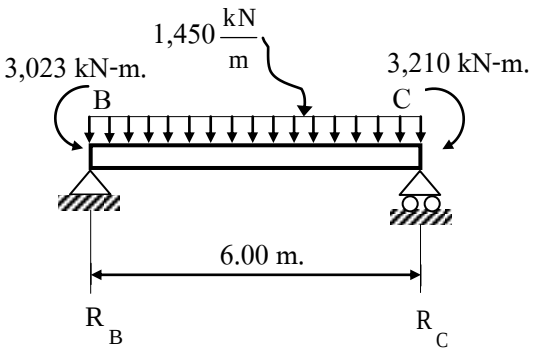
$$6{,}023 = R_B \times 6.00$$

$$\frac{6{,}023}{6.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 1{,}004 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ – 4 kN. และ R_B เท่ากับ 1,004 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.23 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553:81-91)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 6.00 - 1{,}450 \times 6.00 \times \frac{6.00}{2} = 0$$

$$-3{,}023 + 3{,}210$$

$$R_B \times 6.00 - 26{,}287 = 0$$

$$R_B = \frac{26,287}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4,381 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 5.00 + 1,450 \times 6.00 \times \frac{6.00}{2} = 0$$

$$+3,023 - 3,210$$

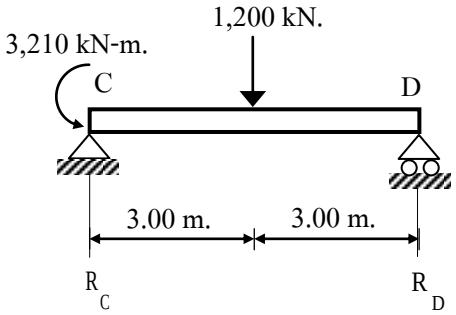
$$-R_C \times 6.00 + 25,913 = 0$$

$$\frac{25,913}{6.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 4,319 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_B เท่ากับ 4,381 kN. และ R_C เท่ากับ 4,319 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง C – D



ภาพที่ 7.24 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553:81-91)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_C \times 6.00 - 1,200 \times 3.00 - 3,210 = 0$$

$$R_C \times 6.00 - 6,810 = 0$$

$$R_C = \frac{6,810}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_C = 1,135 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

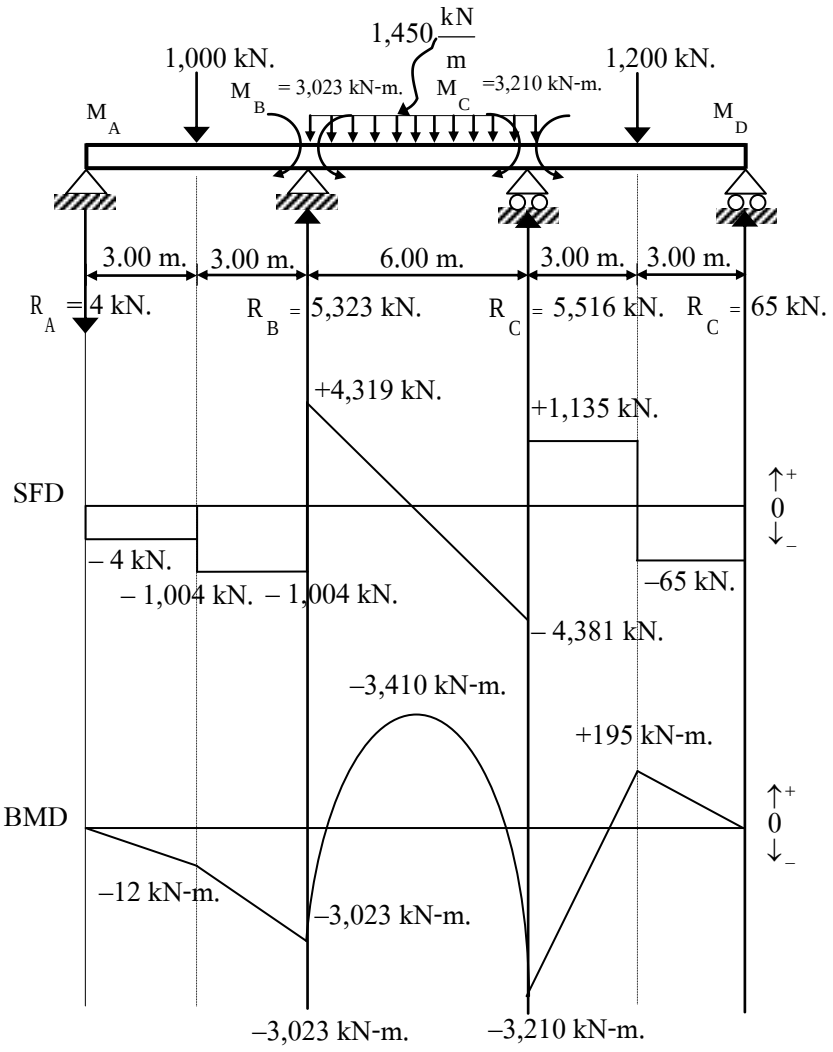
$$-R_D \times 6.00 + 1{,}200 \times 3.00 - 3{,}210 = 0$$

$$-R_D \times 6.00 + 390 = 0$$

$$\frac{390}{6.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_D = 65 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

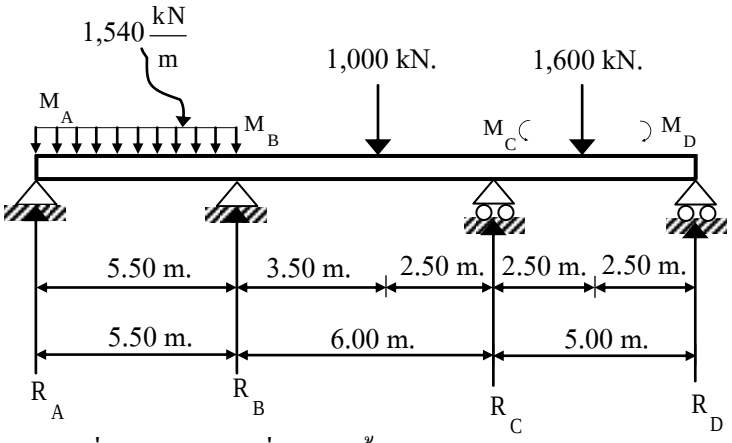
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุด 3,140 kN-m. และ R_D เท่ากับ 65 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.25 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553:81-91)

ตัวอย่างที่ 6 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ ดังแสดงในภาพที่ 7.26 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์



ภาพที่ 7.26 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:83)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A , M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2)$$

$$M_A(5.50) + 2M_B(5.50+6.00) + M_C(6.00) = -\frac{1{,}540 \times 5.50^3}{4} - \frac{1{,}000 \times 2.50}{5.50}(5.50^2 - 2.50^2)$$

$$0 + 23.00M_B + 6.00M_C = -64{,}054 - 10{,}909$$

$$23.00M_B + 6.00M_C = -74{,}963 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_B , M_C และ M_D รายละเอียด ดังนี้

$$M_B L_2 + 2M_C(L_2 + L_3) + M_C L_3 = -\frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) - \frac{P_3 d_3}{L_3}(L_3^2 - d_3^2)$$

$$M_B(6.00) + 2M_C(6.00+5.00) + M_D(5.00) = -\frac{1{,}000 \times 3.50}{6.00}(6.00^2 - 3.50^2) - \frac{1{,}600 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2)$$

$$6.00M_B + 22.00M_C + 0 = -13{,}854 - 15{,}000$$

$$6.00M_B + 22.00M_C = -28{,}854 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จากสมการที่ (1) $23.00M_B + 6.00M_C = -74,963$

จากสมการที่ (2) $\times 3.83 = 23.00M_B + 84.26M_C = -110,511$

$$-78.26M_C = +35,548$$

$$-M_C = +\frac{35,548}{78.26}$$

$$\therefore -M_C = 454 \text{ kN.-m}$$ -

แทนค่า M_C ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_B

$$23.00M_B + 6.00(-454) = -74,963$$

$$23.00M_B - 2,724 = -74,963$$

$$23.00M_B = -74,963 + 2,724$$

$$23.00M_B = -72,239$$

$$M_B = -\frac{72,239}{23.00}$$

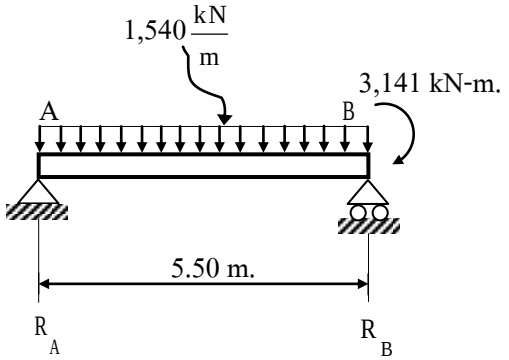
$$\therefore -M_B = 3,141 \text{ kN-m.}$$ -

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore -M_A = 0$

$$\therefore -M_B = 3,141 \text{ kN-m}$$

$$\therefore -M_C = 454 \text{ kN.-m}$$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.27 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:83)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.50 - 1{,}540 \times 5.50 \times \frac{5.50}{2} + 3{,}141 = 0$$

$$R_A \times 5.50 - 20{,}152 = 0$$

$$R_A \times 5.50 = 20{,}152$$

$$R_A = \frac{20{,}3152}{5.50}$$

$$\therefore \quad R_A = 3{,}664 \text{ kN.} \quad (\downarrow^{-})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.50 + 1{,}540 \times 5.50 \times \frac{5.50}{2} + 3{,}141 = 0$$

$$-R_B \times 4.50 + 26{,}434 = 0$$

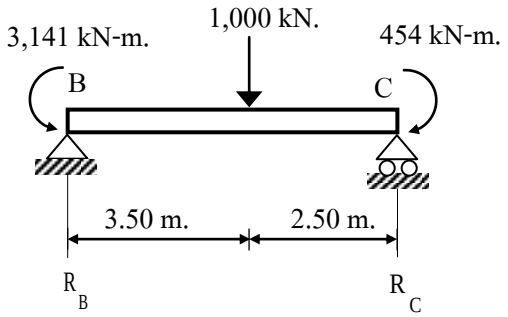
$$26{,}434 = R_B \times 5.50$$

$$\frac{26{,}434}{5.50} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 4{,}806 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 3,664 kN. และ R_B เท่ากับ 4,806 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.28 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:83)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 6.00 - 1{,}000 \times 2.50 - 3{,}141 + 454 = 0$$

$$R_B \times 6.00 - 5{,}187 = 0$$

$$R_B = \frac{5{,}187}{6.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 865 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 6.00 + 1{,}000 \times 3.50 + 454 - 3{,}141 = 0$$

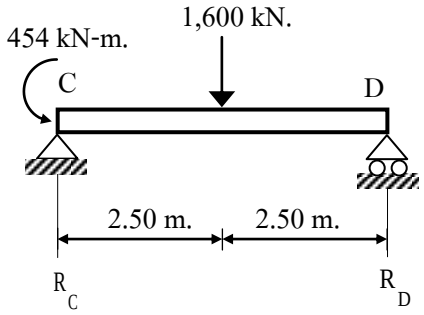
$$-R_C \times 6.00 + 813 = 0$$

$$\frac{813}{6.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 136 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_B เท่ากับ 865 kN. และ R_C เท่ากับ 136 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง C – D



ภาพที่ 7.29 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:83)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_C \times 5.00 - 1{,}600 \times 2.50 - 454 = 0$$

$$R_C \times 5.00 - 4{,}454 = 0$$

$$R_C = \frac{4,454}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_C = 891 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_D \times 5.00 + 1,600 \times 2.50 - 454 = 0$$

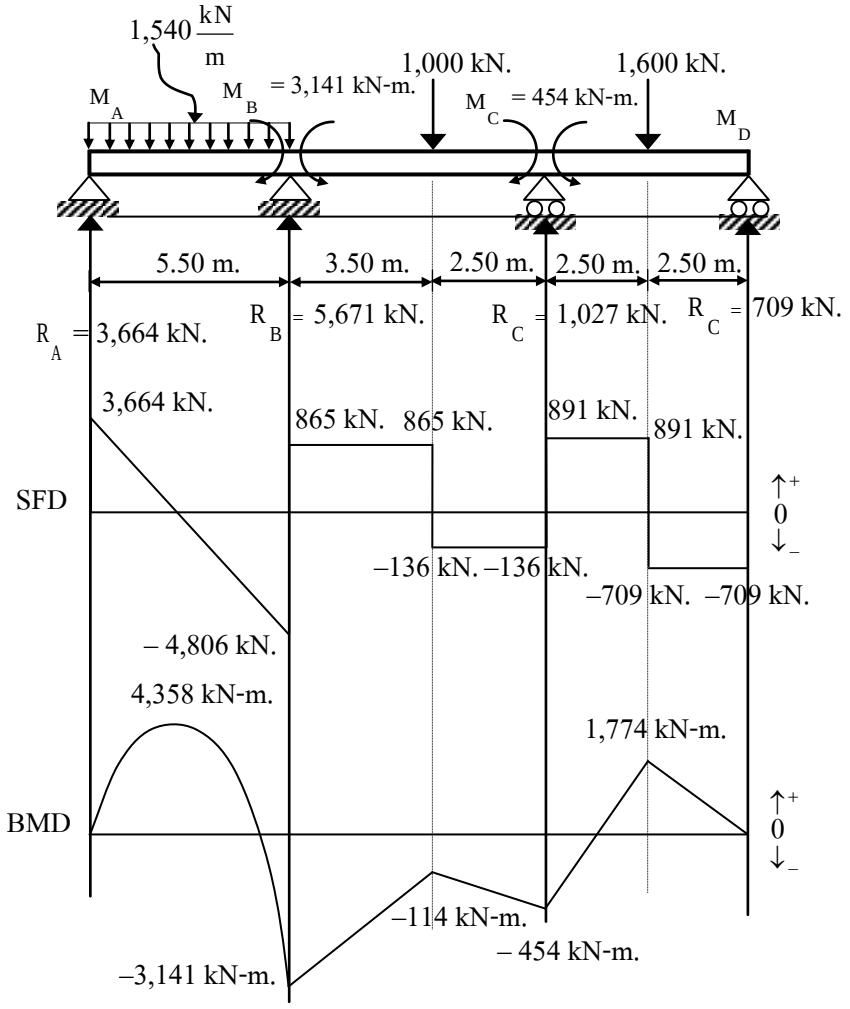
$$-R_D \times 5.00 + 3,546 = 0$$

$$\frac{3,546}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_D = 709 \text{ kN.} \quad (\uparrow^+)$$

ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 3141 kN-m. และ R_D เท่ากับ 709 kN. **ตอบ**

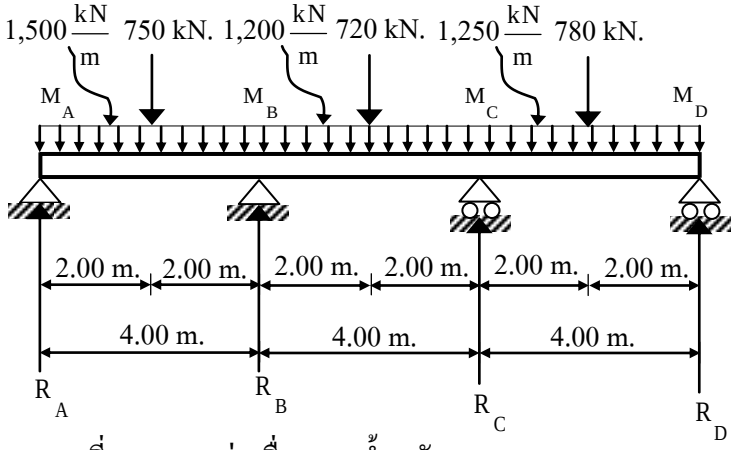
ดังแสดงในภาพที่ 7.10



ภาพที่ 7.30 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541:83)

ตัวอย่างที่ 7 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ ดังแสดงในภาพที่ 7.31พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์



ภาพที่ 7.31 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:254)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_A , R_B และ R_C ดังนี้

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A ,M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{P_1 d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) - \frac{W_2 L_2^3}{4}$$

$$M_A(4.00) + 2M_B(4.00+4.00) + M_C(4.00) = -\frac{750\times 2.00}{4.00}(4.00^2 - 2.00^2) - \frac{1,500\times 4.00^3}{4} - \frac{720\times 2.00}{4.00}(4.00^2 - 2.00^2) - \frac{1,200\times 4.00^3}{4}$$

$$0 + 16.00M_B + 4.00M_C = -4,500 - 24,000 - 4,320 - 19,200$$

$$16.00M_B + 4.00M_C = -30.420 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_B ,M_C และ M_D รายละเอียด ดังนี้

$$M_B L_2 + 2M_C(L_2 + L_3) + M_C L_3 = -\frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) - \frac{W_2 L_2^3}{4} - \frac{P_3 d_3}{L_3}(L_3^2 - d_3^2) - \frac{W_3 L_3^3}{4}$$

$$M_B(4.00)+2M_C(4.00+4.00)+M_D(4.00) = -\frac{720\times 2.00}{4.00}(4.00^2-2.00^2)-\frac{1,200\times 4.00^3}{4} -\frac{780\times 2.00}{4.00}(4.00^2-2.00^2)-\frac{1,250\times 4.00^3}{4}$$

$$4.00M_B+16.00M_C+0 = -4,320-19,200-4,680-20,000$$

$$4.00M_B+16.00M_C = -48,200 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จากสมการที่ (1) $16.00M_B+4.00M_C = -30,420$

จากสมการที่ (2) $\times 4 = 16.00M_B+64.00M_C = -192,800$

$$-60.00M_C = +162,380$$

$$-M_C = +\frac{162,380}{60.00}$$

$$\therefore\ -M_C = 2,706.33 \text{ kN.-m}\ \text{⟲}^{-}$$

แทนค่า M_C ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_B

$$16.00M_B+4.00(-2,706.33) = -30.420$$

$$16.00M_B-10,825.33 = -30.420$$

$$16.00M_B = -30.420+10,825.33$$

$$16.00M_B = -19,594.67$$

$$M_B = -\frac{19,594.67}{16.00}$$

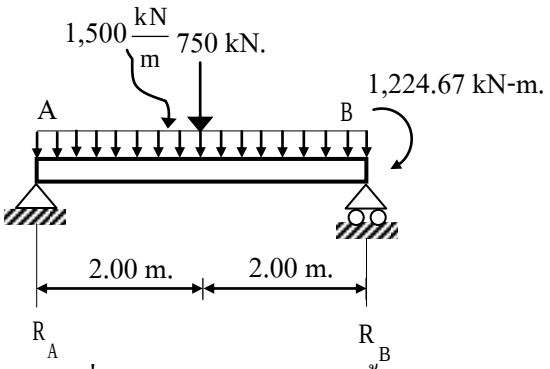
$$\therefore\ -M_B = 1,224.67 \text{ kN-m.}\ \text{⟲}^{-}$$

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore\ -M_A = 0$

$$\therefore\ -M_B = 1,224.67 \text{ kN-m}$$

$$\therefore\ -M_C = 2,706.33 \text{ kN.-m}$$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.32 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:254)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 1{,}500 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-750 \times 2.00 + 1{,}224.67$$

$$R_A \times 4.00 - 12{,}275.33 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = 12{,}275.33$$

$$R_A = \frac{12{,}275.33}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 3{,}068.83 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 1{,}500 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$+750 \times 2.00 + 1{,}224.67$$

$$-R_B \times 4.00 + 14{,}724.67 = 0$$

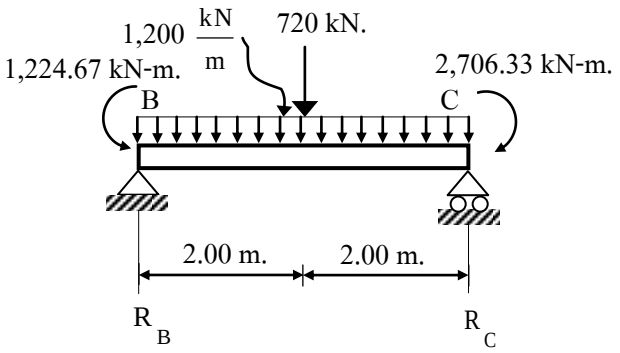
$$14{,}724.67 = R_B \times 4.00$$

$$\frac{14{,}724.67}{4.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 3{,}681.17 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 3,068.83 kN. และ R_B เท่ากับ 3,681.17 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.33 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:254)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 4.00 - 1,200 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-720 \times 2.00 - 1,224.67 + 2,706.33$$

$$R_B \times 4.00 - 9,558.34 = 0$$

$$R_B = \frac{9,558.33}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 2,389.60 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 4.00 + 1,200 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$+720 \times 2.00 + 2,706.33 - 1,224.67$$

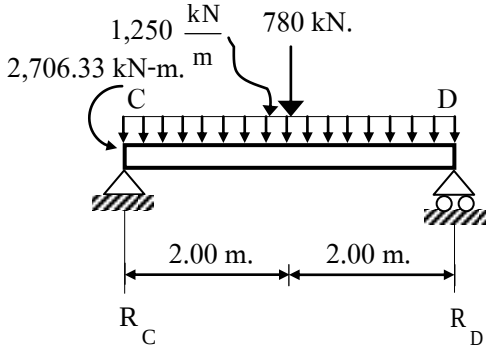
$$-R_C \times 4.50 + 12,521.66 = 0$$

$$\frac{12,521.66}{4.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 3,130.42 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_B เท่ากับ 2,389.60 kN. และ R_C เท่ากับ 3,130.42 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง C – D



ภาพที่ 7.34 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:254)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_C \times 4.00 - 1{,}250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

$$-780 \times 2.00 - 2{,}706.33$$

$$R_C \times 4.00 - 14{,}266.33 = 0$$

$$R_C = \frac{14{,}266.33}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_C = 3{,}566.60 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_D \times 4.00 + 1{,}250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} = 0$$

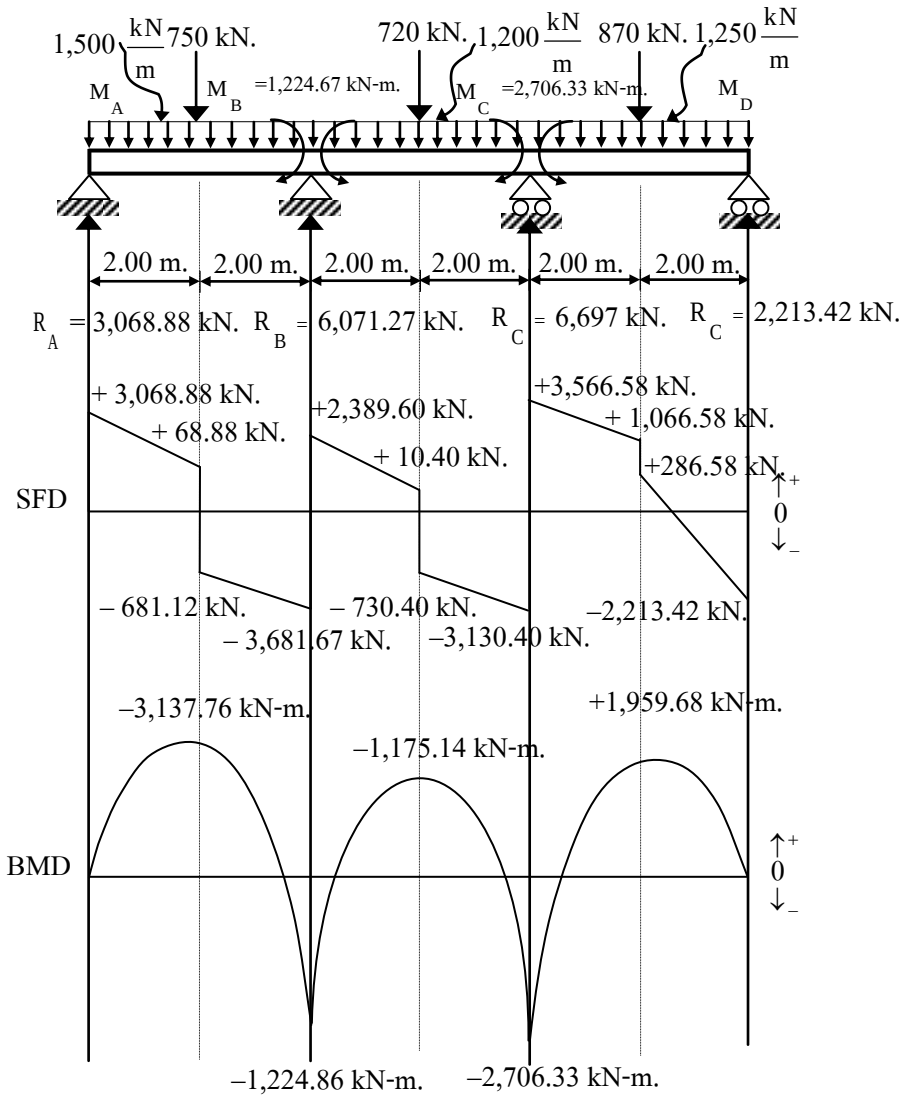
$$+780 \times 2.00 - 2{,}706.33$$

$$-R_D \times 4.50 + 11{,}816.98 = 0$$

$$\frac{8{,}853.42}{4.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_D = 2{,}213.58 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

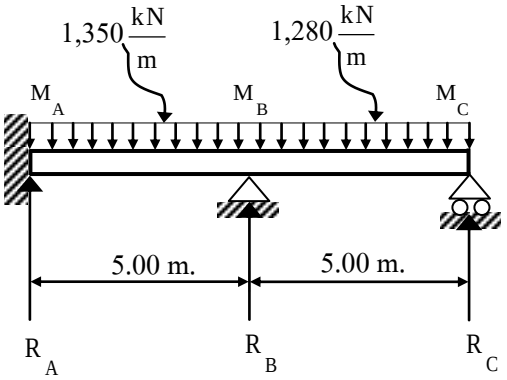
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 2,706.33 kN-m. และ R_D เท่ากับ 2,213.58 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.35 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : J.B.Wilbur (1965:254)

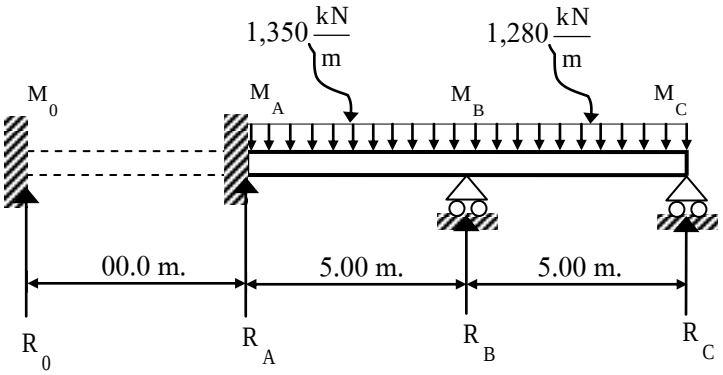
ตัวอย่างที่ 8 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.36



ภาพที่ 7.36 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_0 , R_A และ R_B ดังนี้

เขียนแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) รายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 7.37 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_0 ,M_A และ M_B รายละเอียด ดังนี้

$$M_0 L_0 + 2M_A (L_0 + L_1) + M_B L_1 = -\frac{W_0 L_0^3}{4} - \frac{W_1 L_1^3}{4} -$$

$$M_0 (0.00) + 2M_A (0.00+5.00) + M_B (5.00) = -\frac{0 \times 0.00^3}{4} - \frac{1{,}350 \times 5.00^3}{4}$$

$$0+10.00M_A+5.00M_B = -42,188$$

$$10.00M_A+5.00M_B = -42,188 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A ,M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_A L_2+2M_B(L_2+L_3)+M_C L_3 = -\frac{W_1 L_1^3}{4}-\frac{W_2 L_2^3}{4}-$$

$$M_A(5.00)+2M_B(5.00+5.00)+M_C(5.00) = -\frac{1,350\times 5.00^3}{4}-\frac{1,280\times 5.00^3}{4}$$

$$5.00M_A+10.00M_B+0 = -42,188-40,000$$

$$5.00M_A+10.00M_B = -82,188 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จากสมการที่ (1) $10.00M_A+5.00M_B = -42,188$

จากสมการที่ (2) $\times 2 = 10.00M_A+20.00M_B = -164,376$

$$-15.00M_B = +122,188$$

$$-M_B = +\frac{122,188}{15.00}$$

$$\therefore\ -M_B = 8,146 \text{ kN.-m}\ \circlearrowright^{-}$$

แทนค่า M_C ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_B

$$10.00M_B+5.00(-8,146) = -42,188$$

$$10.00M_A-40,730 = -42,188$$

$$10.00M_A = -42,188+40,730$$

$$10.00M_A = -1,458$$

$$M_A = -\frac{1,458}{10.00}$$

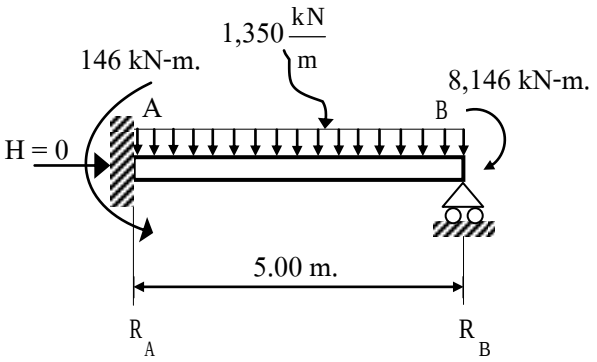
$$\therefore\ -M_A = 146 \text{ kN-m.}\ \circlearrowright^{-}$$

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore\ -M_A = 146$ kN-m

$\therefore\ -M_B = 8,146$ kN-m

$\therefore\ -M_C = 0$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.38 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1,350 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-146 + 8,146$$

$$R_A \times 5.00 - 8,875 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 8,875$$

$$R_A = \frac{8,875}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 1,775 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1,350 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$+8,146 - 146$$

$$-R_B \times 5.00 + 24,875 = 0$$

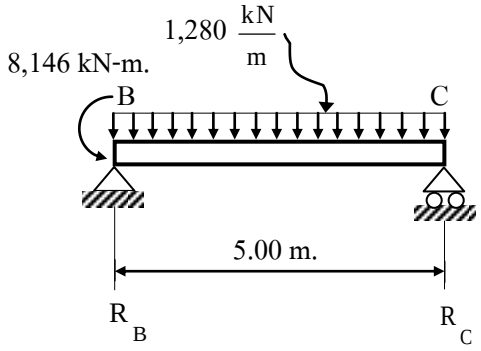
$$24,875 = R_B \times 5.00$$

$$\frac{24,875}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 4,975 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 1,775 kN. และ R_B เท่ากับ 4,975 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.39 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 5.00 - 1,280 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} + 8,146 = 0$$

$$R_B \times 5.00 - 3,193.80 = 0$$

$$R_B = \frac{24,146}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4,829 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

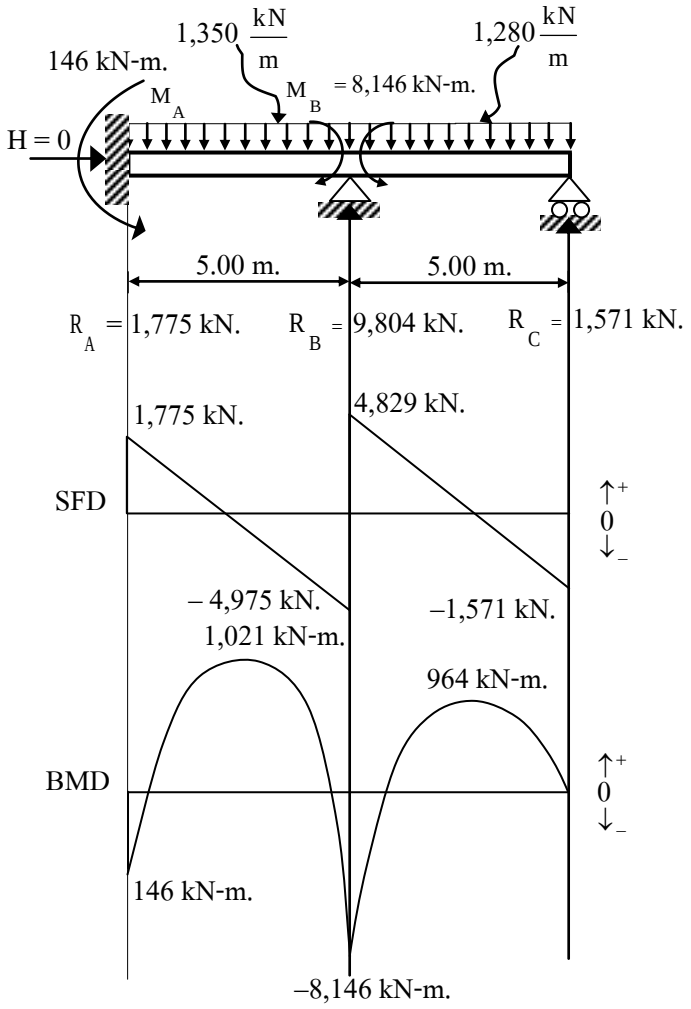
$$-R_C \times 5.00 + 1,280 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} - 8,146 = 0$$

$$-R_C \times 5.00 + 7,854 = 0$$

$$\frac{7,851}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 1,571 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

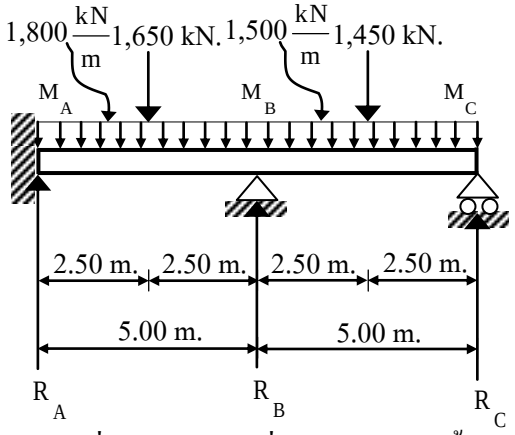
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุดเท่ากับ 8,146 kN-m. และ R_C เท่ากับ 1,571 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.40 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:151)

ตัวอย่างที่ 9 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ดังแสดงในภาพที่ 7.41 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์

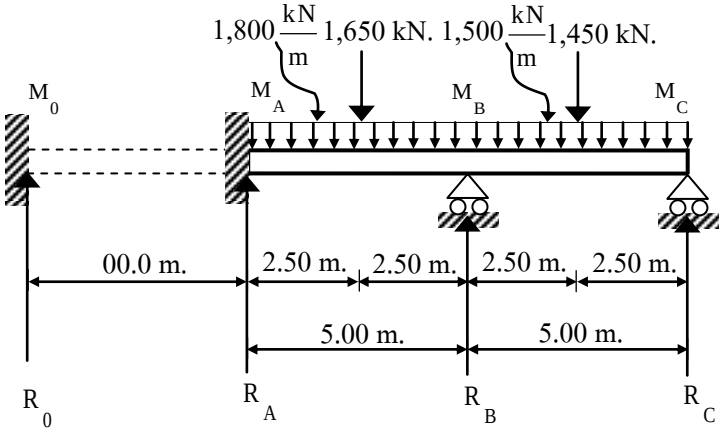


ภาพที่ 7.41 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:140)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_0 , R_A และ R_B ดังนี้

เขียนแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) รายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 7.42 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:140)

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_0 ,M_A และ M_B รายละเอียด ดังนี้

$$M_0L_0 + 2M_A(L_0 + L_1) + M_BL_1 = -0 - \frac{W_1L_1^3}{4} - \frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2)$$

$$M_0(0.00) + 2M_A(0.00 + 5.00) + M_B(5.00) = -\frac{1{,}800 \times 5.00^3}{4} - \frac{1{,}650 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2)$$

$$0 + 10.00M_A + 5.00M_B = -56{,}250 - 15{,}469$$

$$10.00M_A + 5.00M_B = -71719 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A ,M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_AL_2 + 2M_B(L_2 + L_3) + M_CL_3 = -\frac{W_1L_1^3}{4} - \frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{W_2L_2^3}{4} - \frac{P_2d_{21}}{L_2}(L_2^2 - d_2^2)$$

$$M_A(5.00) + 2M_B(5.00 + 5.00) + M_C(5.00) = -\frac{1{,}800 \times 5.00^3}{4} - \frac{1{,}650 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2) - \frac{1{,}500 \times 5.00^3}{4} - \frac{1{,}450 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2)$$

$$5.00M_A + 10.00M_B + 0 = -56{,}250 - 15{,}469 - 46{,}875 - 13{,}594$$

$$5.00M_A + 10.00M_B = -132{,}188 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จากสมการที่ (1) $= -71719$

$$10.00M_A + 5.00M_B$$

จากสมการที่ (2) $\times 2 = -164{,}376$

$$10.00M_A + 20.00M_B$$

$$-15.00M_B = +192{,}657$$

$$-M_B = +\frac{192{,}657}{15.00}$$

$$\therefore\ -M_B = 12{,}844 \text{ kN.-m} \circlearrowleft$$

แทนค่า M_C ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_B

$$10.00M_A + 5.00(-12{,}844) = -71719$$

$$10.00M_A - 64{,}220 = -71719$$

$$10.00M_A = -71719 + 64{,}220$$

$$10.00M_A = -7,499$$

$$M_A = -\frac{7,499}{10.00}$$

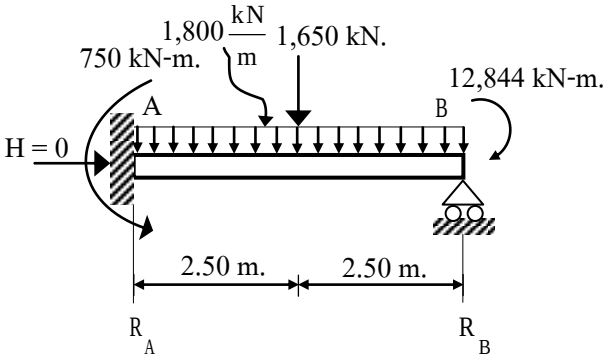
$$\therefore -M_A = 750 \text{ kN-m.}$$

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore -M_A = 750$ kN-m

$$\therefore -M_B = 12,844 \text{ kN-m}$$

$$\therefore -M_C = 0$$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.43 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:140)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ (+ ↺ -)

$$R_A \times 5.00 - 1,800 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-1,650 \times 2.50 - 750 + 12,844$$

$$R_A \times 5.00 - 14,531 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 14,531$$

$$R_A = \frac{14,531}{5.00}$$

$$\therefore R_A = 2,906 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ (+ ↺ -)

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}800 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$+1{,}650 \times 2.50 - 750 + 12{,}844$$

$$-R_B \times 5.00 + 38{,}719 = 0$$

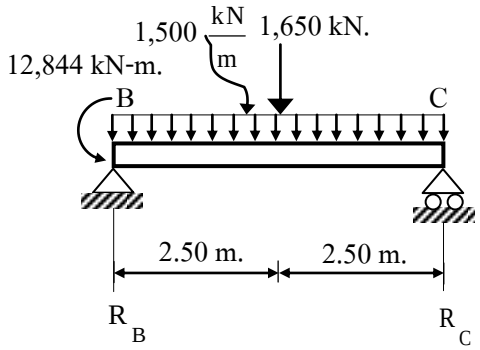
$$38{,}719 = R_B \times 5.00$$

$$\frac{38{,}719}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 7{,}744 \text{ kN.} \ (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 2,906 kN. และ R_B เท่ากับ 7,744 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.44 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:140)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 5.00 - 1{,}500 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-1{,}450 \times 2.50 - 12{,}844$$

$$R_B \times 5.00 - 35{,}219 = 0$$

$$R_B = \frac{35{,}219}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 7{,}044 \text{ kN.} \ (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 5.00 + 1{,}500 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

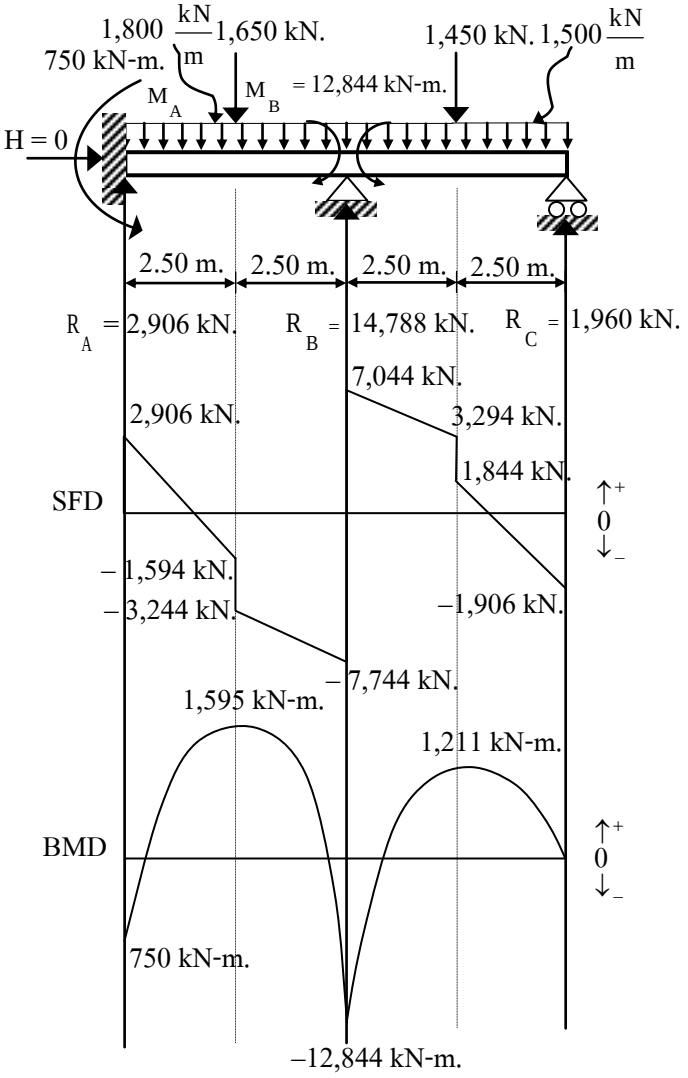
$$+1{,}450 \times 2.50 - 12{,}844$$

$$-R_C \times 5.00 + 9{,}531 = 0$$

$$\frac{9{,}531}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 1{,}906 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

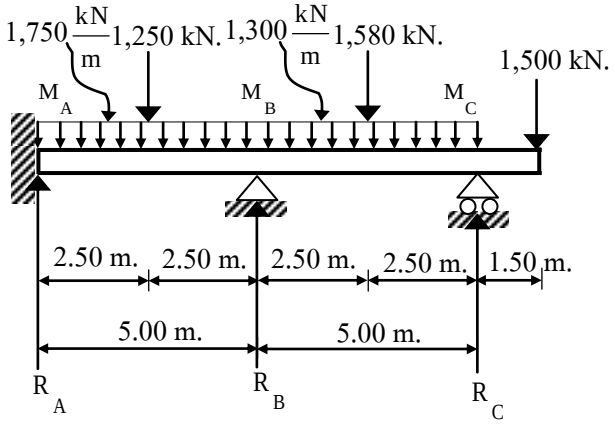
ดังนั้น โมเมนต์ดัดสูงสุด เท่ากับ 12,844 kN-m. และ R_C เท่ากับ 1,906 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.45 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:140)

ตัวอย่างที่ 10 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.46

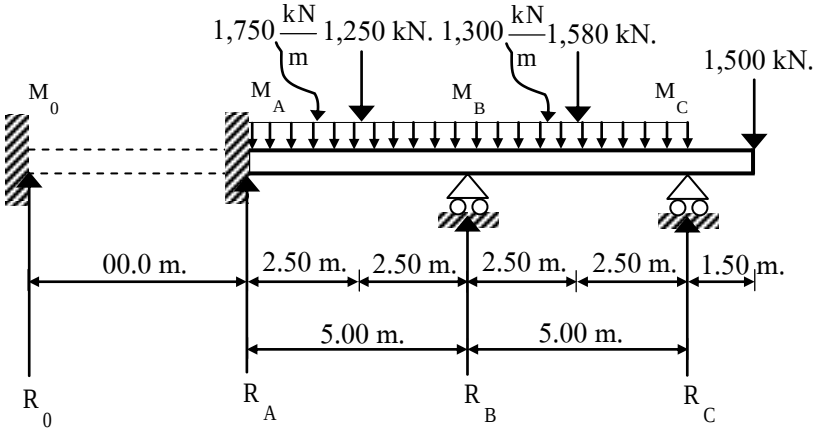


ภาพที่ 7.46 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:144)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_0 , R_A และ R_B ดังนี้

เขียนแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) รายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 7.47 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:144)

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_0 ,M_A และ M_B รายละเอียด ดังนี้

$$M_0L_0 + 2M_A(L_0 + L_1) + M_BL_1 = -0 - \frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{W_1L_1^3}{4}$$

$$M_0(0.00) + 2M_A(0.00 + 5.00) + M_B(5.00) = -\frac{1{,}250 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2) - \frac{1{,}750 \times 5.00^3}{4}$$

$$0 + 10.00M_A + 5.00M_B = -11{,}719 - 54{,}688$$

$$10.00M_A + 5.00M_B = -66{,}407 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A ,M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_AL_2 + 2M_B(L_2 + L_3) + M_CL_3 = -\frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{W_1L_1^3}{4} - \frac{W_2L_2^3}{4} - \frac{P_2d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2)$$

$$M_A(5.00) + 2M_B(5.00 + 5.00) + M_C(5.00) = -\frac{1{,}250 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2) - \frac{1{,}750 \times 5.00^3}{4} - \frac{1{,}580 \times 2.50}{5.00}(5.00^2 - 2.50^2) - \frac{1{,}300 \times 5.00^3}{4}$$

$$5.00M_A + 10.00M_B + (-2{,}250 \times 5.00) = -11{,}719 - 54{,}688 - 14{,}813 - 40{,}625$$

$$5.00M_A + 10.00M_B - 11{,}250 = -11{,}719 - 54{,}688 - 14{,}813 - 40{,}625$$

$$5.00M_A + 10.00M_B = -121{,}845 + 11{,}250$$

$$5.00M_A + 10.00M_B = -110{,}595 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จากสมการที่ (1) $\quad 10.00M_A + 5.00M_B = -66{,}407$

จากสมการที่ (2) $\times 2 = 10.00M_A + 20.00M_B = -221{,}190$

$$-15.00M_B = +154{,}783$$

$$-M_B = +\frac{154{,}783}{15.00}$$

$$\therefore\ -M_B = 10{,}319 \text{ kN.-m} \circlearrowleft$$

แทนค่า M_C ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_B

$$10.00M_A + 5.00(-10{,}319) = -66{,}407$$

$$10.00M_A - 51{,}595 = -66{,}407$$

$$10.00M_A = -66,407+51,595$$

$$10.00M_A = -14,812$$

$$M_A = -\frac{14,812}{10.00}$$

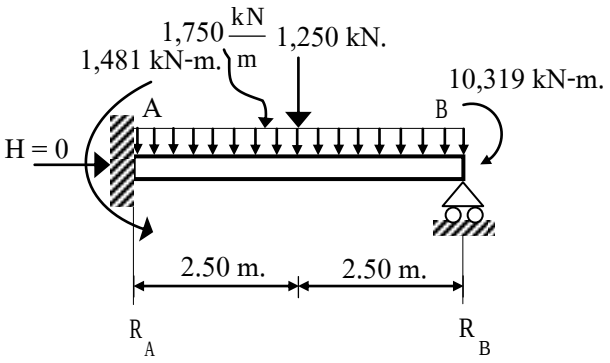
$$\therefore \ -M_A = 1,481 \text{ kN-m.} \ \overset{-}{)}$$

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore \ -M_A = 1,481$ kN-m

$\therefore \ -M_B = 10,319$ kN-m

$\therefore \ -M_C = 0$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.48 คานช่วงเดียวและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:144)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $\overset{+}{(\ )}\overset{-}{}$

$$R_A \times 5.00 - 1,750 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-1,250 \times 2.50 - 1,481 + 10,319$$

$$R_A \times 5.00 - 16,162 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 16,162$$

$$R_A = \frac{16,162}{5.00}$$

$$\therefore \ R_A = 3,232 \text{ kN.} \ (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1{,}750 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$+1{,}250 \times 2.50 - 1{,}481 + 10{,}319$$

$$-R_B \times 5.00 + 33{,}838 = 0$$

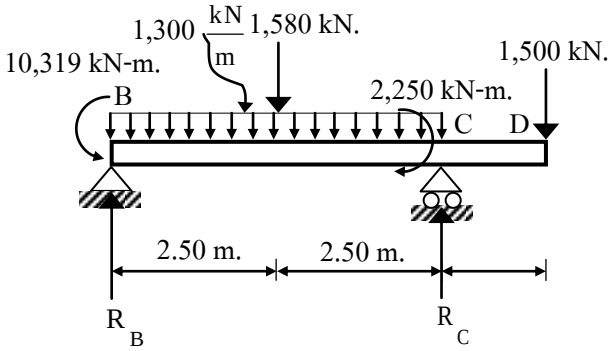
$$33{,}838 = R_B \times 5.00$$

$$\frac{33{,}838}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 6{,}768 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 3,232 kN. และ R_B เท่ากับ 6,768 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.49 คานช่วงเดียวปลายยื่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:144)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 5.00 - 1{,}300 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

$$-1{,}580 \times 2.50 - 10{,}319 + 2{,}250$$

$$R_B \times 5.00 - 35{,}219 = 0$$

$$R_B = \frac{35{,}219}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 5{,}654 \text{ kN. } (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 5.00 + 1{,}300 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} = 0$$

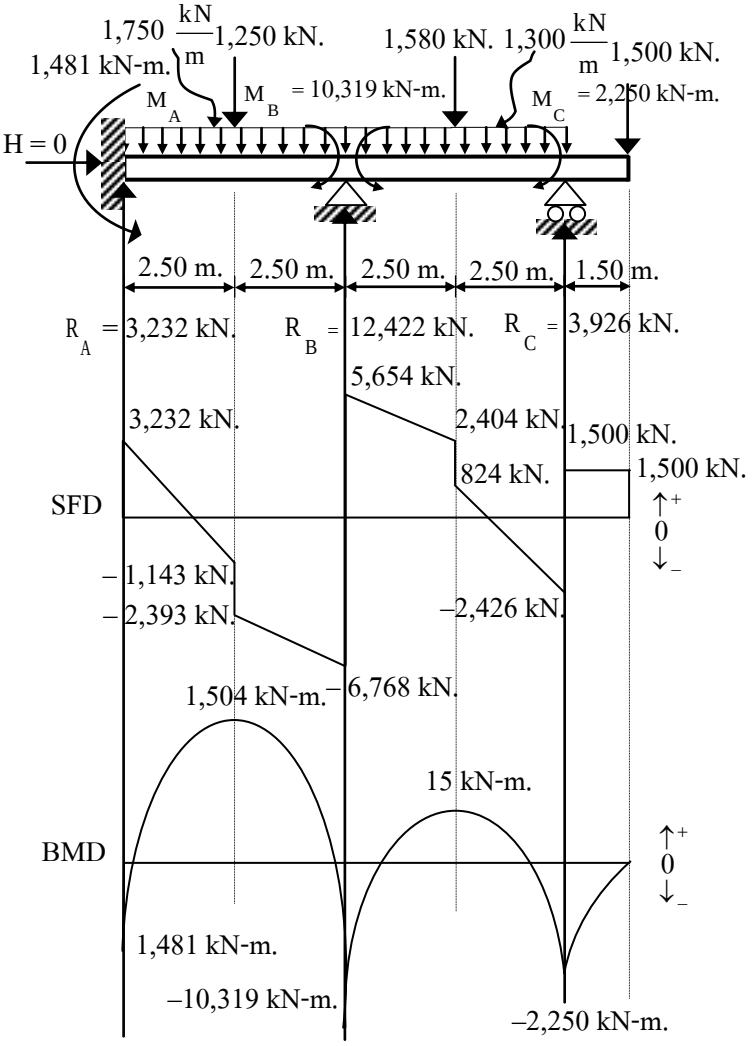
$$+1{,}580 \times 2.50 - 10{,}319 + 2{,}250$$

$$-R_C \times 5.00 + 12{,}131 = 0$$

$$\frac{12{,}131}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 2{,}426 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

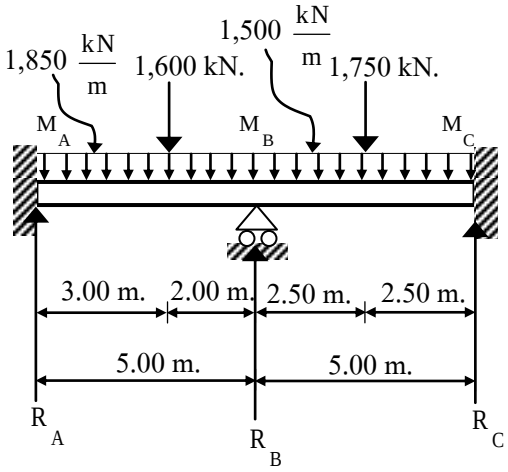
ดังนั้น โมเมนต์สูงสุด เท่ากับ 10,319 kN. และ R_C เท่ากับ 3,926 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.50 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:144)

ตัวอย่างที่ 11 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ดังแสดงในภาพที่ 7.51 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์

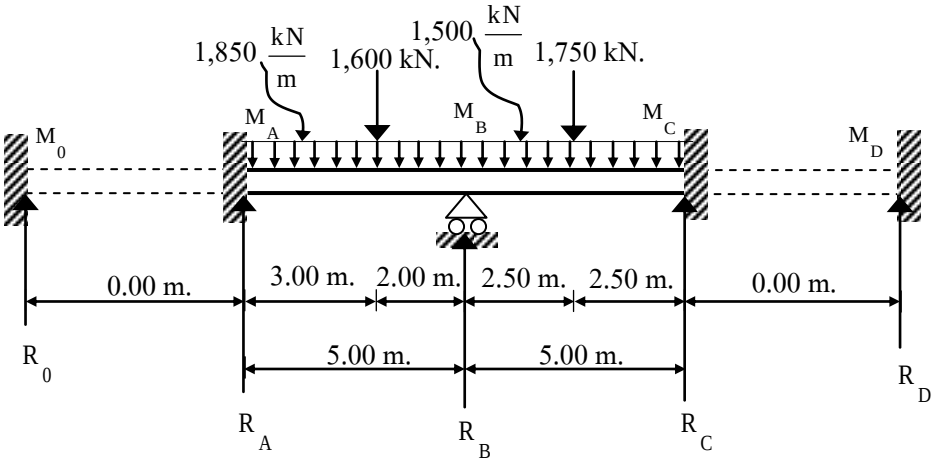


ภาพที่ 7.51 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Jan J. Tuma (1969:255)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_0 , R_A และ R_B ดังนี้

เขียนแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) รายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 7.52 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Jan J. Tuma (1969:255)

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_0 ,M_A และ M_B รายละเอียด ดังนี้

$$M_0L_0+2M_A(L_0+L_1)+M_BL_1 = -\frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2-d_1^2)-\frac{W_1L_1^3}{4}$$

$$M_0(0.00)+2M_A(0.00+5.00)+M_B(5.00) = -\frac{1,600\times 2.00}{5.00}(5.00^2-2.00^2)-\frac{1,850\times 5.00^3}{4}$$

$$0+10.00M_A+5.00M_B = -13,440-57,813$$

$$10.00M_A+5.00M_B = -71,253\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A ,M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_AL_1+2M_B(L_1+L_2)+M_CL_2 = -\frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2-d_1^2)-\frac{W_1L_1^3}{4}$$
$$-\frac{P_2d_2}{L_2}(L_2^2-d_2^2)-\frac{W_2L_2^3}{4}$$

$$M_A(5.00)+2M_B(5.00+5.00)+M_C(5.00) = -\frac{1,600\times 3.00}{5.00}(5.00^2-3.00^2)-\frac{1,850\times 5.00^3}{4}$$
$$-\frac{1,750\times 2.50}{5.00}(5.00^2-2.50^2)-\frac{1,500\times 5.00^3}{4}$$

$$5.00M_A+20.00M_B+5.00M_C = -15,360-57,813-16,406-46,875$$

$$5.00M_A+20.00M_B+5.00M_C = -136,454\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_B,M_C และ M_D รายละเอียด ดังนี้

$$M_BL_2+2M_B(L_2+L_3)+M_CL_3 = -\frac{P_2d_2}{L_2}(L_2^2-d_2^2)-\frac{W_2L_2^3}{4}-0$$

$$M_B(5.00)+2M_C(5.00+0.00)+M_D(0.00) = -\frac{1,750\times 2.50}{5.00}(5.00^2-2.50^2)-\frac{1,500\times 5.00^3}{4}$$

$$5.00M_B+10.00M_C+0 = -16,406-46,875$$

$$5.00M_B+10.00M_C = -63,281\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

จากสมการที่ (1) $10.00M_A+5.00M_B = -71,253$

จากสมการที่ (2) $\times 2 = 10.00M_A+40.00M_B+10.00M_C = -201,655$

$$-35.00M_B-10.00M_C = +130,402\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

จากสมการที่ (3) $5.00M_B+10.00M_C = -63,281$

จากสมการที่ (4) $-35.00M_B - 10.00M_C = +130,402$

$-30M_B = +67,121$

$M_B = -\frac{67,121}{30.00}$

$\therefore -M_B = 2,237$ kN.-m ↻-

แทนค่า M_B ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_A

$10.00M_A + 5.00(-2,237) = -71,253$

$10.00M_A - 11,185 = -71,253$

$10.00M_A = -71,253+11,185$

$10.00M_A = -60,068$

$M_A = -\frac{60,068}{10.00}$

$\therefore -M_A = 6,007$ kN-m. ↻-

แทนค่า M_B ในสมการที่ 3 เพื่อหา M_C

$5.00(-2,237)+10.00M_C = -63,281$

$10.00M_C - 11,185 = -63,281$

$10.00M_C = -63,281+11,185$

$10.00M_C = -52,096$

$M_C = -\frac{52,096}{10.00}$

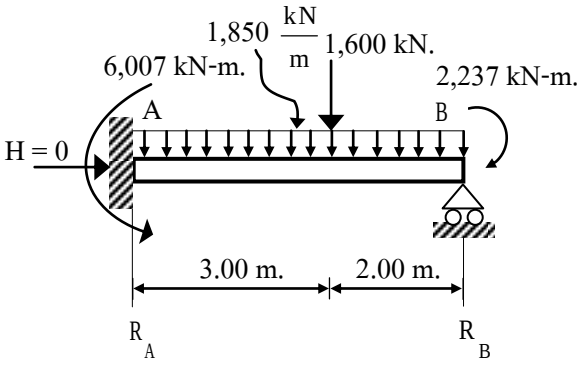
$\therefore -M_C = 5,210$ kN-m. ↻-

ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore -M_A = 6,007$ kN-m

$\therefore -M_B = 2,237$ kN-m

$\therefore -M_C = 5,210$ kN-m

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.53 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Jan J. Tuma (1969:255)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 5.00 - 1,850 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} - 1,600 \times 2.00 = 0$$

$$-6,007+2,237$$

$$R_A \times 5.00 - 30,095 = 0$$

$$R_A \times 5.00 = 30,095$$

$$R_A = \frac{30,095}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 6,019 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 5.00 + 1,850 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} + 1,600 \times 3.00 = 0$$

$$-6,007+2,237$$

$$-R_B \times 5.00 + 24,155 = 0$$

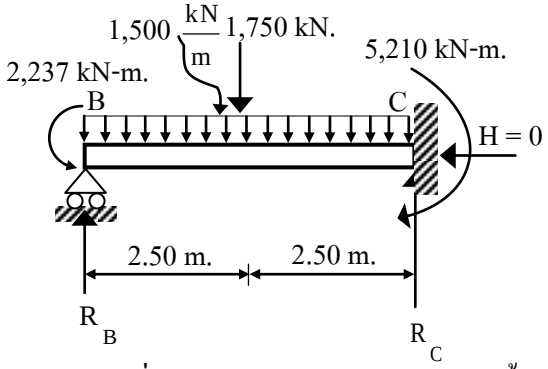
$$24,155 = R_B \times 5.00$$

$$\frac{24,155}{5.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 4,831 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 6,019 kN. และ R_B เท่ากับ 4,831 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.54 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Jan J. Tuma (1969:255)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}\overset{-}{}$

$$R_B \times 5.00 - 1,500 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} - 1,750 \times 2.50 = 0$$

$$-2,237 + 5,210$$

$$R_B \times 5.00 - 20,152 = 0$$

$$R_B = \frac{20,152}{5.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 4,030 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $\overset{+}{\circlearrowleft}\overset{-}{}$

$$-R_C \times 5.00 + 1,500 \times 5.00 \times \frac{5.00}{2} + 1,750 \times 2.50 = 0$$

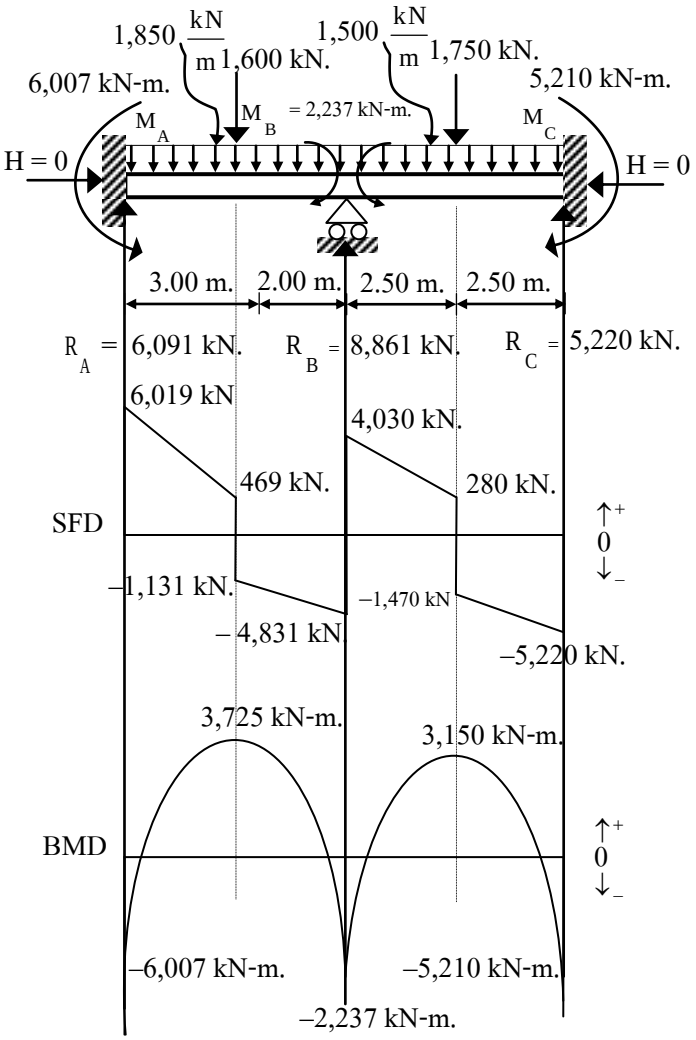
$$-2,237 + 5,210$$

$$-R_C \times 4.00 + 26,098 = 0$$

$$\frac{26,098}{5.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 5,220 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

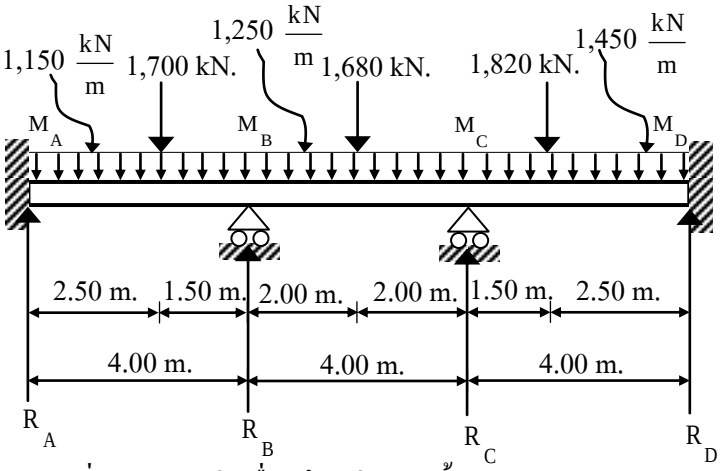
ดังนั้น โมเมนต์ดัดสูงสุดเท่ากับ 6,007 kN-m. และ R_C เท่ากับ 5,220 kN. **ตอบ**



ภาพที่ 7.55 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : Jan J. Tuma (1969:255)

ตัวอย่างที่ 12 จงวิเคราะห์โครงสร้างคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.56

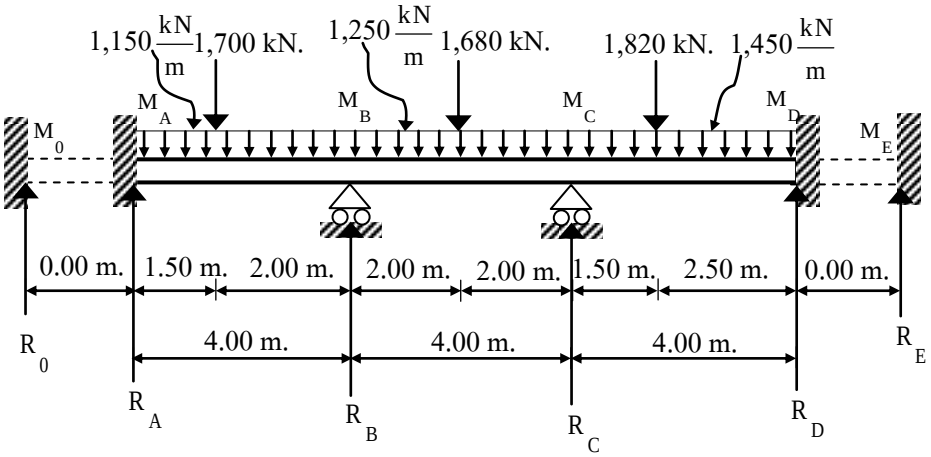


ภาพที่ 7.56 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:379-383)

ใช้วิธีการหาโดยวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) คำนวณหาโมเมนต์ที่จุดรองรับ R_0 , R_A และ R_B ดังนี้

เขียนแผนภาพอิสระ (Free Body Diagram) รายละเอียด ดังนี้



ภาพที่ 7.57 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:379-383)

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_0 ,M_A และ M_B รายละเอียด ดังนี้

$$M_0L_0+2M_A(L_0+L_1)+M_BL_1 = -0-\frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2-d_1^2)-\frac{W_1L_1^3}{4}$$

$$M_0(0.00)+2M_A(0.00+4.00)+M_B(4.00) = -\frac{1,700\times 2.50}{4.00}(4.00^2-2.50^2)-\frac{1,150\times 4.00^3}{4}$$

$$0+8.00M_A+4.00M_B = -10,359-18,400$$

$$8.00M_A+4.00M_B = -28,759\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_A ,M_B และ M_C รายละเอียด ดังนี้

$$M_AL_1+2M_B(L_1+L_2)+M_CL_2 = -\frac{P_1d_1}{L_1}(L_1^2-d_1^2)-\frac{W_1L_1^3}{4}-\frac{P_2d_2}{L_2}(L_2^2-d_2^2)-\frac{W_2L_2^3}{4}$$

$$M_A(4.00)+2M_B(4.00+4.00)+M_C(4.00) = -\frac{1,700\times 1.50}{4.00}(4.00^2-1.50^2)-\frac{1,150\times 4.00^3}{4}-\frac{1,680\times 2.00}{4.00}(4.00^2-2.00^2)-\frac{1,250\times 4.00^3}{4}$$

$$4.00M_A+16.00M_B+4.00M_C = -8,766-18,400-10,080-20,000$$

$$4.00M_A+16.00M_B+4.00M_C = -57,246\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_B ,M_C และ M_D รายละเอียด ดังนี้

$$M_BL_2+2M_C(L_2+L_3)+M_DL_3 = -\frac{P_2d_2}{L_2}(L_2^2-d_2^2)-\frac{W_2L_2^3}{4}-\frac{P_3d_3}{L_3}(L_3^2-d_3^2)-\frac{W_3L_3^3}{4}$$

$$M_B(4.00)+2M_C(4.00+4.00)+M_D(4.00) = -\frac{1,680\times 2.00}{4.00}(4.00^2-2.00^2)-\frac{1,250\times 4.00^3}{4}-\frac{1,820\times 2.50}{4.00}(4.00^2-2.50^2)-\frac{1,450\times 4.00^3}{4}$$

$$4.00M_B+16.00M_C+4.00M_D = -10,080-20,000-11,091-23,200$$

$$4.00M_B+16.00M_C+4.00M_D = -64,371\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

พิจารณาสมการโมเมนต์ M_C, M_D และ M_E รายละเอียด ดังนี้

$$M_C L_3 + 2M_D(L_3 + L_4) + M_E L_4 = -\frac{P_3 d_3}{L_3}(L_3^2 - d_3^2) - \frac{W_3 L_3^3}{4} - 0$$

$$M_C(4.00) + 2M_D(4.00+0.00) + M_E(0.00) = -\frac{1{,}820 \times 1.50}{4.00}(4.00^2 - 1.50^2) - \frac{1{,}450 \times 4.00^3}{4}$$

$$4.00M_C + 8.00M_D = -9{,}384 - 23{,}200$$

$$4.00M_C + 8.00M_D = -32{,}584 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

จากสมการที่ (1) $\quad 8.00M_A + 4.00M_B = -28{,}759$

จากสมการที่ (2) $\times 2 = 8.00M_A + 32.00M_B + 8.00M_C = -114{,}492$

$$-28.00M_B - 8.00M_C = +85{,}733 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

จากสมการที่ (3) $\times 2 = 8.00M_B + 32.00M_C + 8.00M_D = -128{,}742$

จากสมการที่ (4) $\quad 4.00M_C + 8.00M_D = -32{,}584$

$$8.00M_B + 28.00M_C = -96{,}158 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

จากสมการที่ (6) $\quad 8.00M_B + 28.00M_C = -96{,}158$

จากสมการที่ (5) $\times 3.5 = -98.00M_B - 28.00M_C = -85{,}733$

$$-90.00M_B = -181{,}891$$

$$M_B = -\frac{181{,}891}{90.00}$$

$$\therefore \quad -M_B = 2{,}021 \text{ kN.-m} \;\circlearrowright$$

แทนค่า M_B ในสมการที่ 1 เพื่อหา M_A

$$8.00M_A + 4.00(-2{,}021) = -28{,}759$$

$$8.00M_A - 8{,}084 = -28{,}759$$

$$8.00M_A = -28{,}759 + 8{,}084$$

$$8.00M_A = -20{,}675$$

$$M_A = -\frac{20{,}675}{8.00}$$

$$\therefore \quad -M_A = 2{,}584 \text{ kN-m.} \;\circlearrowleft$$

แทนค่า M_A และ M_B ในสมการที่ 2 เพื่อหา M_C

$$4.00\,(-2,584)+16.00\,(-2,021)+4.00M_C = -57,246$$

$$4.00M_C - 10,336 - 32,336 = -57,246$$

$$4.00M_C = -57,246+42,672$$

$$4.00M_C = -14,574$$

$$M_C = -\frac{14,574}{4.00}$$

$$\therefore \quad -M_C = 3,644 \text{ kN-m.} \;\text{)}^{-}$$

แทนค่า M_C ในสมการที่ 4 เพื่อหา M_D

$$4.00\,(-3,644)+8.00M_D = -32,584$$

$$8.00M_D - 14,576 = -32,584$$

$$4.00M_D = -32,584+14,576$$

$$4.00M_D = -18,008$$

$$M_D = -\frac{18,008}{4.00}$$

$$\therefore \quad -M_D = 4,502 \text{ kN-m.} \;\text{)}^{-}$$

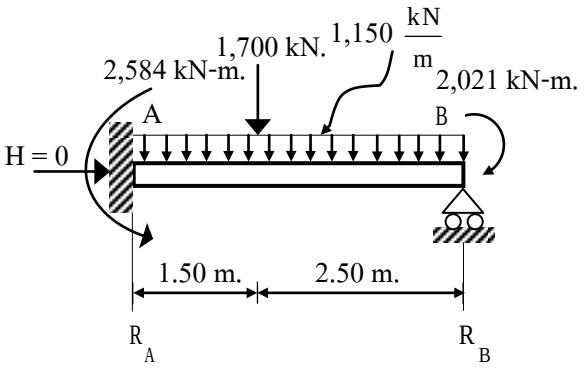
ดังนั้น โมเมนต์ลบ $\therefore \quad -M_A = 2,584$ kN-m.

$$\therefore \quad -M_B = 2,021 \text{ kN.-m}$$

$$\therefore \quad -M_C = 3,644 \text{ kN-m.}$$

$$\therefore \quad -M_D = 4,502 \text{ kN-m.}$$

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง A - B



ภาพที่ 7.58 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:379-383)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด A

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_A \times 4.00 - 1{,}150 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} - 1{,}700 \times 2.50 = 0$$

$$-2{,}584 + 2{,}021$$

$$R_A \times 4.00 - 14{,}013 = 0$$

$$R_A \times 4.00 = 15{,}073$$

$$R_A = \frac{14{,}013}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_A = 3{,}503 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด A ; $\Sigma M_A = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_B \times 4.00 + 1{,}150 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} + 1{,}700 \times 1.50 = 0$$

$$-2{,}584 + 2{,}021$$

$$-R_B \times 4.00 + 11{,}187 = 0$$

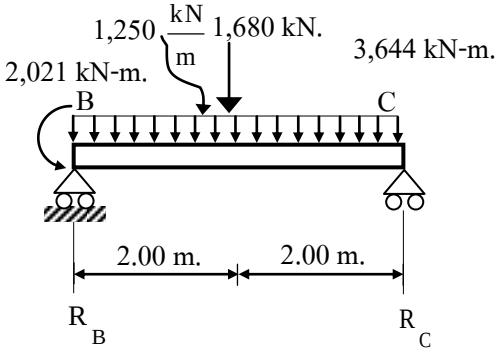
$$11{,}187 = R_B \times 4.00$$

$$\frac{11{,}187}{4.00} = R_B$$

$$\therefore \quad R_B = 2{,}797 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_A เท่ากับ 3,503 kN. และ R_B เท่ากับ 2,797 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง B – C



ภาพที่ 7.59 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:379-383)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด B

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด C ; $\Sigma M_C = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_B \times 4.00 - 1,250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} - 1,680 \times 2.00 = 0$$

$$-2,021 + 3,644$$

$$R_B \times 4.00 - 11,737 = 0$$

$$R_B = \frac{11,737}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_B = 2,934 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_C \times 4.00 + 1,250 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} + 1,680 \times 2.00 = 0$$

$$-2,021 + 3,644$$

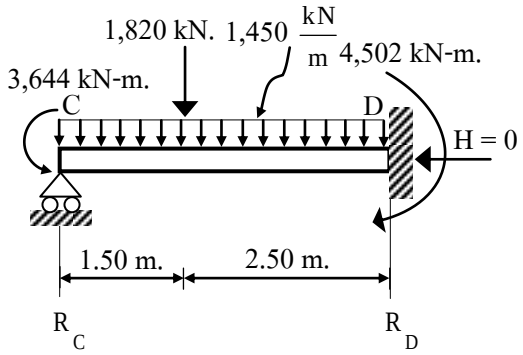
$$-R_C \times 4.00 + 14,983 = 0$$

$$\frac{14,983}{4.00} = R_C$$

$$\therefore \quad R_C = 3,746 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น แรงเฉือนสูงสุดเท่ากับ R_B เท่ากับ 2,934 kN. และ R_C เท่ากับ 3,746 kN. **ตอบ**

หาแรงปฏิกิริยา ช่วง C – D



ภาพที่ 7.60 คานช่วงเดียวยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:379-383)

วิธีทำ

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด D ; $\Sigma M_D = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$R_C \times 4.00 - 1,450 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} - 1,820 \times 2.50 = 0$$

$$-3,644 + 4,502$$

$$R_C \times 5.00 - 15,293 = 0$$

$$R_C = \frac{15,293}{4.00}$$

$$\therefore \quad R_C = 3,823 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

คำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุด C

ผลรวมของโมเมนต์ รอบจุด B ; $\Sigma M_B = 0$ $^{+}\circlearrowleft^{-}$

$$-R_D \times 4.00 + 1,450 \times 4.00 \times \frac{4.00}{2} + 1,820 \times 1.50 = 0$$

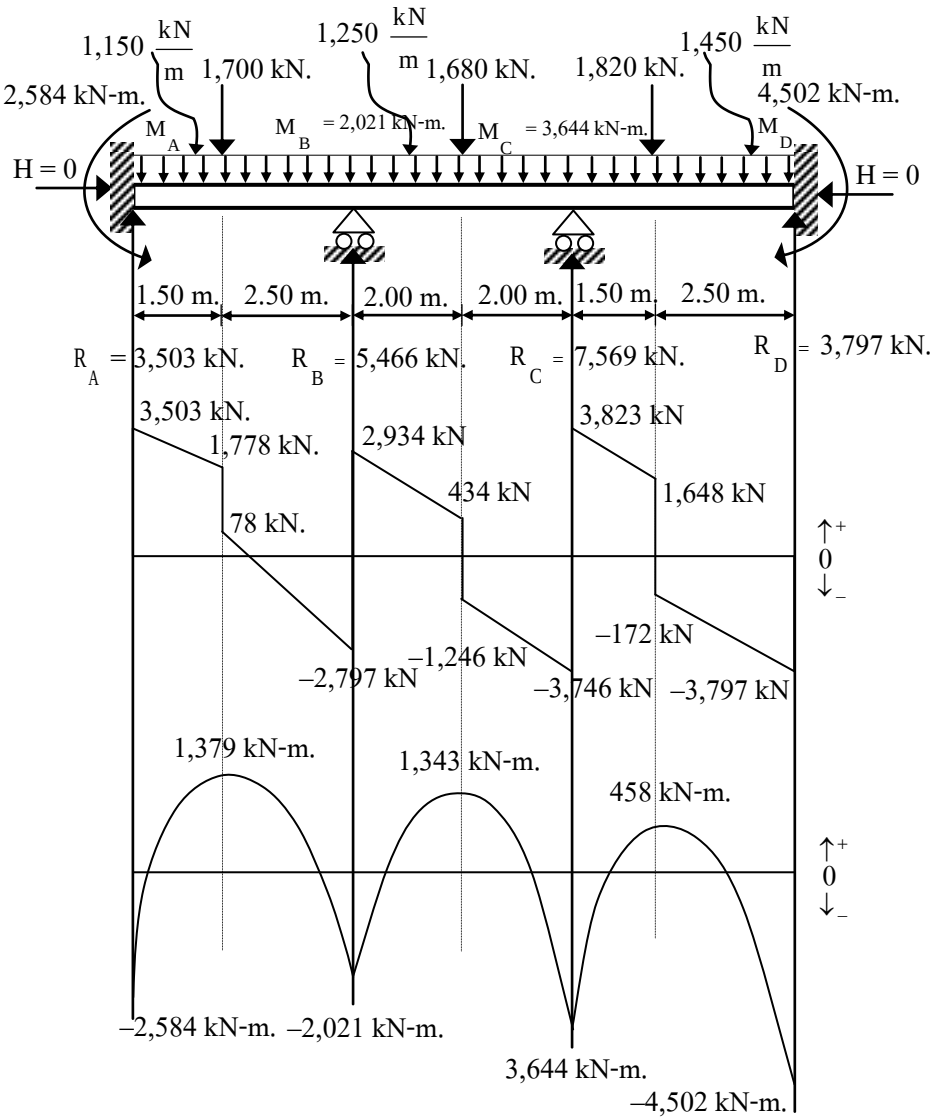
$$-3,644 + 4,502$$

$$-R_D \times 4.00 + 15,188 = 0$$

$$\frac{15,188}{4.00} = R_C$$

$$\therefore \quad -R_D = 3,797 \text{ kN.} \quad (\uparrow^{+})$$

ดังนั้น โมเมนต์ดัดสูงสุด เท่ากับ 4,502 kN. และ R_D เท่ากับ 3,797 kN. **ตอบ**



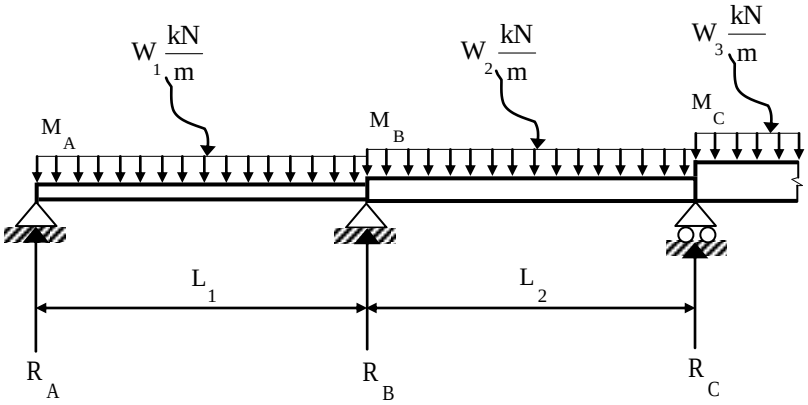
ภาพที่ 7.61 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:379-383)

บทสรุป

1. น้ำหนักที่กระทำเป็นน้ำหนักแผ่กระจาย (Uniform Load)

1) น้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน



ภาพที่ 7.62 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักไม่เท่ากัน ความยาวไม่เท่ากัน

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:249)

วิธีสามสมการ(Three Moment Equation) สำหรับคานดังภาพที่ 7.62 รายละเอียดดังนี้

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_1 L_2^3}{4} \quad \text{.....(7.1)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_C .....kN-m

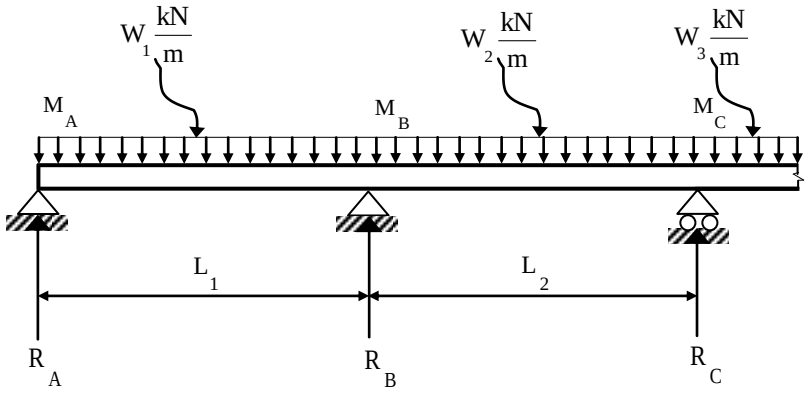
L_1 = ความยาวของคานด้านซ้ายมือ .....m

L_2 = ความยาวของคานด้านขวามือ .....m

W_1 = น้ำหนักแผ่กระจายด้านซ้ายมือ .....kN-m

W_2 = น้ำหนักแผ่กระจายด้านขวามือ .....kN-m

2) น้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน



ภาพที่ 7.63 คานคานต่อเนื่องน้ำหนักเท่ากัน ความยาวเท่ากัน

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:249)

วิธีสามสมการ (Three Moment Equation) สำหรับคานดังภาพที่ 7.63 รายละเอียด ดังนี้

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{WL^2}{2} \quad \text{.....(7.2)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_C .....kN-m

L_1 = ความยาวของคานด้านซ้ายมือ .....m

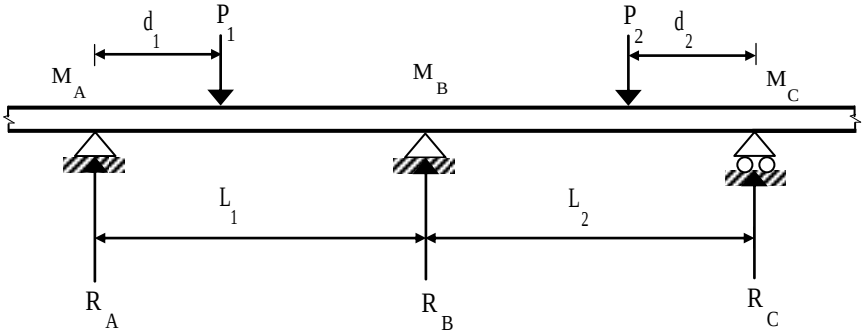
L_2 = ความยาวของคานด้านขวามือ .....m

W_1 = น้ำหนักแผ่กระจายที่คานด้านซ้ายมือ.....kN-m

W_2 = น้ำหนักแผ่กระจายที่คานด้านขวามือ .....kN-m

2. น้ำหนักที่มากระทำเป็นน้ำหนักที่ลงเป็นจุด (Concentrate Load)

1) น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน



ภาพที่ 7.64 น้ำหนักไม่เท่ากัน ระยะน้ำหนักลงต่างกัน ความยาวคานไม่เท่ากัน

ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:250)

$$M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{P_1 d_1}{L_1}(L_1^2 - d_1^2) - \frac{P_2 d_2}{L_2}(L_2^2 - d_2^2) \quad \text{.....(7.3)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบซึ่งอยู่ตรงกลางตรงตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านขวามือตรงกับ R_C .....kN-m

L_1 = ความยาวของคานด้านซ้ายมือ .....m

L_2 = ความยาวของคานด้านขวามือ .....m

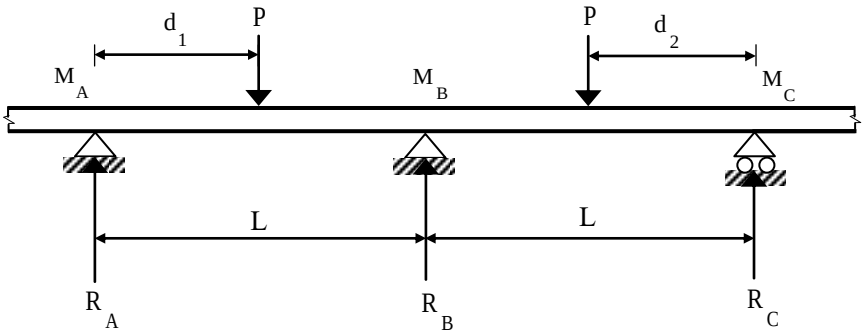
P_1 = น้ำหนักลงเป็นจุดที่คานด้านซ้ายมือ .....kN-m

P_2 = น้ำหนักลงเป็นจุดที่คานด้านขวามือ .....kN-m

d_1 = ระยะของน้ำหนักที่ลงเป็นจุดจาก R_A .....m

d_2 = ระยะของน้ำหนักที่ลงเป็นจุดจาก R_C .....m

2) น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคาน ความยาวคานเท่ากัน



ภาพที่ 7.65 น้ำหนักลงเป็นจุดลงเท่ากันและลงที่จุดกึ่งกลางคานความยาวคานเท่ากัน
ที่มา : ชาญชัย จารุจินดา (2521:250-251)

$$M_A + 4M_B + M_C = -\frac{3}{4}PL \quad \text{.....(7.4)}$$

ในเมื่อ :

M_A = โมเมนต์ลบด้านซ้ายมือตรงกับ R_A .....kN-m

M_B = โมเมนต์ลบซึ่งอยู่ตรงกลางตรงตรงกับ R_B .....kN-m

M_C = โมเมนต์ลบด้านขวามือตรงกับ R_C .....kN-m

L = ความยาวของคาน.....m

P = น้ำหนักลงเป็นจุด.....kN

3. โมเมนต์ลบ (Negative Moment)

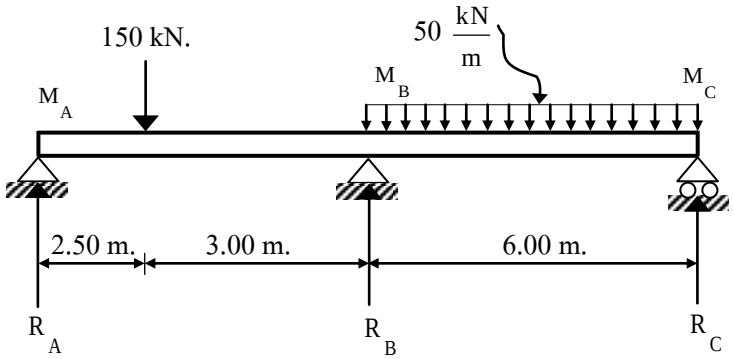
ในการหาโมเมนต์ลบสำหรับคานต่อเนื่อง โดยใช้สมการวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) นั้นวิธีการทำเราจะเริ่มต้นที่จุดแรกคือด้านริมสุดของคานและนับต่อไปอีก 2 จุด โดยจุดแรกให้เป็น M_A โดยเราจะหาค่าโมเมนต์พร้อมกันไปทีละ 3 จุด ใน 1 สมการ คือ M_A , M_B และ M_C ถ้ามีคานหลายช่วงต่อเนื่องกันไปเรื่อยๆ

4. โมเมนต์บวก (Positive Moment)

ในการหาค่าโมเมนต์บวก โดยใช้สมการของวิธีสามสมการ (Three Moment Equation) โดยตรงไม่มีทิศทางการหาค่าของโมเมนต์บวกสำหรับคานต่อเนื่องนั้น ใช้วิธีหาจากภาพไดอะแกรมของแรงเฉือน (Share Diagram) โดยใช้พื้นที่จากภาพไดอะแกรมของแรงเฉือนลบด้วยค่าของโมเมนต์ลบจะได้ค่าของโมเมนต์บวก วิธีการหานั้นจะหาได้จากภาพไดอะแกรมของแรงเฉือนจากซ้ายมือมาขวามือหรือจากขวามาซ้ายก็ได้ ค่าที่ได้รับจะเท่ากัน

แบบฝึกหัด

1. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.66 ($M_A = 0$, $M_B = -197.11$, $M_C = -0$) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติก่อนเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 7.66 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : R.C.Hibbelerh Russell (2545:125)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

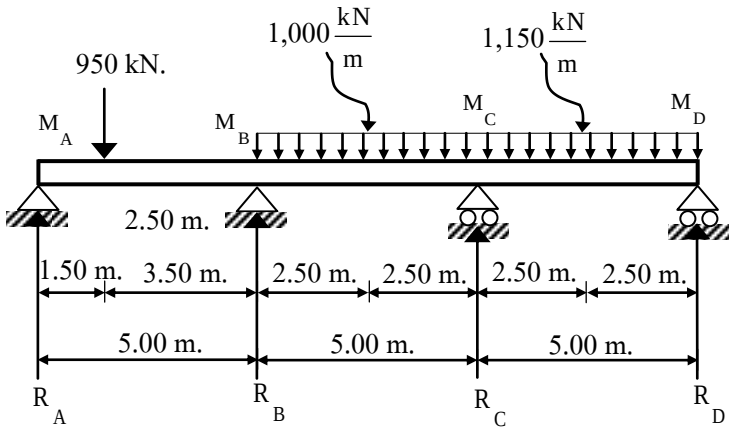
.....

.....

.....

.....

2. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ดังแสดงในภาพที่ 7.67 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ($M_A = 0$, $M_B = -1{,}077$, $M_C = -3{,}247$) และใช้ทดสอบภาคปฏิบัติหลังเรียน (30 นาที)



ภาพที่ 7.67 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2524:263-265)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

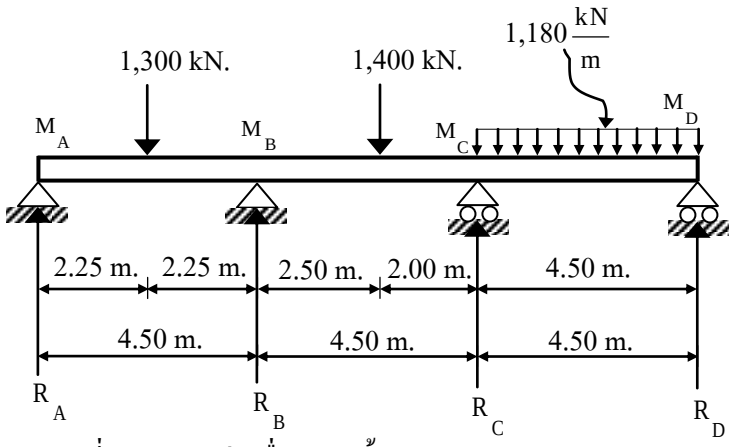
……

……

……

……

3. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.68 ($M_A = 0$, $M_B = -625$, $M_C = -1{,}942$)



ภาพที่ 7.68 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2524:263-275)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

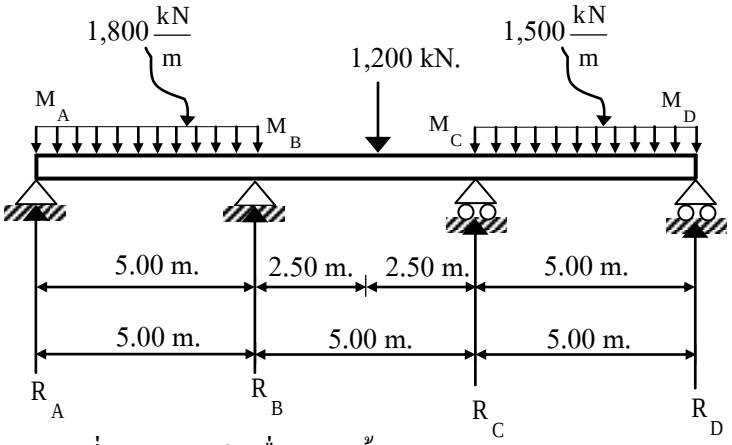
.....

.....

.....

.....

4. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ดังแสดงในภาพที่7.69 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ($M_A = 0$, $M_B = -2{,}825$, $M_C = -2{,}200$)



ภาพที่ 7.69 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : พิมาน ชาญวานิชบริการ (2541:85)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

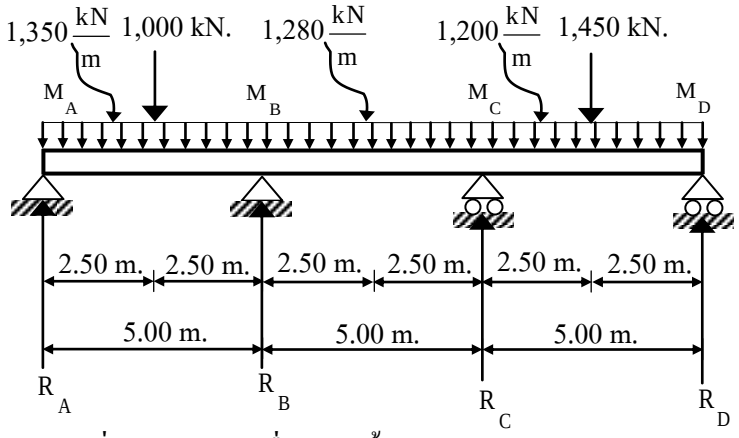
.....

.....

.....

.....

5. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.70 ($M_A = 0$, $M_B = -3{,}669$, $M_C = -3{,}639$)



ภาพที่ 7.70 คานต่อเนื่องและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สุรศักดิ์ รายี. (2552:56)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

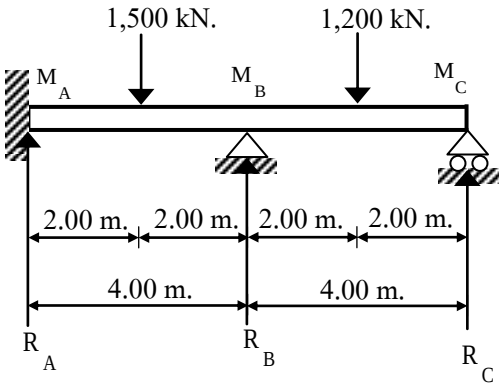
.....

.....

.....

.....

6. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ ดังแสดงในภาพที่ 7.71 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ($M_A = -707$, $M_B = -836$, $M_C = -0$)



ภาพที่ 7.71 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535:52)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

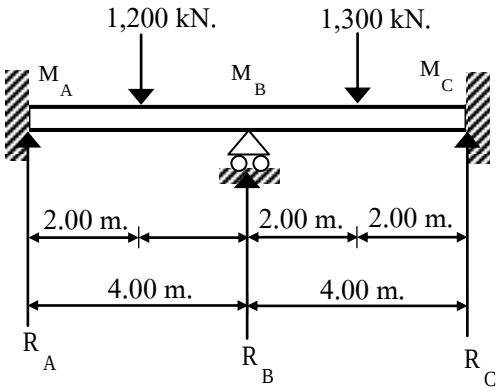
……

……

……

……

7. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ ดังแสดงในภาพที่ 7.72 พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ($M_A = -455$, $M_B = -890$, $M_C = -530$)



ภาพที่ 7.72 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : วินิต ช่อวิเชียร (2524:151)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

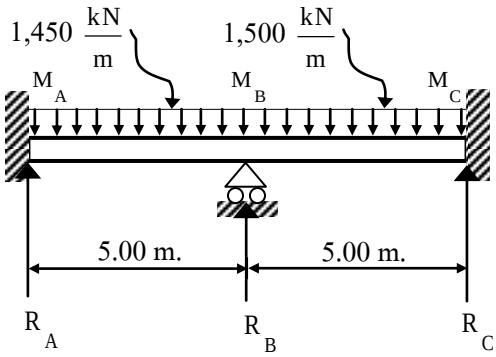
.....

.....

.....

.....

8. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 7.73 ($M_A = -117$, $M_B = -9{,}297$, $M_C = -39$)



ภาพที่ 7.73 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:150)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) วัตถุประสงค์ก็คือการหาค่าโมเมนต์ลบก่อนเสมอ

..... 2. ในการหาโมเมนต์ แรงปฏิกิริยา แผนภาพแรงเฉือน ของคานต่อเนื่องเราสามารถใช้สำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)

..... 3. สำหรับวิธีการหาวิธีสมการสามโมเมนต์ผู้ศึกษาจะต้องหาครั้งละสามสมการ

..... 4. สมการคานต่อเนื่องที่มีดีกรีอินดีเทอมิเนทต่ำไม่สามารถหาโมเมนต์ลบโดยวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)

..... 5. ในการวิเคราะห์คานต่อเนื่องสำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ที่มีการพาดหลายๆ ช่วงอาจทำได้โดยการรวมผลของการวิเคราะห์ซึ่งมาจากน้ำหนักบรรทุกเสมออย่างเดียวเท่านั้น

..... 6. ส่วนวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือสมการซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ดัดตั้งแต่สองจุดขึ้นไปก่อนเสมอ

..... 7. สำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะใช้เพื่อหาโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับในคานต่อเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกนั้นๆ

..... 8. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดสามจุดของคานต่อเนื่องเมื่อรับน้ำหนักบรรทุก

..... 9. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) เป็นคานต่อเนื่องที่อยู่ในประเภทโครงสร้างแบบอินดีเทอมิเนท

..... 10. โครงสร้างอย่างยาก (Indetermination) ไม่เหมาะสมกับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)

แบบทดสอบหลังเรียน

คำสั่ง ตอนที่ 4 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องสำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. เป็นโครงสร้างอย่างง่าย (Determinate)
   ข. เป็นโครงสร้างอย่างยาก (Indeterminate)
   ค. เป็นโครงสร้างธรรมดา (Simple Beam)
   ง. เป็นโครงสร้างชนิดฐานรองรับน้ำหนักภายใน (Hing Support)
2. ขอใดกล่าวไม่ถูกต้องการวิเคราะห์โครงสร้างแบบต่อเนื่อง คือข้อใด
   ก. ในการหาโมเมนต์ดัดของคานต่อเนื่องใช้วิธีคานต่อเนื่อง (Continuous Beam)
   ข. ในการหาแรงปฏิกิริยาได้จะต้องหาโมเมนต์ลบก่อนเสมอ (Negative Reaction)
   ค. ในการคำนวณหาโมเมนต์ลบจะใช้วิธี (Slope Deflection)
   ง. ในการคำนวณหาโมเมนต์ลบของคานต่อเนื่องจะใช้วิธีพื้นที่ (Moment Area)และคานเสมือน (Conjugate Beam)
3. ผู้ที่คิดค้นแนวคิดทฤษฎีวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation คือข้อใด
   ก. คาติกิโน (Castigliano)
   ข. เฮนริก มูลเลอร์ เบย์ลูร์ (Heinrich Muller-Breslan)
   ค. รัสเซล ฮิบเบอร์เลอร์ (Russell Hibbeler)
   ง. ชาปิยยอน (Clapeyron)
4. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) แตกต่างจากพื้นที่ (Moment Area) และคานเสมือน (Conjugate Beam) คือข้อใด
   ก. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ใช้หาโมเมนต์บวกและหาแรงปฏิกิริยา
   ข. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ใช้หาโมเมนต์ลบและหาแรงปฏิกิริยา
   ค. วิธีสมการพื้นที่ (Moment Area) ใช้หาโมเมนต์ลบและหาแรงปฏิกิริยา
   ง. วิธีสมการของคานเสมือน (Conjugate Beam) ใช้หาโมเมนต์ลบและหาแรงปฏิกิริยา

5. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องสำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดตรงกลางของจุดฐานรองรับ
   ข. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดสามจุดของคานต่อเนื่อง
   ค. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดริมสุดของคานต่อเนื่อง
   ง. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดเริ่มต้นและริมสุดของคานต่อเนื่อง
6. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) มีความหมายที่ถูกต้องแตกต่างจากวิธีคือข้อใด
   ก. เป็นสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับต่างๆ สำหรับคานต่อเนื่อง
   ข. เป็นสมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแผนภาพแรงเฉือนของคานต่อเนื่อง
   ค. สมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างของโมเมนต์ดัดของคานต่อเนื่อง
   ง. สมการที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างแผนภาพของโมเมนต์ดัดของคานต่อเนื่อง
7. ขั้นตอนเริ่มในการวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. เริ่มต้นด้วยการถอดแรงส่วนเกินออกตรงกลางจะเหลือฐานรองรับริมนอกสุด 2 ฐานรองรับ
   ข. เริ่มต้นด้วยการถอดแรงส่วนเกินออกนอกริมสุด 2 ฐานรองรับ
   ค. เริ่มต้นด้วยการถอดแรงส่วนเกินริมนอกด้านซ้ายออกต่อจากนั้นถอดแรงตรงกลางตรงจุดที่รองรับออกทำตามในขั้นตอนอย่างนี้ไปเรื่อยๆ
   ง. ถอดแรงส่วนเกินออกถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของความยาวเป็นส่วนเกิน
8. เมื่อโครงสร้างของคานต่อเนื่องสำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ได้ปลดปล่อยแล้วตรงกลางจะเป็นคานลักษณะอย่างไร คือข้อใด
   ก. เป็นคานต่อเนื่อง (Continuous Beam) จำนวน 3 ช่วง
   ข. เป็นคานต่อเนื่อง (Continuous Beam) จำนวน 2 ช่วง
   ค. เป็นคานอย่างง่าย (Simple Beam) จำนวน 1 ช่วง
   ง. เป็นคานอย่างง่าย (Simple Beam) จำนวน 2 ช่วง

9. หลักการรวมผลของวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ประกอบไปด้วยค่าสมการไม่เกินกี่ค่า คือข้อใด
   ก. สมการละไม่เกิน 5 ค่า
   ข. สมการละไม่เกิน 4 ค่า
   ค. สมการละไม่เกิน 3 ค่า
   ง. สมการละไม่เกิน 2 ค่า
10. ขั้นตอนในการหาวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ที่ถูกต้องมากที่สุดคือข้อใด
   ก. คำนวณหาโมเมนต์บวก (Positive Moment) คำนวณหาแรงปฏิกิริยา แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
   ข. คำนวณหาโมเมนต์บวก (Positive Moment) คำนวณหาแรงปฏิกิริยา แผนภาพโมเมนต์ดัดและแผนภาพแรงเฉือน
   ค. คำนวณหาโมเมนต์ลบ (Negative Moment) คำนวณหาแรงปฏิกิริยา แผนภาพแรงเฉือนและแผนภาพโมเมนต์ดัด
   ง. คำนวณหาโมเมนต์ลบ (Negative Moment) คำนวณหาแรงปฏิกิริยา แผนภาพโมเมนต์ดัดและแผนภาพแรงเฉือน

บรรณานุกรมท้ายหน่วย

ก่อเกียรติ บุญชูกุศลและคณะ.(2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ.(2548). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์ จำกัด, 2546.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ.(2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

พิมาน ชาญวานิชบริการ (2541).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แมคกรอ-ฮิล.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์ (2546).**ทฤษฎีโครงสร้าง** ภาควิชาครุศาสตร์โยธา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ.

บุรฉัตร ฉัตรวีระ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

ศิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2536)**. กำลังวัสดุ**. กรุงเทพฯ: พิมพ์ครั้งที่ 4 โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.

สงวน วงษ์ชวลิตกุล (2541).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แมคกรอ-ฮิล.

สมนึก กุลประภา (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

สุรศักดิ์ รายี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

สุรศักดิ์ รายี. (2552).**เอกสารประกอบการบรรยายวิชาการวิเคราะห์โครงสร้าง.** เลยฯ: สาขาวิชาเทคโนโลยีการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา.

อำนวย พาณิชกุล (2528).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วทัชภพ เดชพันธ์ (2545).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: เพียรสัน เอ็ดดูเคชั่น.

วินิจ ช่อวิเชียร (2521).**วิเคราะห์โครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วินิจ ช่อวิเชียร (2528).**ทฤษฎีโครงสร้าง.**กรุงเทพฯ: 12/1 ซอยทองหล่อ ถนนวดีรังสิต.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522)**. กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980)**. Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Elwyn E. Seelye. (1960)**. Data book for civil engineers**. New York.

Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Jr. (1985)**. Mechanics of Materials**: McGraw – Hill Ryerson Limited.

Jan J. Tuma (1969).Theory and Problems of Structural Analysis.The McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

J.B.Wilbur (1965). **Elementary Structural Analysis ,**2nd Ed, Mc Graw-Hill,New York.

R.C. Hibbeler. (1994). **Mechanics of Materials Second Edition**. Macmillan Publishing.

Timoshenko,S.P. (1969).**S.P. and D.H.Young: Throry of Structures**, 2ed Ed., McGraw-Hill New York,

YUAN-YU HSIEH (1995)**.Elementary theory of Structural,** U.S.A,Mexico.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ข้อสอบกลางภาคเรียนและข้อสอบปลายภาคเรียน

ใบปะหน้าข้อสอบ

เลขที่นั่งสอบ

วิทยาลัยเทคนิคเลย

ข้อสอบกลางภาคเรียน

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301 สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

สอบวันที่…….....….เดือน…..... พ.ศ…..... เวลา….....……....น.

คำสั่ง :

1) ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน จำนวน 8 หน้ารวมปก
2) การทำข้อสอบควรเป็นขั้นตอนและแสดงวิธีทำอย่างชัดเจน
3) ทำข้อสอบลงในข้อสอบ
4) ไม่อนุญาตให้นำเอกสารใดๆ เข้าห้องสอบ
5) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณได้

(นายสุรศักดิ์ รายี)

ครูผู้สอน และออกข้อสอบรายวิชา

ข้อสอบกลางภาคเรียน

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอบ 3 ชั่วโมง

คำสั่ง ตอนที่ 1 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. แรงที่พยายามทำให้วัตถุหมุนทำให้โครงสร้างโก่งตัวที่เกิดจากการกระทำของแรงภายในและแรงภายนอกคือโมเมนต์ดัด

..... 2. วัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงกระทำกับวัตถุนั้นหรือวัตถุนั้นไม่มีการเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมคือพยายามการสมดุล (Equilibrium)

..... 3. น้ำหนักบรรทุกตายตัวเป็นน้ำหนักบรรทุกที่มีขนาดและไม่มีตำแหน่งที่แน่นอนไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาด เช่น น้ำหนักพื้น คานและเสา เป็นต้น

..... 4. จุดรองรับแบบยึดหมุนและเคลื่อนที่ไม่ได้จะมีแรงปฏิกิริยาในทิศทางตั้งฉากและไม่มีทิศทางตั้งฉากกับฐานรองรับ

..... 5. ในหารหาแรงปฏิกิริยาของโครงสร้างจะมีตัวที่ไม่ทราบค่าไม่เกิน 3 ตัว (Unknown)

..... 6. แรงปฏิกิริยาเป็นแรงที่ตอบโต้หรือต้านทานต่อแรงที่มากระทำ

..... 7. สภาวะการของวัตถุไม่หมุนและไม่มีการเคลื่อนที่เรียกว่าวัตถุอยู่นิ่งภายใต้แรงที่มากระทำ

..... 8. แรงกระทำหมายถึงน้ำหนักของโครงสร้างเองหรือน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้างได้แก่ น้ำหนักบรรทุกจร เช่น น้ำหนักสิ่งของต่างๆ ที่เคลื่อนที่ได้

..... 9. โมเมนต์ดัด (Bending Moment) เป็นโมเมนต์ลัพธ์ที่เกิดจากแรงภายนอก

..... 10. แรงกระทำให้เกิดความสมดุลระหว่างแรงกระทำกับแรงต้านทาน

ข้อสอบกลางภาคเรียน

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอบ 3 ชั่วโมง

คำสั่ง ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ความหมายของน้ำหนักแผ่รวมกับน้ำหนักที่กระทำแบบเป็นจุด คือข้อใด
   ก. เป็นน้ำหนักบรรทุกที่ใช้แทนน้ำหนักรถบรรทุก
   ข. จะใช้ได้ดีในการตรวจสอบแรงเฉือนที่มากที่สุด
   ค. เป็นน้ำหนักที่กระทำต่อโครงสร้างเป็นบางครั้งบางคราว
   ง. ข้อ ก และ ข ถูกต้อง
2. จำนวนแรงปฏิกิริยาภายในของโครงสร้างมีจำนวนมากกว่าสมการสมดุลเราเรียกว่าอะไร
   ก. สถิตแบบดีเทอมิเนทภายนอก
   ข. สถิตแบบอินดีเทอมิเนทภายนอก
   ค. สถิตแบบดีเทอมิเนทภายใน
   ง. สถิตแบบอินดีเทอมิเนทภายใน
3. เป็นแรงหรือโมเมนต์ที่กระทำที่ฐานรองรับเพื่อให้โครงสร้างเกิดความสมดุลคือความหมายข้อใด
   ก. แรงต้านทาน
   ข. แรงลัพธ์
   ค. โมเมนต์
   ง. แรงปฏิกิริยา
4. สำหรับจุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint) มีอยู่กี่แบบอะไรบ้าง
   ก. มี 2 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) และจุดต่อ (Rigid Joint)
   ข. มี 3 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) จุดต่อ (Rigid Joint) และแบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support)
   ค. มี 3 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) จุดต่อ (Rigid Joint) แบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support) และจุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint)
   ง. มี 3 แบบ ได้แก่ จุดต่อแบบยึดหมุน (Pined Joint) จุดต่อ (Rigid Joint) แบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support) จุดต่อหรือข้อต่อหรือรอยต่อ (Joint) และจุดต่อ (Roller Support)

5. ข้อใดคือความหมายของแบบยึดด้วยข้อต่อ (Link Support)
   ก. แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับจะมีสองฐานรองรับขึ้นไป
   ข. แบบยึดหมุนยึดด้วยข้อต่อเคลื่อนที่ได้
   ค. แบบยึดหมุนแบบยึดด้วยข้อต่อไม่มีแรงเสียดทานใดๆทั้งสิ้น
   ง. มีโมเมนต์ทิศทางเดียว
6. ความหมายของคานต่อเนื่อง (Continuous Beam) คือข้อใด
   ก. เป็นคานที่มีจุดรองรับตั้งแต่ 3 จุดขึ้นไป
   ข. เป็นคานที่มีจุดรองรับตั้งแต่ 2 จุดขึ้นไป
   ค. เป็นคานดีเทอมิเนท (Determinate)
   ง. เป็นคานอย่างง่ายสามารถวิเคราะห์ด้วยสมการสมดุล
7. มีลักษณะการยึดแบบหมุนไม่มีการเคลื่อนที่และมีแรงปฏิกิริยาเกิดขึ้น 2 ทาง คือข้อใด
   ก. แบบยึดจุดต่อหมุน ข. แบบหมุนและเคลื่อนที่ทางเดียว
   ค. แบบยึดแน่น ง. แบบบานพับ
8. ความหมายของแรงกระทำ (Active Force) คือข้อใด
   ก. น้ำหนักของโครงสร้างเอง
   ข. น้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้าง
   ค. น้ำหนักกระทำกับแรงที่รองรับ
   ง. ข้อ ก และข้อ ข ถูกต้อง
9. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้องมากที่สุด คือข้อใด
   ก. คานที่มีปลายทั้งสองข้างยึดรั้งสามารถหมุนได้
   ข. แรงภายในและแรงภายนอกที่กระทำให้คานถูกเฉือนขาดในแนวขนาน
   ค. โมเมนต์ดัดเกิดจากแรงเฉือนที่กระทำกับคานทำให้เกิดการหนีศูนย์ของโครงสร้าง
   ง. น้ำหนักบรรทุกจรเป็นน้ำหนักบรรทุกบนโครงสร้างเคลื่อนที่ได้
10. ความหมายของแรงเฉือน (Shear Force) คือข้อใด
   ก. เป็นแรงที่พยายามทำให้โครงสร้างเกิดการโก่งตัว
   ข. เป็นหน่วยแรง (Stress Unit) หรือความเครียดในโครงสร้าง ทำให้โครงสร้างเฉือนขาดออกจากกันในแนวดิ่ง
   ค. แรงภายนอกที่กระทำกับคานทำให้เกิดการโค้งและเกิดการเฉือนขาดออกจากกัน
   ง. แรงภายในและแรงภายนอกที่กระทำให้คานถูกเฉือนให้ขาดในแนวดิ่ง

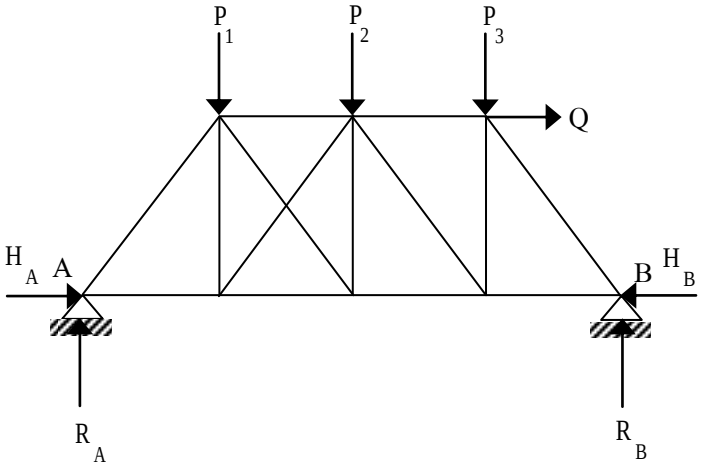
ข้อสอบกลางภาคเรียน

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอบ 3 ชั่วโมง

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงแสดงขั้นตอนการทำอย่างละเอียด

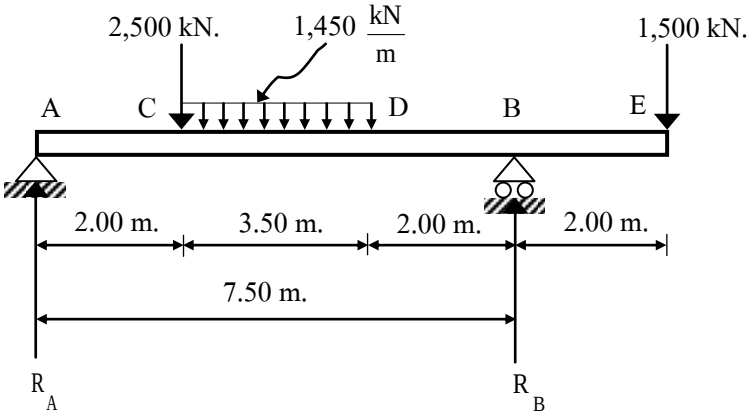
1. โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural) อยู่ในลักษณะสมดุล จงคำนวณหาค่าตัวเกินหรือค่าระดับของดีเทอมิเนทดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 โครงสร้างถักสะพานแบบโฮว์ (Howe Truss Structural)

ที่มา : วีรพันธ์ สิทธิพงศ์ (2522)

2. จงคำนวณหาแรงเฉือนสูงสุดและโมเมนต์สูงสุดของคาน ดังแสดงในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 คานอยู่ในลักษณะสมดุล

ที่มา : วทัชภศ เดชพันธ์ (2545:264)

ใบปะหน้าข้อสอบ

เลขที่นั่งสอบ

วิทยาลัยเทคนิคเลย

ข้อสอบปลายภาคเรียน

วิชา ทฤษฎีโครงสร้าง รหัสวิชา 3100-0301 สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

สอบวันที่…….....….เดือน…..... พ.ศ…..... เวลา….....……....น.

คำสั่ง :

1) ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน จำนวน 7 หน้ารวมปก
2) การทำข้อสอบควรเป็นขั้นตอนและแสดงวิธีทำอย่างชัดเจน
3) ทำข้อสอบลงในข้อสอบ
4) ไม่อนุญาตให้นำเอกสารใดๆ เข้าห้องสอบ
5) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณได้

(นายสุรศักดิ์ รายี)

ครูผู้สอน และออกข้อสอบรายวิชา

ข้อสอบปลายภาคเรียน

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอบ 3 ชั่วโมง

คำสั่ง ตอนที่ 1 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงทำเครื่องหมาย (✓) หน้าข้อที่ถูกและทำเครื่องหมายผิด (×) หน้าข้อความที่ผิด

..... 1. การวางน้ำหนักบรรทุกจรที่บางช่วงคานอาจจะทำให้ค่าของโมเมนต์ที่ตำแหน่งเดียวกันของคานต่ำกว่าได้

..... 2. หลักการของมูลเลอร์เบย์ลูร์กล่าวว่าแนวเส้นอิทธิพลซึ่งเป็นฟังก์ชั่นของแนวแรงปฏิกิริยาของแรงเฉือนและโมเมนต์

..... 3. การเปลี่ยนแปลงของแรงปฏิกิริยาเนื่องจากการเคลื่อนที่จากตำแหน่งหนึ่งไปอีกสองตำแหน่งถัดไป

..... 4. โครงถัก คือการนำชิ้นส่วนมาประกอบกันขึ้นเป็นรูปโครงสร้างต่างๆ โดยยึดปลายทั้งสองชิ้นส่วนต่างๆ ให้ยึดติดกันและสามารถถ่ายแรงให้เข้ากันและกันได้ด้วยการเชื่อมหมุดย้ำและการใช้น็อต

..... 5. โครงสร้างอย่างอยาก คือ โครงสร้างอินดีเทอร์มิเนทสแตติกส์

..... 4. ถ้าไม่คำนึงถึงการยืดตัวของโครงสร้างอันเนื่องมาจากแรงตามแนวแกนแล้วเส้นโค้งอิลาสติคนี้จะมีความยาวเดิมของส่วนโครงสร้างนั้นเสมอ

..... 6. ในการคำนวณโครงถักจะต้องคำนวณชิ้นส่วนโครงถักก่อนถึงจะมาคำนวณหาแรงอัด

..... 7. โครงสร้างแบบหลังคา ได้แก่ แบบฟิงค์ (Fink Truss) แบบแพรท (Pratt Truss) และแบบโฮว์ (Howe Truss)

..... 8. ใช้สมการสมดุลเพื่อหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของคานเสมือนแล้วพิจารณาหาตำแหน่งที่ต้องการทราบค่าความลาดชัน

..... 9. โครงสร้างอย่างยาก (Indetermination) ไม่เหมาะสมกับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)

..... 10. สำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะใช้เพื่อหาโมเมนต์ดัดที่จุดรองรับในคานต่อเนื่องจากน้ำหนักบรรทุกนั้นๆ

ข้อสอบปลายภาคเรียน

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอบ 3 ชั่วโมง

คำสั่ง ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ความหมายของโมเมนต์จะมีค่ามากที่สุดและสมบูรณ์ที่สุดกรณีคานยื่นที่จุดเดียวกันกับแรงเฉือนค่ามากที่สุดอย่างสมบูรณ์ที่เกิดขึ้น คือข้อใด
   ก. คานซอยที่รับน้ำหนักบรรทุกจรจากโครงสร้าง
   ข. คานที่รองรับน้ำหนักบรรทุกจรและน้ำหนักบรรทุกคงที่
   ค. ฐานรองรับน้ำหนักบรรทุกจากโครงสร้าง
   ง. ถูกทุกข้อ
2. ความหมายของเส้นอิทธิพล คือข้อใด
   ก. เส้นการหาระยะทางของน้ำหนักบรรทุกจร น้ำหนักบรรทุกคงที่และน้ำหนักบรรทุกกระแทก
   ข. เส้นแรงดึงแนวเส้นอิทธิพลของแรงปฏิกิริยา แรงเฉือน โมเมนต์ดัด
   ค. เส้นที่แสดงถึงอิทธิพลของภาระหนึ่งหนึ่งหน่วยที่มีต่อค่าแรงใดแรงหนึ่งที่หน้าตัดที่กำหนดให้ของโครงสร้าง
   ง. ถูกทุกข้อ
3. โมเมนต์หลักของคานหลักระหว่างจุดช่วงแผ่นสองจุดที่ดัดกันไปส่วนมากจะเป็นเส้นอะไร คือข้อใด
   ก. เส้นเอียงลาดขึ้น
   ข. เส้นเอียงลง
   ค. เส้นเฉียง
   ง. เส้นตรง
4. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง คือข้อใด
   ก. โมเมนต์ไดอะแกรมที่มีค่าบวกจะเขียนอยู่ด้านล่าง ด้านรับแรงอัดของคานจริงเสมอ
   ข. ค่าของแรงเฉือนที่จุดใดๆ บนคานเสมือนนี้จะมีค่าเท่ากับมุมลาดเอียง (Slope) ที่จุดนั้นของคานจริง
   ค. ค่าของโมเมนต์ดัดที่จุดใดๆ บนคานเสมือนจะมีค่าเท่ากับระยะการโก่งตัวที่จุดนั้นของคานเสมือนเอง
   ง. แรงที่กระทำบนคานเสมือนจะกระจายอยู่บนคานมิทิศทางพุ่งไปทางซ้ายหรือทางขวาก็ได้

5. ความหมายของฐานรองรับของคานเสมือน คือข้อใด
   ก. ฐานรองรับแบบหมุดหรือล้อเลื่อนที่ปลายของคานจริงมีค่าการโก่งตัวเป็นหนึ่ง
   ข. ฐานรองรับแบบหมุดหรือล้อเลื่อนที่ปลายของคานจริงมีค่าการโก่งตัวเป็นศูนย์
   ค. คานจริงเป็นแบบหมุด (Pin) คานเสมือนจะเป็นอิสระ (Free)
   ง. คานจริงจะเป็นอิสระ (Free) คานเสมือนจะเป็นแบบบานพับ (Hinge)
6. สำหรับทฤษฎีข้อที่2 สำหรับวิธีพื้นที่โมเมนต์ คือข้อใด
   ก. โมเมนต์และแรงเฉือนมีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวาและแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้น
   ข. ระยะการโก่งตัวเนื่องจากแรงดัด สามารถคำนวณโดยวัดจากเส้นสัมผัสอ้างอิง
   ค. การเปลี่ยนมุมลาดหรือระยะการโก่งตัวที่คำนวณโดยวิธีพื้นที่โมเมนต์นี้วัดจากเส้นสัมผัสที่กำหนดขึ้นบนเส้นแสดงการเสียรูปทุกครั้ง
   ง. แกน x มีค่าบวกเมื่อชี้ไปทางขวา และแกน y มีค่าบวกเมื่อชี้ขึ้นบน
7. สำหรับเครื่องหมายของคานเสมือน คือข้อใด
   ก. แรงเฉือนในคานเสมือนมีค่าเป็นบวก แสดงว่ามุมลาดเอียงของจุดบนเส้นโค้งอิลาสติคหมุนตามเข็มนาฬิกา
   ข. ถ้าโมเมนต์ดัดของคานเสมือนมีค่าเป็นบวกแสดงว่าการโก่งตัวแสดงว่าการโก่งตัวของจุดบนเส้นโค้งอิลาสติคอยู่ล่างคร์อดเสมอ
   ค. ค่าบวกของ $\frac{M}{EI}$ ไดอะแกรมของคานจริงจะเป็น (Elastic Weight) กระทำนั้นไปบนคานเสมือน
   ง. โมเมนต์ไดอะแกรมที่มีค่าบวกจะเขียนอยู่ด้านล่าง ด้านรับแรงอัดของคานจริงเสมอ
8. ขั้นตอนเริ่มในการวิเคราะห์คานต่อเนื่องโดยสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. ด้วยการถอดแรงส่วนเกินออกตรงกลางจะเหลือฐานรองรับริมนอกสุด 2 ฐานรองรับ
   ข. ด้วยการถอดแรงส่วนเกินออกนอกริมสุด 2 ฐานรองรับ
   ค. ด้วยการถอดแรงส่วนเกินริมนอกด้านซ้ายออกต่อจากนั้นถอดแรงตรงกลางตรงจุดที่รองรับออกทำตามในขั้นตอนอย่างนี้ไปเรื่อยๆ
   ง. ถอดแรงส่วนเกินออกถ้าเลือกแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับของความยาวเป็นส่วนเกิน

9. หลักการรวมผลของวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) ประกอบไปด้วยค่าสมการไม่เกินกี่ค่า คือข้อใด
   ก. สมการละไม่เกิน 5 ค่า
   ข. สมการละไม่เกิน 4 ค่า
   ค. สมการละไม่เกิน 3 ค่า
   ง. สมการละไม่เกิน 2 ค่า
10. ข้อใดกล่าวได้ถูกต้องสำหรับวิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) คือข้อใด
   ก. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดตรงกลางของจุดฐานรองรับ
   ข. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดสามจุดของคานต่อเนื่อง
   ค. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation) จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดริมสุดของคานต่อเนื่อง
   ง. วิธีสมการสามโมเมนต์ (Three Moment Equation)จะใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ที่จุดเริ่มต้นและริมสุดของคานต่อเนื่อง

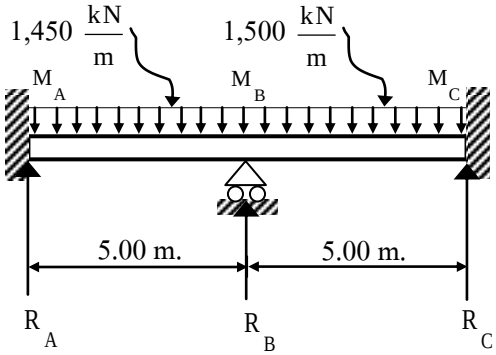
ข้อสอบปลายภาคเรียน

ชื่อวิชา ทฤษฎีโครงสร้าง สาขาวิชาช่างก่อสร้าง

รหัสวิชา 3100-0301 คาบการสอบ 3 ชั่วโมง

คำสั่ง ตอนที่ 3 จากโจทย์ที่กำหนดให้จงแสดงขั้นตอนการทำอย่างละเอียด

1. จงวิเคราะห์โครงสร้างของคานต่อเนื่องต่อไปนี้ พร้อมกับเขียนไดอะแกรมของโมเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 1



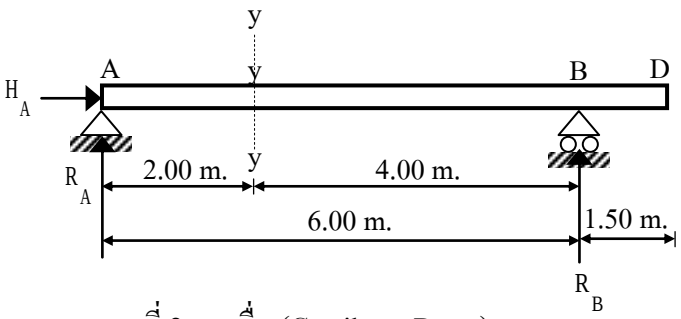
ภาพที่ 1 คานต่อเนื่องยึดแน่นและน้ำหนักบรรทุก

ที่มา : สมนึก กุลประภา (2528:150)

2. จงหาเขียนเส้นอิทธิพลสำหรับค่าแรงดัด (Moment)ที่รอยตัด y-y ดังภาพที่ 2 และให้คำนวณหาแรงดัดที่รอยตัด y-y ที่มีค่าบวกสูงสุดและมีค่าลบสูงสุดที่จุด y เนื่องจาก

2.1 น้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบแผ่กระจายสม่ำเสมอเท่ากับ 600 N/m

2.2 น้ำหนักบรรทุกเคลื่อนที่แบบกระทำเป็นจุดขนาดเท่ากับ 1,200 N ระยะห่างเท่ากับ 1.20 m.



ภาพที่ 2 คานยื่น (Cantilever Beam)

ที่มา : สุรศักดิ์ ราษี (2553)

ภาคผนวก ข

ประวัติผู้จัดทำ

ประวัติผู้จัดทำ

ชื่อ-สกุล	นายสุรศักดิ์ ราษี
วัน เดือน ปี เกิด	20 เมษายน 2512
ภูมิลำเนาเดิม	28/1 หมู่ 3 บ้านขามเรียน ตำบลเมืองเพีย อำเภอบ้านไผ่ จังหวัดขอนแก่น 40110
	สถานที่อยู่ปัจจุบัน 157/7 ถนนเลย-ด่านซ้าย ตำบลกุดป่อง อำเภอเมือง จังหวัดเลย 42000
ประวัติการศึกษา	พ.ศ.2530 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ม.6) โรงเรียนบ้านไผ่ศึกษา อำเภอบ้านไผ่ จังหวัดขอนแก่น
	พ.ศ.2532 ประกาศนียบัตรวิชาชีพ (ปวช.) วิทยาลัยเทคนิคขอนแก่น
	พ.ศ.2534 ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.) วิทยาลัยเทคนิคมหาสารคาม
	พ.ศ.2536 ปริญญาอุตสาหกรรมศาสตร์บัณฑิต (อส.บ) สาขาวิศวกรรมก่อสร้าง มหาวิทยาลัยศรีประทุม กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2544 ประโยควิชาชีพครู (ปว.ค.) มหาวิทยาลัยมกุฏราชวิทยาลัย เขตพระนคร กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2546 ปริญญาศิลปศาสตรมหาบัณฑิต (ศศ.ม.) สาขาสังคมศาสตร์เพื่อการพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย
	พ.ศ.2548 ปริญญาครุศาสตรอุตสาหกรรมมหาบัณฑิต (คอ.ม.) สาขาโยธา สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2551 ปริญญาปรัชญาดุษฎีบัณฑิต (ปร.ด.) สาขาวิชายุทธศาสตร์การพัฒนาภูมิภาค มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย
	พ.ศ.2552 ประกาศนียบัตร (ป.บัณฑิต) สาขาบริหารการศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี
ประวัติการทำงาน	พ.ศ.2537 บริษัท ซีคอนสแควร์ จำกัด เขตสวนหลวง กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2538 บริษัท ผลิตภัณฑ์คอนกรีตซีแพค จำกัด อำเภอเมือง จังหวัดนนทบุรี
	พ.ศ.2539 บริษัท วรมันเอ็นจิเนียริ่ง จำกัด เขตบางพลัด กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2539 บริษัท วรมันเอ็นจิเนียริ่ง จำกัด เขตบางพลัด กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2539 บริษัท วรมันเข็มเจาะ จำกัด เขตบางพลัด กรุงเทพมหานคร

	พ.ศ.2540 ธนาคารเพื่อการเกษตรและสหกรณ์การเกษตร (สำนักงานใหญ่) เขตดุสิต กรุงเทพมหานคร
	พ.ศ.2541 อาจารย์ 1 แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย
	พ.ศ.2548 ครู ค.ศ.1 แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย
	พ.ศ.2552 ครูวิทยฐานะครูชำนาญการ แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย
	พ.ศ.2556 ครูวิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย
การประกอบวิชาชีพ	สามัญวิศวกร โยธา สย.6767 และผู้ตรวจสอบอาคาร บ.2868
ตำแหน่งหน้าที่ปัจจุบัน	ครูวิทยฐานะครูชำนาญการพิเศษ แผนกวิชาการก่อสร้าง วิทยาลัยเทคนิคเลย
สถานที่ทำงาน	วิทยาลัยเทคนิคเลย เลขที่ 272 ตำบลกุดป่อง อำเภอเมือง จังหวัดเลย 42000

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ก่อเกียรติ บุญชูกุศลและคณะ. (2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เกรียงศักดิ์ อุดมสินโรจน์. (2525). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์มิตรณรงค์การพิมพ์.

กีรติ ลีวัจนกุล.(2541). **ชลศาสตร์.** กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

จำรูญ ตันติพิศาลกุล.(2525). **กลศาสตร์ของแข็ง.** กรุงเทพมหานคร: พิมพ์ครั้งที่ 6 โรงพิมพ์มิตรณรงค์การพิมพ์.

ชนะ กสิภาร์. (2528). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ชวนพิมพ์ จำกัด.

ชาญ ถนัดงาน. (2523). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

ชุมพล จันทร์สม (2552). **วิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

ชาญชัย จารุจินดา. (2544). **ทฤษฎีโครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 5 โรงพิมพ์ป.สัมพันธ์พาณิชย์.

เดชัย ด่านวรรณกิจ. (2546). **ความแข็งแรงวัสดุ.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เดช พุทธเจริญทอง. (2548). **กลศาสตร์ของแข็งชั้นสูง**. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์บริษัทพิมพ์ดีกรุงเทพ.

เทอดศักดิ์ สายสุทธิ์และคณะ. (2546). **กลศาสตร์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์เอมพันธ์จำกัด.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ. (2537). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ: 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เฉลิมศักดิ์ นามเฉียงใต้และคณะ.(2553). **กลศาสตร์โครงสร้าง 1-2.** กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

เมธี หมั่นทำการ และคณะ. (2538). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตศาสตร์**.กรุงเทพฯ : 23 โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

มนตรี พิรุณ. (2550). **กลศาสตร์ของวัสดุ.** ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์.

ยิ่งศักดิ์ พรรณเชษฐ์. (2541). **กำลังวัสดุเบื้องต้น**.พิมพ์ครั้งที่ 4 มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

นิรันดร์ สุวรัตน์. (2544). **ฟิสิกส์ กลศาสตร์ มัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพฯ : บริษัทสำนักพิมพ์ พ.ศ.พัฒนา จำกัด.

นิพนธ์ เธียรศิริพิพัฒน์. (2546). **วิเคราะห์โครงสร้าง**. กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 2/46 สถาบันพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

บริษัท เยนเนอรัล เอนยิเนียริ่ง จำกัด. (2545). **คู่มือวิศวกรรมโยธา.** กรุงเทพฯ .

ประสิทธิ์ จึงสงวนพรสุข. (2541). **กลศาสตร์วิศวกรรมภาคสถิติศาสตร์.หน่วยสารบรรณ.** ขอนแก่น: คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

ศิริศักดิ์ ปโยธรศิริ. (2536). **กำลังวัสดุ**. กรุงเทพฯ : พิมพ์ครั้งที่ 4 โรงพิมพ์โอเดียนสโตร์.

ศิริวัฒน์ ไชยชนะ. (2545). **กลศาสตร์วัสดุ.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์เอส เอสบุ๊คเซนต์เตอร์.

เสกสรร ศรียศ. (2550). **กลศาสตร์วิศวกรรม1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

โสภณ วงศ์มีทรัพย์และคณะ. (2544). **กลศาสตร์วิศวกรรม (ภาคสถิตยศาสตร์).** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ.

สมโพธิ์ วิวิธเกยูรวงศ์.(2536). **กลศาสตร์วัสดุ,** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สนั่น เจริญเผ่าและคณะ.(2521). **การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก**.กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ป.พาณิชย์ สัมพันธ์.

สงวน วงษ์ชวลิตกุลและคณะ. (2541). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แม็คกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชั่นแนลเอ็นเตอร์ไพร์ส อิงค์.

สุรศักดิ์ ราษี. (2553).**กลศาสตร์โครงสร้าง 1**. กรุงเทพฯ: สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ.

อำนวย พาณิชกุลและคณะ.(2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

อภิชาต จิรัฐติยางกูล. (2535). **การวิเคราะห์โครงสร้าง.** สาขาวิศวกรรมโยธา คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

วีระศักดิ์ กรัยวิเชียรและคณะ. (2553). **กลศาสตร์วิศวกรรม.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์ซีเอ็ดยูเคชั่น.

วีรพันธ์ สิทธิพงศ์. (2522). **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคสถิตยศาสตร์.** กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์นิยมพาณิชย์.

วัฒนา ธรรมมงคล.และคณะ. (2527). **กำลังวัสดุ.** กรุงเทพฯ: พิมพ์ครั้งที่ 4 สำนักพิมพ์วินิต ช่อวิเชียร.

วินิต ช่อวิเชียร. (2530)**. การออกแบบโครงสร้างไม้และเหล็ก.** กรุงเทพฯ: คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Andrew Pytel, Ferdinand L. Singer. (1980). **Strength of Materials Fourth Edition**: Harper Collins Publishers, Singapore. Inc.

Bresler, B., Lin, T.Y., and Scalzi, J.B. (1963).: **Design of Steel Structural**. 2nd. Ed., John Wiley and Sons, New York.

Elwyn E. Seelye. (1960). **Data book for civil engineers**. New York.

Ferdinand P. Beer, E. Russel Johnston, Jr. (1985). **Mechanics of Materials**: McGraw – Hill Ryerson Limited.

R.C. Hibbeler. **Mechanics of Materials Second Edition**. (1994). Macmillan Publishing.